



T.C.
HATAY MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ÖZEL GRADİYENT TERİMLİ DURGUN OLMAYAN KUAZİ OPTİK
DENKLEMİ İÇİN OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ**

AYNUR AYDIN

ENFORMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HATAY
OCAK - 2023



T.C.
HATAY MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÖZEL GRADİYENT TERİMLİ DURGUN OLMAYAN KUAZİ OPTİK
DENKLEMİ İÇİN OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ

AYNUR AYDIN
ORCID:0000-0001-7577-4076

ENFORMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Hakan YETİŞKİN
ORCID: 0000-0002-0603-8443

HATAY
OCAK - 2023

T.C.
HATAY MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ÖZEL GRADİYENT TERİMLİ DURGUN OLMAYAN KUAZİ OPTİK
DENKLEMİ İÇİN OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ**

AYNUR AYDIN

ENFORMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Dr. Öğr. Üyesi Hakan YETİŞKİN danışmanlığında hazırlanan bu tez 23/01/2023 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından **OYBİRLİĞİ** ile kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Bünyamin YILDIZ
Başkan

Doç. Dr. Alev Kelleci AKBAY
Üye

Dr. Öğr. Üyesi Hakan YETİŞKİN
Üye

Kod No:

Doç. Dr. Cengiz KARACA
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

17/01/2023

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını ve tez üzerinde Yükseköğretim Kurulu tarafından hiçbir değişiklik yapılamayacağı için tezin bilgisayar ekranında görüntülendiğinde asıl nüsha ile aynı olması sorumluluğunun tarafıma ait olduğunu beyan ederim.

İmzası

AYNUR AYDIN

ÖZET

ÖZEL GRADİYENT TERİMLİ DURGUN OLMAYAN KUAZİ OPTİK DENKLEMİ İÇİN OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ

Bu tez çalışmasında özel gradiyent terimli kuazi optik denklemi için final kriterli optimal kontrol problemi incelenmiştir. İlk önce söz konusu optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliği teoremleri ispatlanmıştır. Daha sonra, ele alınan problemde amaç fonksiyonelinin diferansiyellenebilirliğini incelenmiş ve fonksiyonelin birinci varyasyonu için formül elde edilmiştir. Bu formülden yararlanarak incelenen optimal kontrol probleminin çözümü için varyasyon eşitsizliği biçiminde gerek şart elde edilmiştir.

2023, 33 sayfa

Anahtar Kelimeler: Optimal kontrol problemi, Durgun olmayan kuazi optik denklemi.

ABSTRACT

OPTIMAL CONTROL PROBLEM for the NONSTATIONARY QUASI-OPTICS EQUATION with a SPECIAL GRADIENT TERM

In this thesis, the optimal control problem with final criteria for the quasi-optics equation with special gradient terms is investigated. First, the existence and uniqueness theorems of the solution of the optimal control problem are proved. Then, the differentiability of the objective functional was examined and the formula for the first variation of the functional was obtained. The necessary condition in the form of inequality of variation has been obtained for the solution of the optimal control problem examined by using this formula.

2023, 33 pages

Key Words: Optimal control problem, The nonstationary quasi-optics equation.

TEŞEKKÜR

Mesleki ve akademik hayatımda önemli kararlar almam gerektiğinde sürekli yanımda olan ve varlığı ile benim için önemli bir rol model oluşturan, gerek yüksek lisans tez konumunun belirlenmesinde gerek araştırılması ve yazımı sırasında sahip olduğu bilgi birikimi ve tecrübesi ile çalışmalarına ışık tutan ve yardımını esirgemeyen danışman hocam Sn. Dr. Öğr. Üyesi Hakan YETİŞKİN'e sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Tez konusunun belirlenmesi ve çalışmaların takibinde profesyonel yaklaşımları ve öngörülleri ile yüksek lisans çalışmalarımı zenginleştiren ve yardımlarını esirgemeyen Sn. Prof. Dr. Gabil YAGUBOV, Sn. Prof. Dr. Bünyamin YILDIZ ve Doç. Dr. Alev Kelleci AKBAY'a, tez çalışmalarım sırasında tüm bölüm olanaklarından yararlanmamı sağlayan Hatay Mustafa Kemal Üniversitesi (HMKÜ) Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölüm Başkanlığı'na ve HMKÜ FBE Enstitüsü Müdürlüğü çalışanlarına teşekkürlerimi sunarım.

Eğitim hayatım boyunca beni maddi ve manevi olarak destekleyen, güvenen ve daima yanımda olan canım aileme sonsuz minnet ve şükranlarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	I
ABSTRACT.....	II
TEŞEKKÜR.....	III
İÇİNDEKİLER	IV
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	V
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....	2
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	4
3.1. Materyal.....	4
3.2. Yöntem	9
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA	12
4.1. Problemin Konulması.....	12
4.2. Optimal Kontrol Probleminin Çözümünün Varlığı ve Tekliği.....	14
4.3. Fonksiyonelin Diferansiyellenebilirliği ve Optimal Kontrol Probleminin Çözümü için Gerek Şart	20
5. SONUÇ ve ÖNERİLER.....	29
KAYNAKLAR	30
ÖZGEÇMİŞ	33

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

$\forall$	: Herhangi
$\dot{\forall}$	: Hemen hemen her yerde
$i = \sqrt{-1}$	: Sanal birim
B	: Banach Uzayı
H	: Hilbert Uzayı
$W_p^{k,m,l}$	: Sobolev uzayları
L	: Verilen sayı
T	: Verilen sayı
l	: Verilen sayı
$x \in [0, l]$	: Uzay değişkeni
$t \in [0, T]$	: Zaman değişkeni
$\Omega_{tz} = (0, l) \times (t, T) \times (z, L),$	: Verilen bölge
$\Omega = \Omega_{TL}$	: Verilen bölge
$Q_{tz} = (0, t) \times (0, z), Q = Q_{TL}$	: Verilen bölge
$c_k, k = 1, 2, \dots$	: Pozitif sabitler

1. GİRİŞ

Durgun ve durgun olmayan kuazi optik denklemi ile ifade edilen süreçler için optimal kontrol teorisi çağdaş optimal kontrol teorisinin önemli alanlarından biridir. Bu teorisinin problemleri çoğunlukla kuantum mekaniğinde, lineer olmayan optikte, çağdaş fiziğin ve tekniğin farklı alanlarında ortaya çıkar. Bu nedenle böyle optimal kontrol problemlerinin incelenmesi gerek teorik gerekse pratik anlamda öneme sahiptir.

Bu tez çalışmasında özel gradyent terimli durgun olmayan kuazi optik denklemi için final fonksiyonelli optimal kontrol problemi ele alınmıştır. Bu tür problemler ışık demetinin lineer ve homojen olmayan ortamda dağılması sürecinin incelenmesi sonucu ortaya çıkan optimal kontrol problemlerindendir. Belirtmek gerekir ki, dağılan parçacıklar yüklenmiş olduğunda lineer olmayan ortamda parçacıkların dağılması süreci özel gradyent terimli durgun ve durgun olmayan kuazi optik denklemi ile ifade edilmektedir. Ayrıca belirtmek gerekir ki, durgun olmayan kuazi optik denklemi için optimal kontrol ve identifikasyon problemleri önceden çalışmalarında ele alınmıştır. Bu çalışmalarda durgun olmayan kuazi optik denklemi özel gradyent terim içermemektedir.

Bu tez çalışmasında, daha öncede söylediğimiz gibi özel gradyent terimli durgun olmayan kuazi optik denklemi için optimal kontrol problemi ele alınmıştır. Burada kontroller ölçülebilir sınırlı fonksiyonlar sınıfından seçilmiştir ve amaç fonksiyoneli de final fonksiyoneli olmaktadır. Söylemek gerekir ki, benzer optimal kontrol problemleri daha önce çok az incelenmiştir. Benzer optimal kontrol problemi ilk önce çalışmasında incelenmiştir. Bu çalışmada kontroller ancak x uzay değişkenine bağlıdır ve özel gradyent terimin katsayısı da bu değişkene bağlıdır. Ancak bu tez çalışmasında incelenen problemde kontroller ancak z değişkenine, özel gradyent terimin katsayısı ise gerek x , gerekse de z değişkenine bağlı olarak seçilmiştir. Bu nedenle bu tez çalışmasında ele alınan optimal kontrol problemi günceldir ve incelenmesi gerek teorik gerekse de pratik önem arz etmektedir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Optimal kontrol teorisi günlük yaşamda hemen hemen her alanda karşımıza çıktığından aslında çok eski bir tarihe dayanır. Var olan alternatifler arasında en iyi en mükemmel olanı seçmek her zaman olağandır. İnsanlar yüzyıllar boyunca karşılaştıkları problemlere en iyi çözümü getirmek gibi bir ihtiyaçla karşılaşmışlardır. Karşılaşılan problemler asırlar boyunca kendine özgü yöntemlerle çözülmüş ve tüm problemlerin çözümüne yol gösterecek yaklaşımlar oluşmuştur. Ancak daha sonraları birçok doğa yasasının varyasyon prensipleriyle ifade edilebilir olmasının anlaşılmasıyla matematiğin çok önemli bir dalı olan varyasyon hesabı oluşmuştur. Fakat son yıllarda teknolojinin hızla gelişmesi sonucu birtakım problemler klasik varyasyon hesabı yöntemleri ile çözülemediğinden yeni metotların geliştirilmesine ihtiyaç duyulmuştur. İşte bu süreçte modern anlamda optimal kontrol teorisinin temelleri atılmış oldu. Toplanmış parametrelili sistemler için optimal kontrol teorisi optimal süreçler teorisinin ve adi diferansiyel denklemler teorisinin ana bölümlerini içermektedir. Temelinin bir Rus Matematikçisi olan Pontryagin'in maksimum prensibi adlı çalışmasına dayandığı bu teorisinin gelişmesinde toplanmış parametrelili sistemler için optimal kontrol teorisinin önemli bir payı vardır. Fransız matematikçisi Lions dağılmış parametrelili sistemler için optimal kontrol teorisinin gelişmesinde önemli bir rol oynamış ve onun aldığı sonuçlar 1971 yılında İngilizce olarak yayınlanan "Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations" adlı kitapta detaylı bir şekilde anlatılmıştır. Daha sonraları Butkovskiy, Vasilyev, Lure, Bidout, Gobel, İskenderov ve diğer bilim adamlarının çalışmaları optimal kontrol teorisinin gelişmesinde önemli rol oynamıştır.

Durgun kuazi optik denklemi için optimal kontrol problemleri, başka bir değişle kompleks potansiyelli Schrödinger denklemi için optimal kontrol problemleri daha önce farklı çalışmalarda ele alınmıştır ancak belirtmek gerekir ki; M.A. Vorontsov ve V.İ. Şmalgauzen'in çalışmalarında ilk olarak ışık demetinin lineer ve homojen olmayan ortamda dağılmasını gösteren optimal kontrol problemleri ele alınmış ve bu problemler matematiğin klasik yöntemleri ile çözülmeye çalışılmıştır. Daha önce yapılan çalışmalar içerisinde A.D. İskenderov, G. Yagub ve N.S. İbrahimov'un çalışmalarını önemle dikkate almamız gerekir. Çünkü bu çalışmalarda hem lineer hem lineer olmayan kuazi optik denklemi ile ifade edilen sistemler için optimal kontrol teorisinin matematiksel temelleri

ciddi bir biçimde atılmış ve ortaya çıkan problemlerin çağdaş çözüm yöntemleri oluşturulmuştur.



3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Materyal

Bu bölümde çalışma boyunca kullanacağımız tanımları açıklayacağız.

Tanım 3.1: $L_2(0, l)$, Hilbert uzayı olup elemanları $(0, l)$ aralığında ölçülebilir ve mutlak değerinin karesiyle integrallenebilir fonksiyonların Lebesgue uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki gibidir:

$$\langle u, v \rangle_{L_2(0, l)} = \int_0^l u(x) \bar{v}(x) dx,$$

$$\|u\|_{L_2(0, l)} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{L_2(0, l)}}.$$

Burada $\bar{v}(x)$ fonksiyonu $v(x)$ fonksiyonunun kompleks eşleniğidir.

Tanım 3.2: $L_2(\Omega)$, Hilbert uzayı olup elemanları $\Omega = (0, l) \times (0, T)$ bölgesinde ölçülebilir ve mutlak değerinin karesiyle integrallenebilir fonksiyonların Lebesgue uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\langle \psi, \phi \rangle_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} \psi(x, t) \bar{\phi}(x, t) dx dt,$$

$$\|\psi\|_{L_2(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{L_2(\Omega)}}.$$

Tanım 3.3: $L_{\infty}(0, l)$, Banach uzayı olup, $(0, l)$ aralığında ölçülebilir, sınırlı ve sonlu $\|u\|_{L_{\infty}(0, l)} = \text{vraisup}_{x \in (0, l)} |u(x)| = \text{ess sup} \{|u(x)| : x \in (0, l)\}$ normuna sahip $u = u(x)$

fonksiyonlarının uzayıdır.

Tanım 3.4: $L_{\infty}(\Omega)$, Banach uzayı olup Ω bölgesinde ölçülebilir, sınırlı ve sonlu

$$\|\psi\|_{L_{\infty}(\Omega)} = \text{vraisup}_{(x, t) \in \Omega} |\psi(x, t)|$$

normuna sahip $\psi = \psi(x, t)$ fonksiyonlarının uzayıdır.

Tanım 3.5: $C^0([0, T], B)$, Banach uzayı olup elemanları $[0, T]$ aralığında sürekli olan ve değerlerini B Banach uzayından alan fonksiyonlar uzayıdır. Burada norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\|u\|_{C^0([0, T], B)} = \max_{t \in [0, T]} \|u\|_B.$$

Burada $B \equiv \mathbb{R}$ alınırsa $C[0, T] \equiv C^0([0, T]; \mathbb{R})$ elde edilir.

Tanım 3.6: $L_2([0, T], B)$, Banach uzayı olup elemanları $[0, T]$ aralığında ölçülebilir, karesel integrallenebilir ve değerleri B Banach uzayına ait olan fonksiyon uzayıdır. Burada norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\|u\|_{L_2([0, T], B)} = \left[\int_0^T \|u(\cdot, t)\|_B^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Tanım 3.7: $W_2^1(0, l)$, Hilbert uzayı olup elemanlarının kendisi ve onların birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(0, l)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle \psi, \phi \rangle_{W_2^1(0, l)} = \int_0^l \left(\psi(x) \bar{\phi}(x) + \frac{d\psi(x)}{dx} \frac{d\bar{\phi}(x)}{dx} \right) dx,$$

$$\|\psi\|_{W_2^1(0, l)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^1(0, l)}}.$$

$\overset{\circ}{W}_2^1(0, l)$ uzayı $W_2^1(0, l)$ uzayının alt uzayı olup, $(0, l)$ aralığının uç noktalarında sıfıra eşit olan fonksiyonların uzayıdır.

Tanım 3.8: $W_2^2(0, l)$, Hilbert uzayı olup elemanlarının kendisi ve onların ikinci mertebeye kadar genelleştirilmiş türevleri $L_2(0, l)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\langle \psi, \phi \rangle_{W_2^2(0, l)} = \int_0^l \left(\psi(x) \bar{\phi}(x) + \frac{d\psi(x)}{dx} \frac{d\bar{\phi}(x)}{dx} + \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} \frac{d^2\bar{\phi}(x)}{dx^2} \right) dx,$$

$$\|\psi\|_{W_2^2(0, l)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^2(0, l)}},$$

$$\overset{\circ}{W}_2^2(0, l) \equiv W_2^2(0, l) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(0, l).$$

Tanım 3.9: $W_2^{1,0}(\Omega_T)$, Hilbert uzayı olup elemanların kendisi ve onların x değişkenine göre 1. mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega_T)$ uzayından olan $\psi = \psi(x, t)$ fonksiyonlarının Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle \psi, \phi \rangle_{W_2^{1,0}(\Omega_T)} = \int_{\Omega_T} \left(\psi(x, t) \bar{\phi}(x, t) + \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \frac{\partial \bar{\phi}(x, t)}{\partial x} \right) dx dt,$$

$$\|\psi\|_{W_2^{1,0}(\Omega_T)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^{1,0}(\Omega_T)}}.$$

Tanım 3.10: $\overset{\circ}{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$ uzayı $W_2^{1,0}(\Omega_T)$ uzayının alt uzayı olup bu uzayda Ω_T 'nin sınırında sıfıra dönüşen düzgün fonksiyonlar her yerde yoğundur.

Tanım 3.11: $W_2^{0,1}(\Omega_T)$, Hilbert uzayı olup elemanların kendisi ve onların t değişkenine göre genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega_T)$ uzayından olan $\psi = \psi(x, t)$ fonksiyonlarının Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle \psi, \phi \rangle_{W_2^{0,1}(\Omega_T)} = \int_{\Omega_T} \left(\psi(x, t) \bar{\phi}(x, t) + \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \frac{\partial \bar{\phi}(x, t)}{\partial t} \right) dx dt,$$

$$\|\psi\|_{W_2^{0,1}(\Omega_T)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^{0,1}(\Omega_T)}}.$$

Tanım 3.12: $W_2^{2,1}(\Omega_T)$, Hilbert uzayı olup elemanların kendisi ve onların x değişkenine göre ikinci mertebeye, t değişkenine göre birinci mertebeye kadar genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega_T)$ uzayından olan $\psi = \psi(x, t)$ fonksiyonlarının Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned} \langle \psi, \phi \rangle_{W_2^{2,1}(\Omega_T)} = & \int_{\Omega_T} \left[\psi(x, t) \bar{\phi}(x, t) + \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x} \frac{\partial \bar{\phi}(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \bar{\phi}(x, t)}{\partial x^2} \right] dx dt \\ & + \int_{\Omega_T} \left[\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \frac{\partial \bar{\phi}(x, t)}{\partial t} \right] dx dt, \end{aligned}$$

$$\|\psi\|_{W_2^{2,1}(\Omega_T)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^{2,1}(\Omega_T)}},$$

burada $\overset{\circ}{W}_2^{2,1}(\Omega_T) = W_2^{2,1}(\Omega_T) \cap \overset{\circ}{W}_2^{1,0}(\Omega_T)$ dır.

Aynı biçimde $W_2^{1,0}(\Omega_L)$, $\overset{\circ}{W}_2^{1,0}(\Omega_L)$, $W_2^{2,1}(\Omega_L)$, $\overset{\circ}{W}_2^{2,1}(\Omega_L)$ Sobolev uzayları $\psi = \psi(x, z)$ fonksiyonları için tanımlanır.

Tanım 3.13: $W_2^{0,1,1}(\Omega)$ Hilbert uzayı olup elemanlarının kendisi ve t, z değişkenlerine göre birinci mertebeye kadar genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega)$ uzayından olan $\psi = \psi(x, t, z)$ fonksiyonlarının Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\langle \psi, \Phi \rangle_{W_2^{0,1,1}(\Omega)} = \int_{\Omega} \left(\psi \bar{\Phi} + \frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial z} \right) dx dt dz,$$

$$\|\psi\|_{W_2^{0,1,1}(\Omega)} = \sqrt{(\psi, \psi)_{W_2^{0,1,1}(\Omega)}};$$

Tanım 3.14: $W_2^{2,0,0}(\Omega)$, Hilbert uzayı olup elemanlarının kendisi ve x değişkenine göre ikinci mertebeye kadar genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega)$ uzayından olan $\psi = \psi(x, t, z)$ fonksiyonlarının Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\langle \psi, \Phi \rangle_{W_2^{2,0,0}(\Omega)} = \int_{\Omega} \left(\psi \bar{\Phi} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x^2} \right) dx dt dz,$$

$$\|\psi\|_{W_2^{2,0,0}(\Omega)} = \sqrt{(\psi, \psi)_{W_2^{2,0,0}(\Omega)}},$$

$$W_2^{2,1,1}(\Omega) \equiv W_2^{2,0,0}(\Omega) \cap W_2^{0,1,1}(\Omega).$$

Tanım 3.15: $\overset{\circ}{W}_2^{2,2,1}(\Omega)$ uzayı $W_2^{2,1,1}(\Omega)$, uzayının alt uzayı olup elemanları $S = \{(x, t, z): x = 0, l, t \in (0, T), z \in (0, L)\}$ bölgesinde sıfıra eşit olur.

Tanım 3.16: V, X lineer uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer $\forall u, v \in V$ ve $\alpha \in [0, 1]$ için $\alpha u + (1 - \alpha)v \in V$ oluyorsa, V kümesine X de konveks küme denir.

Tanım 3.17: Eğer B Banach uzayından olan $\{u_k\}$ dizisi için $\forall c \in B^*$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle c, u_k \rangle = \langle c, u \rangle$ şartı sağlanıyorsa, bu taktirde $\{u_k\}$ dizisi $u \in B$ noktasına zayıf yakınsıyor denir. Burada B^* uzayı B nin eşlenik uzayıdır.

Tanım 3.18: X , Banach uzayı ve $E \subset X$ olsun. Eğer $\{x_n\} \in E$ ve $\{x_n\}$ dizisi bir x elemanına zayıf yakınsadığında $x \in E$ ise E kümesine X de zayıf kapalıdır denir.

Tanım 3.19: X bir normlu uzay ve $E \subset X$ olsun. Eğer X in her bir x elemanı, E nin elemanlarının dizisinin bir limiti ise E ye X de yoğundur denir.

Tanım 3.20: U, B Banach uzayının bir kümesi olsun. Eğer $\forall \{u_k\} \in U$ dizisinden zayıf yakınsayan en azından bir alt dizi seçmek mümkün ise bu taktirde U kümesine B de zayıf kompakt küme denir.

Tanım 3.21: $J(u)$ fonksiyoneli B Banach uzayının U alt kümesinde tanımlanmış olsun. Eğer, $u \in U$ noktasına zayıf yakınsayan $\{u_k\} \in U$ dizisi için $\lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) \geq J(u)$ şartı sağlanıyorsa bu taktirde $J(u)$ fonksiyoneline u noktasında alttan zayıf yarı sürekli denir.

Tanım 3.22: F , bir I aralığı üzerinde tanımlı $f(t)$ fonksiyonlarının bir ailesi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $f \in F$ için $t_1, t_2 \in I$ olmak üzere $|t_1 - t_2| \leq \delta(\varepsilon)$ olduğunda $|f(t_1) - f(t_2)| \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa F ye I üzerinde aynı dereceden sürekli (eş sürekli) dir denir.

Tanım 3.23: Diyelim ki B herhangi Banach uzayı ve $J(u)$ fonksiyoneli u noktasının herhangi bir $\omega(u, \gamma) = \{v: v \in B, \|v - u\| < \gamma\}$ komşuluğunda tanımlanmış olsun. Eğer fonksiyonelin artışı için

$$\lim_{\|h\|_B \rightarrow 0} \frac{o(h, u)}{\|h\|_B} = 0$$

olacak şekilde $\Delta J(u) = J(u + h) - J(u) = \langle J'(u), h \rangle_B + o(h, u)$ şartını sağlayan $J'(u) \in B^*$ elemanı varsa, bu taktirde $J(u)$ fonksiyoneli u noktasında Freschet anlamında diferansiyellenebilir. Burada B^* uzayı B nin eşlenik uzayıdır.

3.2. Yöntem

Bu bölümde çalışma boyunca kullanacağımız teoremleri açıklayacağız.

Teorem 3.24: Diyelim ki U, B Banach uzayının konveks bir alt kümesi, $J(u)$ fonksiyoneli bu kümede 1.mertebeden sürekli türevlenebilir fonksiyonel ve $U_* = \left\{u \in U: J(u) = J_* = \inf_u J(u)\right\}$ kümesi $J(u)$ fonksiyonelinin minimum noktalar kümesi olsun. Bu taktirde $\forall u^* \in U_*$ için $\langle J'(u^*), u - u^* \rangle \geq 0$ şartı sağlanır.

Teorem 3.25 (Weierstrass teoremi): U, B Banach uzayında zayıf kompakt küme olsun. $J(u)$ fonksiyoneli ise bu kümede tanımlanan sonlu değerlere sahip ve alttan zayıf yarı sürekli olsun. Bu taktirde $J_* = \inf_u J(u) > -\infty$, $U_* = \{u \in U: J(u) = J_*\} \neq \emptyset$ zayıf kompakttır ve U dan olan herhangi minimalleştirici dizi minimum noktalar kümesine zayıf yakınsar.

Teorem 3.26 (Goebel teoremi): Kabul edelim ki, $\tilde{X}$ düzgün konveks uzay, U kümesi $\tilde{X}$ uzayının kapalı sınırlı kümesi, $I(v)$ fonksiyoneli U kümesi üzerinde tanımlanan alttan sınırlı ve alttan yarı sürekli fonksiyonel ve $\alpha > 0$, $\beta \geq 0$ verilen sayılar olsun. Bu taktirde $\tilde{X}$ uzayında her yerde yoğun olan öyle G alt kümesi vardır ki $\forall \omega \in G$ için $J_\alpha(v) = I(v) + \alpha \|v - \omega\|_{\tilde{X}}^\beta$ fonksiyoneli U kümesi üzerinde en küçük değerini alır. Eğer $\beta > 0$ ise $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli için en küçük değerini U kümesi üzerinde bir tek noktada alır.

Lemma 3.27 (Gronwall lemması): Farz edelim ki $\varphi(t)$, $b(t)$ fonksiyonları $t_0 \leq t \leq T$ aralığında tanımlı negatif olmayan sürekli fonksiyonlardır ve $a \geq 0$ sabittir. Bunların yanı sıra,

$$\varphi(t) \leq a \int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau + b(t), \quad t_0 \leq t \leq T$$

olsun. Bu taktirde,

$$0 \leq \varphi(t) \leq a \int_{t_0}^t b(\tau) e^{a(t-\tau)} d\tau + b(t), \quad t_0 \leq t \leq T$$

dir. Eğer $b(t) \equiv b = \text{sabit} \geq 0$ ise bu taktirde,

$$0 \leq \varphi(t) \leq be^{a(t-t_0)}, \quad t_0 \leq t \leq T$$

dir. Eğer,

$$\int_t^T \varphi(\tau) d\tau + b(t), \quad t_0 \leq t \leq T,$$

$$0 \leq \varphi(t) \leq a \int_t^T \varphi(\tau) d\tau + b(t), \quad t_0 \leq \varphi(t) \leq a,$$

$$t_0 \leq \varphi(t) \leq a \int_t^T \varphi(\tau) d\tau + b(t), \quad t_0 \leq t \leq T$$

ise bu taktirde,

$$0 \leq \varphi(t) \leq a \int_t^T b(\tau) e^{a(\tau-t)} d\tau + b(t), \quad t_0 \leq t \leq T$$

eşitsizliği geçerlidir. Eğer $b(t) \equiv b = \text{sabit} \geq 0$ ise

$$0 \leq \varphi(t) \leq be^{a(\tau-t)}, \quad t_0 \leq t \leq T$$

eşitsizliği geçerlidir.

Lemma 3.28 (Cauchy–Bunyakovski eşitsizliği): $u, v \in L_2(\Omega)$ elemanları için

$$\left| \int_{\Omega} u \bar{v} dx dt dz \right| \leq \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx dt dz \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |v|^2 dx dt dz \right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Lemma 3.29: Farz edelim ki B_0, B, B_1 Banach uzayları,

$$B_0 \subset B \subset B_1$$

şartlarını sağlayan üç uzay olsun. Burada B_0, B_1 uzayları refleksif Banach uzayları

$$B_0 \subset B$$

gömülmesi ise kompakt gömülme olsun, yani B_0, B ye kompakt gömülsün. Bunların yanı sıra;

$$W = \left\{ u : u \in L_{p_0}(0, T; B_0), \frac{du}{dt} \in L_{p_1}(0, T; B_1) \right\}, \quad 1 < p_j < +\infty, \quad j = 0, 1$$

olsun. Bu takdirde;

$$W \subset L_{p_0}(0, T; B)$$

gömülmesi kompakttır.

Tanım 3.30: $\forall \varepsilon > 0$ ve $\forall u, v \in \tilde{X}$ için $\|u\|_{\tilde{X}} \leq 1$, $\|v\|_{\tilde{X}} \leq 1$, $\|u - v\|_{\tilde{X}} > \varepsilon$ iken $\|u + v\|_{\tilde{X}} \leq 2(1 - \delta)$ olacak biçimde $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa, bu takdirde $\tilde{X}$ uzayına düzgün konveks uzay denir.

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

şartını sağlayan Hilbert uzayları düzgün konveks uzaylardır. Burada $\|\cdot\|$ normu $\langle \cdot, \cdot \rangle$ iç çarpımı ile verilen normdur. Bunun yanı sıra (a, b) aralığında tanımlı fonksiyonların $L_p(a, b)$, $1 < p < \infty$ Lebesgue uzayları da düzgün konveks uzaylardır.



4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

4.1. Problemin Konulması

Farz edelim ki, $l > 0, T > 0, L > 0$ verilen sayılar, $0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T, 0 \leq z \leq L, \Omega_t = (0, l) \times (0, t), \Omega_z = (0, l) \times (0, z), \Omega_{tz} = (0, l) \times (0, t) \times (0, z), \Omega = \Omega_{TL}, Q = (0, T) \times (0, L).$

Aşağıdaki optimal kontrol problemine bakalım.

$$J_\alpha(v) = \beta_0 \|\psi(\cdot, T, \cdot) - y_0\|_{L_2(\Omega_L)}^2 + \beta_1 \|\psi(\cdot, \cdot, L) - y_1\|_{L_2(\Omega_T)}^2 + \alpha \|v - \omega\|_H^2 \quad (4.1)$$

fonksiyonelinin

$$V \equiv \left\{ v = (v_0, v_1): v_m \in W_2^1(0, L), |v_m(z)| \leq b_m, \left| \frac{dv_m(z)}{dz} \right| \leq d_m, \forall z \in (0, L), m = 0, 1 \right\}$$

kümesi üzerinde

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \psi}{\partial t} + i a_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} - a_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + i a_2(x, z) \frac{\partial \psi}{\partial x} + a(x) \psi + v_0(z) \psi + i v_1(z) \psi = \\ = f(x, t, z), (x, t, z) \in \Omega \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\psi(x, 0, z) = \varphi_0(x, z), (x, z) \in \Omega_L \quad (4.3)$$

$$\psi(x, t, 0) = \varphi_1(x, t), (x, t) \in \Omega_T \quad (4.4)$$

$$\psi(0, t, z) = \psi(l, t, z) = 0, (t, z) \in Q_{TL} \quad (4.5)$$

şartları altında minimumunu bulmak gerekiyor olsun. Burada $i = \sqrt{-1}$ sanal birim, $T > 0, L > 0, l > 0, a_0 > 0, a_1 > 0, \alpha \geq 0, \beta_0 \geq 0, \beta_1 \geq 0, b_0 > 0, b_1 > 0, d_0 > 0, d_{10} > 0$ verilen sayılar, öyle ki, $\beta_0 + \beta_1 \neq 0; 0 \leq t \leq T, 0 \leq z \leq L, 0 \leq x \leq l, \Omega_t = (0, l) \times (0, t), \Omega_z = (0, l) \times (0, z), \Omega_{tz} = (0, l) \times (0, t) \times (0, z), \Omega = \Omega_{TL}, Q_{tz} = (0, t) \times (0, z)$ fonksiyonları reel değerli ölçülebilir sınırlı fonksiyonlar olup aşağıdaki şartları sağlar:

$$0 \leq a(x) \leq \mu_0, \overset{0}{\forall} x \in (0, l), \mu_0 = \text{const} > 0. \quad (4.6)$$

$$|a_2(x, z)| \leq \mu_1, \left| \frac{\partial a_2(x, z)}{\partial x} \right| \leq \mu_2, \left| \frac{\partial a_2(x, z)}{\partial z} \right| \leq \mu_3, \overset{0}{\forall} (x, z) \in \Omega_L,$$

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3 = \text{sabit} > 0. \quad (4.7)$$

$\varphi_0(x, z), \varphi_1(x, t), f(x, t, z), y_0(x, z), y_1(x, t)$ kompleks değerli fonksiyonlar olup aşağıdaki şartları sağlar:

$$\varphi_0 \in \overset{0}{W}_2^{2,1}(\Omega_L), \varphi_1 \in \overset{0}{W}_2^{2,1}(\Omega_T), f \in W_2^{0,1,1}(\Omega), \quad (4.8)$$

$$y_0 \in L_2(\Omega_L), y_1 \in L_2(\Omega_T); \quad (4.9)$$

$\omega = (\omega_0, \omega_1) \in H \equiv W_2^1(0, L) \times W_2^1(0, L)$ verilen eleman, $\overset{0}{\forall}$ işareti ‘hemen hemen’ demektir.

Her bir $v \in V$ için (4.2)-(4.5) şartlarından $\psi = \psi(x, t, z) \equiv \psi(x, t, z; v)$ fonksiyonunun bulunması problemi özel gradyent terimli durgun olmayan kuazi optik denklemi için birinci çeşit başlangıç sınır değer problemidir.

Tanım 1. Her bir $v \in V$ için (4.2)-(4.5) başlangıç sınır değer probleminin çözümü dendiğinde $\overset{0}{W}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayına ait olan ve (4.2)-(4.5) şartlarını hemen hemen $(x, t, z) \in \Omega$ için sağlayan, başka deyişle hemen hemen $(x, t, z) \in \Omega$ için (4.2) denklemini, $\overset{0}{\forall}(x, z) \in \Omega_L$, $\overset{0}{\forall}(x, t) \in \Omega_T$ için sırasıyla (4.3), (4.4) başlangıç değer şartlarını ve $\overset{0}{\forall}(t, z) \in Q$ için (4.5) sınır değer şartlarını sağlayan $\psi(x, t, z)$ fonksiyonu anlaşılmaktadır.

Söylemek gerekir ki, (4.2)-(4.5) biçiminde başlangıç sınır değer problemi ilk önce [17] çalışmasında ele alınmıştır ve problemin çözümünün varlığı ve tekliği teoremi ispatlanmıştır. Bu teoremin ispat metodini kullanarak kabullendiğimiz şartlar altında aşağıdaki teorem ispatlaya biliriz.

Teorem 1. Farz edelim ki, $a(x)$, $a_2(x, z)$, $\varphi_0(x, z)$, $\varphi_1(x, t)$, $f(x, t, z)$, fonksiyonları (4.6)-(4.8) şartlarını sağlasın. Bu taktirde her bir $v \in V$ için (4.2)-(4.5) başlangıç sınır değer probleminin $\overset{0}{W}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayına ait olan bir tek çözümü vardır ve çözüm aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\|\psi\|_{\overset{0}{W}_2^{2,1}(\Omega)}^2 \leq c_0 \left(\|\phi_0\|_{\overset{0}{W}_2^{2,1}(\Omega_L)}^2 + \|\phi_1\|_{\overset{0}{W}_2^{2,1}(\Omega_T)}^2 + \|f\|_{W_2^{0,1,1}(\Omega)}^2 \right). \quad (4.10)$$

Burada $c_0 > 0$ sabiti ϕ_0 , ϕ_1 ve f ’den bağımsızdır.

Bu teoremden ve $\overset{0}{W}_2^{2,1}(\Omega) \subset C^0([0, T], L_2(\Omega_L))$, $\overset{0}{W}_2^{2,1}(\Omega) \subset C^0([0, L], L_2(\Omega_T))$ gömülme şartlarından söz konusu fonksiyonelin (4.2)-(4.5) başlangıç sınır değer probleminin çözümler sınıfında anlamı olduğu görülmektedir.

4.2. Optimal Kontrol Probleminin Çözümünün Varlığı ve Tekliği

Bu bölümde ilk önce (4.1)-(4.5) optimal kontrol probleminin $\alpha > 0$ şartı altında çözümünün varlığı ve tekliği teoremini ispatlayalım. Bu amaçla konveks olmayan optimizasyon problemlerinin çözümünün varlığı ve tekliği hakkındaki teoremden (kuramsal temeller teorem 2.26) yararlanarak (4.1)-(4.5) optimal kontrol problemi için aşağıdaki teoremi ispatlayalım.

Teorem 2. Teorem 1' in şartları sağlansın. Bunların yanı sıra $y_0(x, z)$, $y_1(x, t)$ fonksiyonları (4.9) şartlarını sağlasın ve $\omega \in H$ verilen eleman olsun. Bu taktirde H uzayında her yerde yoğun olan öyle G alt kümesi var ki, herhangi $\omega \in G$ ve $\alpha > 0$ için (4.1)-(4.5) optimal kontrol probleminin bir tek çözümü vardır.

İspat. İlk önce

$$J_0(v) = \beta_0 \|\psi(\cdot, T, \cdot) - y_0\|_{L_2(\Omega_L)}^2 + \beta_1 \|\psi(\cdot, \cdot, L) - y_1\|_{L_2(\Omega_T)}^2 \quad (4.11)$$

fonksiyonelinin V kümesi üzerinde sürekli olduğunu gösterelim. Farz edelim ki, $\Delta v \in B = W_\infty^1(0, l) \times W_\infty^1(0, l)$ artışı herhangi $v \in V$ elemanına verilen artış olsun, öyle ki $v + \Delta v \in V$ şartı sağlansın. Bu taktirde $\Delta\psi = \Delta\psi(x, t, z) \equiv \psi(x, t, z; v + \Delta v) - \psi(x, t, z; v)$ olsun. Burada $\psi(x, t, z; v)$ fonksiyonu (4.2)-(4.5) başlangıç sınır değer probleminin $v \in V$ 'ye karşılık gelen çözümüdür. (4.2)-(4.5) şartlarından kolaylıkla $\Delta\psi = \Delta\psi(x, t, z)$ fonksiyonunun aşağıdaki başlangıç sınır değer probleminin çözümü olduğu çıkar:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} + i a_0 \frac{\partial \Delta\psi}{\partial z} - a_1 \frac{\partial^2 \Delta\psi}{\partial x^2} + i a_2(x, z) \frac{\partial \Delta\psi}{\partial x} + a(x) \Delta\psi + (v_0(z) + \Delta v_0(z)) \Delta\psi + \\ + i(v_1(z) + \Delta v_1(z)) \Delta\psi = -\Delta v_0(z) \psi - i \Delta v_1(z) \psi, \quad (x, t, z) \in \Omega \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\Delta\psi(x, 0, z) = 0, \quad (x, z) \in \Omega_L, \quad \Delta\psi(x, t, 0) = 0, \quad (x, t) \in \Omega_T \quad (4.13)$$

$$\Delta\psi(0, t, z) = \Delta\psi(l, t, z) = 0, \quad (t, z) \in Q \quad (4.14)$$

Bu problemin çözümünü değerlendirmeğe çalışalım. Bu amaçla (4.12) denkleminin her iki tarafını $\Delta\bar{\psi} = \Delta\bar{\psi}(x, t, z)$ fonksiyonuna çarpıp elde edilen eşitliği Ω_{tz} bölgesi üzerinden integralleyelim. Elde edilen eşitlikte kısmi integrasyon formülünü uygulayarak aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_{tz}} \left(i \frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} \Delta \bar{\psi} + i a_0 \frac{\partial \Delta \psi}{\partial z} \Delta \bar{\psi} + a_1 \left| \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} \right|^2 + i a_2(x, \theta) \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} \Delta \bar{\psi} + a(x) |\Delta \psi|^2 \right) dx d\tau d\theta + \\
& + \int_{\Omega_{tz}} \left((v_0(\theta) + \Delta v_0(\theta)) |\Delta \psi|^2 + i(v_1(\theta) + \Delta v_1(\theta)) |\Delta \psi|^2 \right) dx d\tau d\theta = \\
& = - \int_{\Omega_{tz}} \Delta v_0(\theta) \psi \Delta \bar{\psi} dx d\tau d\theta - i \int_{\Omega_{tz}} \Delta v_1(\theta) \psi \Delta \bar{\psi} dx d\tau d\theta \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall z \in [0, L].
\end{aligned}$$

Bu eşitlikten onun kompleks eşleniğini çıkartırsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_{tz}} \frac{\partial}{\partial t} |\Delta \psi|^2 dx d\tau d\theta + a_0 \int_{\Omega_{tz}} \frac{\partial}{\partial z} |\Delta \psi|^2 dx d\tau d\theta + \int_{\Omega_{tz}} a_2(x, \theta) \frac{\partial}{\partial x} |\Delta \psi|^2 dx d\tau d\theta = \\
& = -2 \int_{\Omega_{tz}} (v_1(\theta) + \Delta v_1(\theta)) |\Delta \psi|^2 dx d\tau d\theta - 2 \int_{\Omega_{tz}} \Delta v_0(\theta) \operatorname{Im}(\psi \Delta \bar{\psi}) dx d\tau d\theta - \\
& -2 \int_{\Omega_{tz}} \Delta v_1(\theta) \operatorname{Re}(\psi \Delta \bar{\psi}) dx d\tau d\theta, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall z \in [0, L]
\end{aligned}$$

Bu eşitliğin her iki tarafına $\int_{\Omega_{tz}} \frac{\partial a_2(x, \theta)}{\partial x} |\Delta \psi|^2 dx d\tau d\theta$ terimini ekleyerek aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_{tz}} \frac{\partial}{\partial t} |\Delta \psi|^2 dx d\tau d\theta + a_0 \int_{\Omega_{tz}} \frac{\partial}{\partial z} |\Delta \psi|^2 dx d\tau d\theta + \int_{\Omega_{tz}} \frac{\partial}{\partial x} (a_2(x, \theta) |\Delta \psi|^2) dx d\tau d\theta = \\
& = -2 \int_{\Omega_{tz}} (v_1(\theta) + \Delta v_1(\theta)) |\Delta \psi|^2 dx d\tau d\theta - 2 \int_{\Omega_{tz}} \Delta v_0(\theta) \operatorname{Im}(\psi \Delta \bar{\psi}) dx d\tau d\theta - \\
& -2 \int_{\Omega_{tz}} \Delta v_1(\theta) \operatorname{Re}(\psi \Delta \bar{\psi}) dx d\tau d\theta + \\
& + \int_{\Omega_{tz}} \frac{\partial a_2(x, \theta)}{\partial x} |\Delta \psi|^2 dx d\tau d\theta, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall z \in [0, L].
\end{aligned}$$

(4.14) sınır değer şartlarına göre bu eşitliğin sol tarafının üçüncü terimi sıfıra eşit olur. Bu taktirde sonuncu eşitlikten (4.7), $v + \Delta v \in V$, (4.13) şartlarına göre Cauchy-Bunyakowski eşitsizliğinin yardımıyla kolaylıkla aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\begin{aligned}
& \|\Delta \psi(\cdot, t, \cdot)\|_{L_2(\Omega_L)}^2 + a_0 \|\Delta \psi(\cdot, \cdot, z)\|_{L_2(\Omega_T)}^2 \leq c_1 \int_{\Omega_{tz}} |\Delta \psi|^2 dx d\tau d\theta + \\
& + (\|\Delta v_0\|_{L_2(0, L)}^2 + \|\Delta v_1\|_{L_2(0, L)}^2) \|\psi\|_{C([0, L]; L_2(\Omega_T))}^2, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall z \in [0, L]
\end{aligned}$$

Buradan (4.10) kestiriminin ve

$$\|\psi\|_{C([0, L]; L_2(\Omega_T))}^2 \leq c_2 \|\psi\|_{W_2^{2,1,1}(\Omega)}^2$$

eşitsizliğinin yardımıyla aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\begin{aligned} & \|\Delta\psi(\cdot, t, \cdot)\|_{L_2(\Omega_L)}^2 + a_0 \|\Delta\psi(\cdot, \cdot, z)\|_{L_2(\Omega_T)}^2 \leq c_1 \int_{\Omega_{tz}} |\Delta\psi|^2 dx d\tau d\theta + \\ & + c_3 (\|\Delta v_0\|_{L_2(0,L)}^2 + \|\Delta v_1\|_{L_2(0,L)}^2), \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall z \in [0, L] \end{aligned}$$

Bu eşitsizliğe iki kez Gronwall lemmasını uygulayarak aşağıdaki kestirimin geçerli olduğunu buluruz:

$$\begin{aligned} & \|\Delta\psi(\cdot, t, \cdot)\|_{L_2(\Omega_L)}^2 + \|\Delta\psi(\cdot, \cdot, z)\|_{L_2(\Omega_T)}^2 \leq c_4 (\|\Delta v_0\|_{L_2(0,L)}^2 + \|\Delta v_1\|_{L_2(0,L)}^2), \\ & \forall t \in [0, T], \quad \forall z \in [0, L]. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Burada $c_4 > 0$ sabiti t, z, Δ 'dan bağımsızdır. Bu kestirimden ve H uzayında normun tanımından aşağıdaki kestirimi de buluruz:

$$\|\Delta\psi(\cdot, t, \cdot)\|_{L_2(\Omega_L)}^2 + \|\Delta\psi(\cdot, \cdot, z)\|_{L_2(\Omega_T)}^2 \leq c_5 \|\Delta v\|_H^2, \quad \forall t \in [0, T], \quad \forall z \in [0, L] \quad (4.16)$$

Burada $c_5 > 0$ -sabiti $t, z, \Delta v$ 'den bağımsızdır.

Şimdi $J_0(v)$ fonksiyonelinin $v \in V$ elemanı üzerinde artışına bakalım. (4.11) formülünden yararlanarak $J_0(v)$ fonksiyonelinin artışını aşağıdaki gibi gösterebiliriz:

$$\begin{aligned} \Delta J_0(v) &= J_0(v + \Delta v) - J_0(v) = \\ &= 2\beta_0 \int_{\Omega_L} \text{Re}[(\psi(x, T, z) - y_0(x, z))\Delta\bar{\psi}(x, T, z)] dx dz + \\ &+ 2\beta_1 \int_{\Omega_T} \text{Re}[(\psi(x, t, L) - y_1(x, t))\Delta\bar{\psi}(x, t, L)] dx dt + \beta_0 \|\Delta\psi(\cdot, T, \cdot)\|_{L_2(\Omega_L)}^2 + \\ &+ \beta_1 \|\Delta\psi(\cdot, \cdot, L)\|_{L_2(\Omega_T)}^2, \quad \forall v \in V. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Buradan (4.10), (4.16) kestirimlerine ve (4.9) şartına göre aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$|\Delta J_0(v)| \leq c_6 (\|\Delta v\|_H + \|\Delta v\|_H^2), \quad \forall v \in V.$$

Burada $c_6 > 0$ sabiti Δv 'den bağımsızdır. Bu eşitsizlikten aşağıdaki limit bağıntısının geçerli olduğunu elde ederiz:

$$\|\Delta v\|_B \rightarrow 0 \text{ iken } |\Delta J_0(v)| \rightarrow 0, \quad \forall v \in V.$$

Bu limit bağıntısından $J_0(v)$ fonksiyonelinin V kümesi üzerinde sürekli olduğu çıkar. $J_0(v) \geq 0, \forall v \in V$ şartından $J_0(v)$ fonksiyonelinin V kümesi üzerinde artan sınırlı olduğu elde edilir. Bunun yanı sıra kolaylıkla ispatlanabilir ki, V kümesi $H \equiv W_2^1(0, L) \times W_2^1(0, L)$ düzgün konveks uzayının (bak: kuramsal temeller, tanım 2.30) kapalı sınırlı konveks kümesidir. Bu taktirde kuramsal temellerdeki teorem 2.26'nın tüm

şartlarının sağlandığını hükmedebiliriz. Bu teoremin hükmüne göre diyebiliriz ki, $H \equiv W_2^1(0, L) \times W_2^1(0, L)$ düzgün konveks uzayının orada her yerde yoğun olan G alt kümesi var ki, herhangi $\omega \in G$ ve $\alpha > 0$ için (4.1)-(4.5) optimal kontrol probleminin bir tek çözümü vardır. 2. Teorem ispatlandı.

Bu teorem gösterir ki, $\alpha > 0$ olduğunda (4.1)-(4.5) optimal kontrol probleminin bir tek çözümü herhangi $\omega \in H$ için olmayabilir, yalnız G kümesinden olan herhangi ω için bir tek çözüm vardır. Ancak aşağıdaki teorem gösterecek ki, herhangi $\omega \in H$ için $\alpha \geq 0$ olduğunda (4.1)-(4.5) optimal kontrol probleminin en az bir çözümü vardır.

Teorem 3. Ferz edelim ki, teorem 3'ün şartları sağlansın. Bu taktirde herhangi $\omega \in H$ için $\alpha \geq 0$ olduğunda (4.1)-(4.5) optimal kontrol probleminin en az bir çözümü vardır.

İspat. Herhangi $\{v^k\} \subset V$ minimalleştirici dizisini alalım:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J_\alpha(v^k) = J_{\alpha*} = \inf_{v \in V} J_\alpha(v).$$

Farz edelim ki $\psi_k = \psi_k(x, t, z) \equiv \psi(x, t, z; v^k)$, $k = 1, 2, \dots$ olsun. 1. Teoreme göre her bir $v^k \subset V$ için (4.2)-(4.5) başlangıç sınır değer probleminin $\overset{\circ}{W}_2^{2,1,1}(0, l)$ uzayına ait olan bir tek çözümü vardır ve çözüm için aşağıdaki kestirim geçerlidir

$$\|\psi_k\|_{W_2^{2,1,1}(\Omega)}^2 \leq c_0 \left(\|\phi_0\|_{W_2^{2,1}(\Omega_L)}^2 + \|\phi_1\|_{W_2^{2,1}(\Omega_T)}^2 + \|f\|_{W_2^{0,1,1}(\Omega)}^2 \right), \quad k = 1, 2, \quad (4.18)$$

Burada sağ taraf k 'dan bağımsızdır.

V kümesi B banach uzayının kapalı sınırlı ve konveks kümesi olduğundan $\{v^k\} \subset V$ dizisinden $\{v^{k_l}\}$ alt dizisini seçebiliriz ki, bu alt dizi (*) zayıf yakınsar. Bu alt diziyi kolaylık olsun diye yeniden $\{v^k\}$ ile işaretlersek, aşağıdaki limit bağıntısını yazabiliriz: $k \rightarrow \infty$ için

$$v_m^k \rightarrow v_m, \quad m = 0, 1, \quad L_\infty(0, L)' \text{de } (*) \text{ zayıf}, \quad (4.19)$$

$$\frac{dv_m^k}{dz} \rightarrow \frac{dv_m}{dz}, \quad m = 0, 1, \quad L_\infty(0, L)' \text{de } (*) \text{ zayıf}, \quad (4.20)$$

Diğer taraftan B Banach uzayında kapalı konveks V kümesi bu uzayda (*) zayıf kapalıdır. Bu nedenle $v \in V$ olacaktır. Gömülme teoremine göre $W_\infty^1(0, L)$ uzayı $C[0, L]$ uzayına kompakt gömüldüğünden aşağıdaki limit bağıntısını yazabiliriz: $k \rightarrow \infty$ için

$$v_m^k \rightarrow v_m, \quad m = 0, 1, \quad C(0, L)' \text{de } (*) \text{ kuvvetli}. \quad (4.21)$$

Başka değişle $\{v_m^k(z)\}, m = 0,1$ dizileri $v_m(z), m = 0,1$ fonksiyonlarına $[0, L]$ kapalı aralığında düzgün yakınsar. Bu taktirde aşığıdaki limit bağıntılarını yazabiliriz: $k \rightarrow \infty$ için

$$\int_0^L v_m^k(z) q(z) dz \rightarrow \int_0^L v_m(z) q(z) dz, \quad m = 0,1, \quad \forall q \in L_1(0, L), \quad (4.22)$$

(4.18) kestiriminden $\{\psi_k(x, t, z)\}$ dizisinin $\overset{\circ}{W}_2^{2,1,1}(\Omega)$ uzayında düzgün sınırlı olduğu çıkar. Bu taktirde $\{\psi_k(x, t, z)\}$ dizisinden $W_2^{2,1,1}(\Omega)$ uzayında zayıf yakınsayan alt diziyi seçebiliriz. Kolaylık olsun diye bu al diziyi yeniden $\{\psi_k(x, t, z)\}$ dizisi ile gösterelim. Bu durumda aşığıdaki limit bağıntısını yazabiliriz: $k \rightarrow \infty$ için

$$\psi_k \rightarrow \psi, \quad W_2^{2,1,1}(\Omega)' \text{de zayıf.} \quad (4.23)$$

$\overset{\circ}{W}_2^{2,1,1}(\Omega)$ uzayının $L_2(\Omega)$ uzayına kompakt gömüldüğünü dikkate alırsak aşığıdaki limit bağıntısını elde ederiz: $k \rightarrow \infty$ için

$$\psi_k \rightarrow \psi, \quad L_2(\Omega)' \text{de kuvvetli.} \quad (4.24)$$

(4.21)-(4.24) limit bağıntılarından yararlanarak herhangi $\eta \in L_2(\Omega)$ ve $k \rightarrow \infty$ için

$$\int_{\Omega} \left(i \frac{\partial \psi_k}{\partial t} + i a_0 \frac{\partial \psi_k}{\partial z} - a_1 \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x^2} + i a_2(x, z) \frac{\partial \psi_k}{\partial x} + a(x) \psi_k + v_0^k(z) \psi_k + i v_1^k(z) \psi_k - f(x, t, z) \right) \bar{\eta}(x, t, z) dx dt dz = 0$$

integral özdeşliğinde limite geçerse, kolaylıkla herhangi $\eta \in L_2(\Omega)$ için aşığıdaki integral özdeşliğin geçerli olduğunu elde ederiz.

$$\int_{\Omega} \left(i \frac{\partial \psi}{\partial t} + i a_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} - a_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + i a_2(x, z) \frac{\partial \psi}{\partial x} + a(x) \psi + v_0(z) \psi + i v_1(z) \psi - f(x, t, z) \right) \bar{\eta}(x, t, z) dx dt dz = 0.$$

Buradan da $W_2^{2,1,1}(\Omega)$ uzayından olan $\psi(x, t, z)$ limit fonksiyonunun $\overset{0}{\forall}(x, t, z) \in \Omega$ için (4.2) denklemini sağladığını göstermiş oluruz.

$\overset{\circ}{W}_2^{2,1,1}(\Omega)$ uzayının $L_2(Q; C[0, l])$ uzayına kompakt gömülmesinden aşığıdaki limit bağıntısını yazabiliriz:

$$k \rightarrow \infty \text{ için } \|\psi_k(s, \dots) - \psi(s, \dots)\|_{L_2(Q)} \rightarrow 0, \quad s = 0, l. \quad (4.25)$$

Bu limit bağıntılarını ve $\psi_k(0, t, z) = \psi_k(l, t, z) = 0$, $(t, z) \in Q$, $k = 1, 2, \dots$ sınır değer şartlarını dikkate alırsak, kolaylıkla

$$\|\psi(s, \dots)\|_{L_2(Q)} \leq \|\psi(s, \dots) - \psi_k(s, \dots)\|_{L_2(Q)} + \|\psi_k(s, \dots)\|_{L_2(Q)}, \quad s = 0, l$$

eşitsizliklerinden $\psi(x, t, z)$ limit fonksiyonunun (4.5) sınır değer şartlarını hemen hemen her $(t, z) \in Q$ için sağladığını ispatlamış oluruz.

Şimdi $\psi(x, t, z)$ limit fonksiyonunun (4.3) ve (4.4) başlangıç değer şartlarını sağladığını gösterelim. $\{\psi_k\} \in \overset{\circ}{W}_2^{2,1}(\Omega)$ dizisinin aşağıdaki bağıntıları sağladığı açıktır:

$$\psi_k \in L_2\left(0, T; \overset{\circ}{W}_2^{2,1}(\Omega_L)\right), \quad \frac{\partial \psi_k}{\partial t} \in L_2(0, T; L_2(\Omega_L)). \quad (4.26)$$

Diğer taraftan, (4.23) limit bağıntısından yararlanırsak aşağıdaki limit bağıntılarını yazabiliriz: $k \rightarrow \infty$ için

$$\psi_k \rightarrow \psi, \quad L_2\left(0, T; \overset{\circ}{W}_2^{2,1}(\Omega_L)\right)' \text{de zayıf}. \quad (4.27)$$

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad L_2(0, T; L_2(\Omega_L))' \text{de zayıf}. \quad (4.28)$$

Bu limit bağıntılarından ve gömülme lemmasından (bak: kuramsal temeller, lemma 2.29) yararlanarak aşağıdaki limit bağıntısını yazabiliriz: $k \rightarrow \infty$ için

$$\|\psi_k(\cdot, t, \cdot) - \psi(\cdot, t, \cdot)\|_{L_2(\Omega_L)} \rightarrow 0, \quad \forall t \in [0, T], \quad (4.29)$$

Aynı biçimde kolaylıkla aşağıdaki limit bağıntısını da elde edebiliriz: $k \rightarrow \infty$ için

$$\|\psi_k(\cdot, \cdot, z) - \psi(\cdot, \cdot, z)\|_{L_2(\Omega_T)} \rightarrow 0, \quad \forall z \in [0, L] \quad (4.30)$$

(4.29), (4.30) limit bağıntılarından ve

$$\psi_k(x, 0, z) = \phi_0(x, z), \quad (x, z) \in \Omega_L, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.31)$$

$$\psi_k(x, t, 0) = \phi_1(x, t), \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad k = 1, 2, \dots \quad (4.32)$$

başlangıç değer şartlarından yararlanarak $k \rightarrow \infty$ için

$$\|\psi(\cdot, 0, \cdot) - \phi_0\|_{L_2(\Omega_L)} \leq \|\psi(\cdot, 0, \cdot) - \psi_k(\cdot, 0, \cdot)\|_{L_2(\Omega_L)} + \|\psi_k(\cdot, 0, \cdot) - \phi_0\|_{L_2(\Omega_L)},$$

$$\|\psi(\cdot, \cdot, 0) - \phi_1\|_{L_2(\Omega_T)} \leq \|\psi(\cdot, \cdot, 0) - \psi_k(\cdot, \cdot, 0)\|_{L_2(\Omega_T)} + \|\psi_k(\cdot, \cdot, 0) - \phi_1\|_{L_2(\Omega_T)},$$

eşitsizliklerinde limite geçerse aşağıdaki bağıntıların geçerli olduğunu elde ederiz:

$$\|\psi(\cdot, 0, \cdot) - \phi_0\|_{L_2(\Omega_L)} = 0, \quad \|\psi(\cdot, \cdot, 0) - \phi_1\|_{L_2(\Omega_T)} = 0. \quad (4.33)$$

Bu bağıntılardan $\psi(x, t, z)$ limit fonksiyonunun (4.3) ve (4.4) başlangıç değer şartlarını sırasıyla sağladığını hemen hemen $(x, z) \in \Omega_L$, hemen hemen $(x, t) \in \Omega_T$ için sağladığını göstermiş oluruz. Böylelikle, $\psi = \psi(x, t, z)$ limit fonksiyonunun (4.2)-(4.5) başlangıç sınır değer probleminin $\{v^k\} \subset V$ dizisinin limit fonksiyonu olan $v \in V'$ ye

karşılık gelen $\overset{\circ}{W}_2^{2,1,1}(\Omega)$ uzayına ait olan çözümü olduğunu göstermiş olduk, başka deyişle $\psi = \psi(x, t, z) \equiv \psi(x, t, z; v)$ dir. 1. Teorem'e göre bu çözüm bir tektir. Diğer taraftan, bu limit fonksiyonu için (4.10) kestirimi de geçerlidir. Gerçekten, (4.18) kestiriminde $\psi(x, t, z)$ fonksiyonuna zayıf yakınsayan $\{\psi_k(x, t, z)\}$ alt dizisi üzerinden $k \rightarrow \infty$ için alt limite geçerek (4.10) kestirimini elde ederiz. (4.19), (4.20), (4.29), (4.30) limit bağıntılarına ve $L_2(\Omega_L), L_2(\Omega_T), H$ uzaylarında normların alttan zayıf yarı sürekli olduğuna göre $\alpha \geq 0$ ve $\forall \omega \in H$ için kolaylıkla aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz:

$$J_{\alpha*} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} J_{\alpha}(v^k) = \inf_{v \in V} J_{\alpha}(v) = J_{\alpha*}.$$

Bu ise $\{v^k\} \subset V$ alt dizisinin limiti olan $v \in V$ elemanının $J_{\alpha}(v)$ fonksiyoneline V kümesi üzerinde minimum değer veren eleman olduğunu anlamına gelir, başka bir deyişle $v \in V$ kontrolü (4.1)-(4.5) optimal kontrol probleminin çözümüdür. Teorem 3 ispatlandı.

4.3. Fonksiyonelin Diferansiyellenebilirliği ve Optimal Kontrol Probleminin Çözümü için Gerek Şart

Bu bölümde (4.1)-(4.5) optimal kontrol probleminin çözümü için gerek şart sorusunun cevabını araştıracağız.

Farz edelim ki, $\phi = \phi(x, t, z)$ fonksiyonu aşağıdaki eşlenik problemin çözümü olsun:

$$i \frac{\partial \phi}{\partial t} + i a_0 \frac{\partial \phi}{\partial z} - a_1 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + i \frac{\partial}{\partial x} (a_2(x, z) \phi) + a(x) \phi + v_0(z) \phi - i v_1(z) \phi = 0, \\ (x, t, z) \in \Omega, \quad (4.34)$$

$$\phi(x, T, z) = -2i \beta_0 (\psi(x, T, z) - y_0(x, z)), \quad (x, z) \in \Omega_L, \quad (4.35)$$

$$\phi(x, t, L) = -2i \frac{\beta_1}{a_0} (\psi(x, t, L) - y_0(x, t)), \quad (x, t) \in \Omega_T \quad (4.36)$$

$$\phi(0, t, z) = \phi(l, t, z) = 0, \quad (t, z) \in Q \quad (4.37)$$

Burada $\psi = \psi(x, t, z) \equiv \psi(x, t, z; v)$ fonksiyonu (4.2)-(4.5) başlangıç sınır değer probleminin $v \in V$ 'ye karşılık gelen çözümüdür.

Tanım 2. (4.34)-(4.35) eşlenik probleminin çözümü dendiğinde $B_0 \equiv C^0([0, T], L_2(\Omega_0)) \cap C^0([0, L], L_2(\Omega_T))$ uzayına ait olan ve $\eta_1(x, 0, z) = 0, (x, z) \in \Omega_L, \eta_1(x, t, 0) = 0, (x, t) \in \Omega_T$ şartlarını sağlayan herhangi $\eta_1 \in \overset{\circ}{W}_2^{1,1,2}(\Omega)$ için

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \phi(x, t, z) \left[-i \frac{\partial \bar{\eta}_1}{\partial t} - a_0 \frac{\partial \bar{\eta}_1}{\partial z} - a_1 \frac{\partial^2 \bar{\eta}_1}{\partial x^2} - i a_2(x, z) \frac{\partial \bar{\eta}_1}{\partial x} + a(x) \bar{\eta}_1 + v_0(z) \bar{\eta}_1 \right. \\
& \quad \left. - i v_1(z) \bar{\eta}_1 \right] dx dt dz = \\
& = -2\beta_0 \int_{\Omega_L} (\psi(x, T, z) - y_0(x, z)) \bar{\eta}_1(x, T, z) dx dz - \\
& -2\beta_1 \int_{\Omega_T} (\psi(x, t, L) - y_1(x, t)) \bar{\eta}_1(x, t, L) dx dt \tag{4.38}
\end{aligned}$$

integral özdeşliğini sağlayan $\varphi = \varphi(x, t, z)$ fonksiyonunu anlayacağız.

$\tau = T - t$, $\theta = L - z$ değişken dönüşümlerini yardımıyla (4.34)-(4.37) eşlenik problemini (4.2)-(4.5) biçiminde başlangıç sınır değer problemine dönüştürebiliriz. Bu nedenle 1. teoremin ispat metodunu ve [9,15] çalışmalarından bildiğimiz verilerin düzgünleştirilmesi metodlarından yararlanarak aşağıdaki teoremi ispatlayabiliriz.

Teorem 4. Farz edelim ki, 1.Teorem' in şartları sağlansın ve $y_0(x, z), y_1(x, t)$ fonksiyonları için (4.9) şartları geçerli olsun. Bu taktirde (4.34)-(4.37) eşlenik probleminin $B_0 \equiv C^0([0, T], L_2(\Omega_0)) \cap C^0([0, L], L_2(\Omega_T))$ uzayına ait olan bir tek çözümü vardır ve çözüm için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\begin{aligned}
& \|\phi(\cdot, t, \cdot)\|_{L_2(\Omega_L)}^2 + \|\phi(\cdot, \cdot, z)\|_{L_2(\Omega_T)}^2 \leq \\
& \leq c_7 (\|\psi(\cdot, T, \cdot) - y_0\|_{L_2(\Omega_L)}^2 + \|\psi(\cdot, \cdot, L) - y_1\|_{L_2(\Omega_T)}^2), \\
& \forall t \in [0, T], \quad \forall z \in [0, L]. \tag{4.39}
\end{aligned}$$

Şimdi (4.1)-(4.5) optimal kontrol probleminde, çözüm için gerek şartı elde etmek için ilk önce $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin birinci varyasyonu için formül elde etmeğe çalışalım.

Teorem 5. Farz edelim ki 4.Teorem'in şartları sağlansın ve $\omega \in H$ verilen eleman olsun. Bu taktirde $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli V kümesi üzerinde diferansiyellenebilirdir ve onun birinci varyasyonu için $B = W_\infty^1(0, L) \times W_\infty^1(0, L)$ uzayından olan herhangi $w = w(z)$ fonksiyonu için aşağıdaki formül geçerlidir:

$$\delta J_\alpha(v, w) = \int_0^L \left[\int_{\Omega_T} \operatorname{Re} (\psi(x, t, z) \bar{\phi}(x, t, z)) dx dt \right] w_0(z) dz -$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^L \left[\int_{\Omega_T} \operatorname{Im} \left(\psi(x, t, z) \bar{\phi}(x, t, z) \right) dx dt \right] w_1(z) dz + \\
& + 2\alpha \int_0^L (v_0(z) - \omega_0(z)) w_0(z) dz + 2\alpha \int_0^L (v_1(z) - \omega_1(z)) w_1(z) dz + \\
& + 2\alpha \int_0^L \left(\frac{dv_0(z)}{dz} - \frac{d\omega_0(z)}{dz} \right) \frac{dw_0(z)}{dz} dz + \\
& + 2\alpha \int_0^L \left(\frac{dv_1(z)}{dz} - \frac{d\omega_1(z)}{dz} \right) \frac{dw_1(z)}{dz} dz. \tag{4.40}
\end{aligned}$$

Burada $\psi(x, t, z) \equiv \psi(x, t, z; v)$, $\phi(x, t, z) \equiv \phi(x, t, z; v)$ fonksiyonları sırasıyla (4.2)-(4.5) başlangıç sınır değer ve (4.34)-(4.37) eşlenik problemlerinin $v \in V$ ye karşılık gelen çözümleridir.

İspat. (4.1) ve (4.17) formüllerinden yaralanarak $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli için herhangi $v \in V$ elemanı üzerindeki artışı aşağıdaki biçimde yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
\Delta J_\alpha(v) &= J_\alpha(v + \Delta v) - J_\alpha(v) = \\
&= 2\beta_0 \int_{\Omega_L} \operatorname{Re}[(\psi(x, T, z) - y_0(x, z)) \Delta \bar{\psi}(x, T, z)] dx dz + \\
&+ 2\beta_1 \int_{\Omega_T} \operatorname{Re}[(\psi(x, t, L) - y_1(x, t)) \Delta \bar{\psi}(x, t, L)] dx dt + \\
&+ 2\alpha \int_0^L (v_0(z) - \omega_0(z)) \Delta v_0(z) dz + 2\alpha \int_0^L (v_1(z) - \omega_1(z)) \Delta v_1(z) dz + \\
&+ 2\alpha \int_0^L \left(\frac{dv_0(z)}{dz} - \frac{d\omega_0(z)}{dz} \right) \frac{d\Delta v_0(z)}{dz} dz + 2\alpha \int_0^L \left(\frac{dv_1(z)}{dz} - \frac{d\omega_1(z)}{dz} \right) \frac{d\Delta v_1(z)}{dz} dz \\
&+ \alpha \|\Delta v\|_H^2 + \beta_0 \|\Delta \psi(\cdot, T, \cdot)\|_{L_2(\Omega_L)}^2 + \beta_1 \|\Delta \psi(\cdot, \cdot, L)\|_{L_2(\Omega_T)}^2, \quad \forall v \in V. \tag{4.41}
\end{aligned}$$

Burada $\Delta \psi = \Delta \psi(x, t, z)$ (4.12)-(4.14) başlangıç sınır değer probleminin çözümüdür. Bu formülün sağ tarafındaki birinci ve ikinci terimlerin toplamını dönüştürelim.

$\Delta \psi \in W_2^{2,1,1}(\Omega)$ fonksiyonu (4.12)-(4.14) başlangıç sınır değer probleminin çözümü olduğundan herhangi $\eta \in L_2(\Omega)$ fonksiyonu için aşağıdaki integral özdeşliğini sağlar:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left(i \frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + i a_0 \frac{\partial \Delta \psi}{\partial z} - a_1 \frac{\partial^2 \Delta \psi}{\partial x^2} + i a_2(x, z) \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} + a(x) \Delta \psi \right. \\
& \quad \left. + (v_0(z) + \Delta v_0(z)) \Delta \psi \right) \bar{\eta} dx dt dz + \\
& + \int_{\Omega} (i(v_1(z) + \Delta v_1(z)) \Delta \psi) \bar{\eta} dx dt dz = - \int_{\Omega} \Delta v_0(z) \psi \bar{\eta} dx dt dz - \\
& - i \int_{\Omega} \Delta v_1(z) \psi \bar{\eta} dx dt dz.
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Diğer taraftan (4.34)-(4.37) eşlenik probleminin $B_0 \equiv C^0([0, T], L_2(\Omega_0)) \cap C^0([0, L], L_2(\Omega_T))$ uzayına ait olan $\phi(x, t, z)$ çözümü (4.38) integral özdeşliğini sağlar. Bu integral özdeşliğin kompleks eşleniği yazarsak aşağıdaki özdeşliğini elde ederiz:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[i \frac{\partial \eta_1}{\partial t} + i a_0 \frac{\partial \eta_1}{\partial z} - a_1 \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x^2} + i a_2(x, z) \frac{\partial \eta_1}{\partial x} + a(x) \eta_1 + v_0(z) \eta_1 \right. \\
& \quad \left. + i v_1(z) \eta_1 \right] \bar{\phi} dx dt dz = \\
& = -2\beta_0 \int_{\Omega_L} (\bar{\psi}(x, T, z) - \bar{y}_0(x, z)) \eta_1(x, T, z) dx dz - \\
& - 2\beta_1 \int_{\Omega_T} (\bar{\psi}(x, t, L) - \bar{y}_1(x, t)) \eta_1(x, t, L) dx dt.
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Burada $\eta_1 = \eta_1(x, t, z)$ fonksiyonu $\eta_1(x, 0, z) = 0, (x, z) \in \Omega_L, \eta_1(x, t, 0) = 0, (x, t) \in \Omega_T$ ve $\overset{\circ}{W}_2^{2,1,1}(\Omega)$ uzayına ait olan herhangi test fonksiyonudur. Bu integral özdeşliğinde $\eta_1 = \eta_1(x, t, z)$ test fonksiyonu yerine (4.12)-(4.14) başlangıç sınır değer probleminin çözümü olan $\Delta \psi = \Delta \psi(x, t, z) \in \overset{\circ}{W}_2^{2,1,1}(\Omega)$ fonksiyonunu alalım. Bu taktirde aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[i \frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} + i a_0 \frac{\partial \Delta \psi}{\partial z} - a_1 \frac{\partial^2 \Delta \psi}{\partial x^2} + i a_2(x, z) \frac{\partial \Delta \psi}{\partial x} + a(x) \Delta \psi + v_0(z) \Delta \psi \right. \\
& \quad \left. + i v_1(z) \Delta \psi \right] \bar{\phi} dx dt dz = \\
& = -2\beta_0 \int_{\Omega_L} (\bar{\psi}(x, T, z) - \bar{y}_0(x, z)) \Delta \psi(x, T, z) dx dz - \\
& - 2\beta_1 \int_{\Omega_T} (\bar{\psi}(x, t, L) - \bar{y}_1(x, t)) \Delta \psi(x, t, L) dx dt.
\end{aligned} \tag{4.44}$$

(4.42) integral özdeşliğinde $L_2(\Omega)$ uzayından olan $\eta = \eta(x, t, z)$ test fonksiyonunun yerine eşlenik problemin B_0 uzayından çözümü olan $\phi = \phi(x, t, z)$ fonksiyonunu alalım. Elde edilen eşitlikten (4.44) eşitliğini taraf tarafa çıkaralım. Bu taktirde aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\begin{aligned}
& 2\beta_0 \int_{\Omega_L} (\bar{\psi}(x, T, z) - \bar{y}_0(x, z)) \Delta \psi(x, T, z) dx dz + \\
& + 2\beta_1 \int_{\Omega_T} (\bar{\psi}(x, t, L) - \bar{y}_1(x, t)) \Delta \psi(x, t, L) dx dt = \\
& + \int_{\Omega} \Delta v_0(z) \psi(x, t, z) \bar{\phi}(x, t, z) dx dt dz + i \int_{\Omega} \Delta v_1(z) \psi(x, t, z) \bar{\phi}(x, t, z) dx dt dz + \\
& + \int_{\Omega} \Delta v_0(z) \Delta \psi(x, t, z) \bar{\phi}(x, t, z) dx dt dz + i \int_{\Omega} \Delta v_1(z) \Delta \psi(x, t, z) \bar{\phi}(x, t, z) dx dt dz.
\end{aligned}$$

Bu eşitliği onun kompleks eşleniği ile toplarsak aşağıdaki eşitliğin geçerli olduğunu buluruz:

$$\begin{aligned}
& 2\beta_0 \int_{\Omega_L} \text{Re}[(\psi(x, T, z) - y_0(x, z)) \Delta \bar{\psi}(x, T, z)] dx dz + \\
& + 2\beta_1 \int_{\Omega_T} \text{Re}[(\psi(x, t, L) - y_1(x, t)) \Delta \bar{\psi}(x, t, L)] dx dt = \\
& + \int_{\Omega} \text{Re}(\psi(x, t, z) \bar{\phi}(x, t, z)) \Delta v_0(z) dx dt dz - \\
& - \int_{\Omega} \text{Im}(\psi(x, t, z) \bar{\phi}(x, t, z)) \Delta v_1(z) dx dt dz + \\
& + \int_{\Omega} \text{Re}(\Delta \psi(x, t, z) \bar{\phi}(x, t, z)) \Delta v_0(z) dx dt dz - \\
& - \int_{\Omega} \text{Im}(\Delta \psi(x, t, z) \bar{\phi}(x, t, z)) \Delta v_1(z) dx dt dz. \tag{4.45}
\end{aligned}$$

Bu eşitliği $J_{\alpha}(v)$ fonksiyonelinin artışı için olan (41) formülünde dikkate alırsak artış için aşağıdaki formülü elde ederiz:

$$\begin{aligned}
\Delta J_{\alpha}(v) &= \int_{\Omega} \text{Re}(\psi(x, t, z) \bar{\phi}(x, t, z)) \Delta v_0(z) dx dt dz - \\
&- \int_{\Omega} \text{Im}(\psi(x, t, z) \bar{\phi}(x, t, z)) \Delta v_1(z) dx dt dz + \\
&+ 2\alpha \int_0^L (v_0(z) - \omega_0(z)) \Delta v_0(z) dz + 2\alpha \int_0^L (v_1(z) - \omega_1(z)) \Delta v_1(z) dz +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2\alpha \int_0^L \left(\frac{dv_0(z)}{dz} - \frac{d\omega_0(z)}{dz} \right) \frac{d\Delta v_0(z)}{dz} dz + \\
& +2\alpha \int_0^L \left(\frac{dv_1(z)}{dz} - \frac{d\omega_1(z)}{dz} \right) \frac{d\Delta v_1(z)}{dz} dz + R(\Delta v).
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Burada $R(\Delta v)$ aşağıdaki formül ile tanımlanır:

$$\begin{aligned}
R(\Delta v) = & \alpha \|\Delta v\|_H^2 + \beta_0 \|\Delta \psi(\cdot, T, \cdot)\|_{L_2(\Omega_L)}^2 + \beta_1 \|\Delta \psi(\cdot, \cdot, L)\|_{L_2(\Omega_T)}^2 + \\
& + \int_{\Omega} \operatorname{Re} \left(\Delta \psi(x, t, z) \bar{\phi}(x, t, z) \right) \Delta v_0(z) dx dt dz - \\
& - \int_{\Omega} \operatorname{Im} \left(\Delta \psi(x, t, z) \bar{\phi}(x, t, z) \right) \Delta v_1(z) dx dt dz.
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Bu formülden yararlanarak (4.10), (4.16), (4.39) kestirimlerinin ve Cauchy-Bunyakowski eşitsizliğini yardımıyla kolaylıkla aşağıdaki eşitsizliği ispatlaya biliriz:

$$|R(\Delta v)| \leq c_8 \|\Delta v\|_H^2. \tag{4.48}$$

Bu eşitsizlik

$$R(\Delta v) = o(\|\Delta v\|_H). \tag{4.49}$$

olduğu sonucuna varılır.

Başka değişle $R(\Delta v)$ kalanı $\|\Delta v\|_H$ normuna nazaran yüksek mertebeden sonsuz küçük miktardır. Bunu dikkate alarak fonksiyonelin artışı için olan formülü aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
\Delta J_{\alpha}(v) = & \int_0^L \left[\int_Q \operatorname{Re} \left(\psi(x, t, z) \bar{\phi}(x, t, z) \right) dx dt + 2\alpha(v_0(z) - \omega_0(z)) \right] \Delta v_0(z) dz + \\
& + \int_0^L \left[- \int_{\Omega_T} \operatorname{Im} \left(\psi(x, t, z) \bar{\phi}(x, t, z) \right) dx dt + 2\alpha(v_1(z) - \omega_1(z)) \right] \Delta v_1(z) dz + \\
& + 2\alpha \int_0^L \left(\frac{dv_0(z)}{dz} - \frac{d\omega_0(z)}{dz} \right) \frac{d\Delta v_0(z)}{dz} dz + \\
& + 2\alpha \int_0^L \left(\frac{dv_1(z)}{dz} - \frac{d\omega_1(z)}{dz} \right) \frac{d\Delta v_1(z)}{dz} dz + o(\|\Delta v\|_H).
\end{aligned} \tag{4.50}$$

Bu eşitlikte $\Delta v \in B$ yerine $0 < \theta < 1$ ve $w = w(z)$ fonksiyonu B uzayından herhangi fonksiyon olmak üzere $\theta w \in B$ fonksiyonunu alalım. Bu taktirde aşağıdaki formülü elde ederiz:

$$\begin{aligned}
\Delta J_{\alpha}(v) & = J_{\alpha}(v + \theta w) - J_{\alpha}(v) = \\
& = \theta \int_0^L \left[\int_Q \operatorname{Re} \left(\psi(x, t, z) \bar{\phi}(x, t, z) \right) dx dt + 2\alpha(v_0(z) - \omega_0(z)) \right] w_0(z) dz +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \theta \int_0^L \left[- \int_{\Omega_T} \operatorname{Im} \left(\psi(x, t, z) \bar{\phi}(x, t, z) \right) dx dt + 2\alpha (v_1(z) - \omega_1(z)) \right] w_1(z) dz + \\
& + 2\alpha \theta \int_0^L \left(\frac{dv_0(z)}{dz} - \frac{d\omega_0(z)}{dz} \right) \frac{dw_0(z)}{dz} dz + \\
& + 2\alpha \theta \int_0^L \left(\frac{dv_1(z)}{dz} - \frac{d\omega_1(z)}{dz} \right) \frac{dw_1(z)}{dz} dz + o(\theta \|w\|_H). \tag{4.51}
\end{aligned}$$

Bu formülün yardımıyla $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin V kümesi üzerinde diferansiyellenebilir olduğunu ve onun birinci birinci varyasyonu için aşağıdaki formülün geçerli olduğunu ispatlamış oluruz:

$$\begin{aligned}
\delta J_\alpha(v, w) &= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{J_\alpha(v + \theta w) - J_\alpha(v)}{\theta} = \\
&= \int_0^L \left[\int_{\Omega_T} \operatorname{Re} \left(\psi(x, t, z) \bar{\phi}(x, t, z) \right) dx dt \right] w_0(z) dz - \\
&- \int_0^L \left[\int_{\Omega_T} \operatorname{Im} \left(\psi(x, t, z) \bar{\phi}(x, t, z) \right) dx dt \right] w_1(z) dz + \\
&+ 2\alpha \int_0^L (v_0(z) - \omega_0(z)) w_0(z) dz + \\
&+ 2\alpha \int_0^L (v_1(z) - \omega_1(z)) w_1(z) dz + \\
&+ 2\alpha \int_0^L \left(\frac{dv_0(z)}{dz} - \frac{d\omega_0(z)}{dz} \right) \frac{dw_0(z)}{dz} dz + \\
&+ 2\alpha \int_0^L \left(\frac{dv_1(z)}{dz} - \frac{d\omega_1(z)}{dz} \right) \frac{dw_1(z)}{dz} dz. \tag{4.52}
\end{aligned}$$

Buradan da teoremin hükmü çıkar. 5.Teorem ispatlandı.

Şimdi de (4.1)-(4.5) optimal kontrol probleminin çözümü için varyasyon eşitsizliği biçiminde gerek şartı ispatlayalım.

Teorem 6. Farz edelim ki, 5.Teorem' in şartları sağlansın ve $v^* \in V$ (4.1)-(4.5) optimal kontrol probleminin herhangi çözümü olsun. Bu taktirde aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\int_0^L \left[\int_{\Omega_T} \operatorname{Re} \left(\psi^*(x, t, z) \bar{\phi}^*(x, t, z) \right) dx dt \right] (v_0(z) - v_0^*(z)) dz -$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^L \left[\int_{\Omega_T} \operatorname{Im} \left(\psi^*(x, t, z) \bar{\phi}^*(x, t, z) \right) dx dt \right] (v_1(z) - v_1^*(z)) dz + \\
& + 2\alpha \int_0^L (v_0^*(z) - \omega_0(z)) (v_0(z) - v_0^*(z)) dz + \\
& + 2\alpha \int_0^L (v_1^*(z) - \omega_1(z)) (v_1(z) - v_1^*(z)) dz + \\
& + 2\alpha \int_0^L \left(\frac{dv_0^*(z)}{dz} - \frac{d\omega_0(z)}{dz} \right) \left(\frac{dv_0(z)}{dz} - \frac{dv_0^*(z)}{dz} \right) dz + \\
& + 2\alpha \int_0^L \left(\frac{dv_1^*(z)}{dz} - \frac{d\omega_1(z)}{dz} \right) \left(\frac{dv_1(z)}{dz} - \frac{dv_1^*(z)}{dz} \right) dz \geq 0, \quad \forall v \in V. \tag{4.53}
\end{aligned}$$

Burada $\psi^*(x, t, z) \equiv \psi(x, t, z; v^*)$, $\phi^*(x, t, z) \equiv \phi(x, t, z; v^*)$ fonksiyonları sırasıyla (4.2)-(4.5) başlangıç sınır değer ve (4.34)-(4.37) eşlenik problemlerinin $v^* \in V$ ye karşılık gelen çözümleridir.

İspat. Farz edelim ki, $v \in V$ herhangi kontrol ve $v^* \in V$ ise herhangi optimal kontrol, yani $v^* \in V$, (4.1)-(4.5) optimal kontrol probleminin herhangi çözümü olsun. V kümesinin tanımından yararlanarak onun konveks küme olduğunu kolaylıkla göstere biliriz. Bu taktirde herhangi $v, v^* \in V$ ve $\beta \in [0,1]$ için

$$v^* + \beta(v - v^*) \in V \tag{4.54}$$

bağıntısını yazabiliriz. $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin V kümesi üzerinde minimum noktası için olan bildiğimiz hükümden yararlanarak aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz:

$$\frac{d}{d\theta} J_\alpha(v^* + \theta(v - v^*)) = \delta J_\alpha(v^*, v - v^*) \geq 0, \quad \forall v \in V \tag{4.55}$$

Fonksiyonelin birinci varyasyonu için olan (4.40) formülünü kullanırsak aşağıdaki formülü elde ederiz:

$$\begin{aligned}
\delta J_\alpha(v^*, v - v^*) &= \int_0^L \left[\int_{\Omega_T} \operatorname{Re} \left(\psi^*(x, t, z) \bar{\phi}^*(x, t, z) \right) dx dt \right] (v_0(z) - v_0^*(z)) dz - \\
& - \int_0^L \left[\int_{\Omega_T} \operatorname{Im} \left(\psi^*(x, t, z) \bar{\phi}^*(x, t, z) \right) dx dt \right] (v_1(z) - v_1^*(z)) dz + \\
& + 2\alpha \int_0^L (v_0^*(z) - \omega_0(z)) (v_0(z) - v_0^*(z)) dz + \\
& + 2\alpha \int_0^L (v_1^*(z) - \omega_1(z)) (v_1(z) - v_1^*(z)) dz +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2\alpha \int_0^L \left(\frac{dv_0^*(z)}{dz} - \frac{d\omega_0(z)}{dz} \right) \left(\frac{dv_0(z)}{dz} - \frac{dv_0^*(z)}{dz} \right) dz + \\
& +2\alpha \int_0^L \left(\frac{dv_1^*(z)}{dz} - \frac{d\omega_1(z)}{dz} \right) \left(\frac{dv_1(z)}{dz} - \frac{dv_1^*(z)}{dz} \right) dz, \quad \forall v \in V. \quad (4.56)
\end{aligned}$$

Burada $\psi^*(x, t, z) \equiv \psi(x, t, z; v^*)$, $\varphi^*(x, t, z) \equiv \varphi(x, t, z; v^*)$ fonksiyonları sırasıyla (4.2)-(4.5) başlangıç sınır değer ve (4.34)-(4.37) eşlenik problemlerinin $v^* \in V'$ ye karşılık gelen çözümleridir. (4.55) formülünü (4.54) bağıntısında dikkate alırsak, teoremin hükmünün geçerli olduğunu elde ederiz. 6.Teorem ispatlandı.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında ilk önce ele alınan problemin iyi konulmasına ait sorular cevaplandırılmıştır. Bu amaçla ilk önce özel gradiyent terimi durgun olmayan kuazi optik denklemi için birinci çeşit başlangıç sınır değer problemlerinin hemen hemen çözümünün varlığı ve tekliği hakkında bilgi edinmiştir. Bu bilgiden yararlanarak söz konusu optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliği meseleleri incelenmiş ve optimal kontrollerin varlığı ve tekliğine ait hükümler ispatlanmıştır. Bunların yanı sıra problemde kullanılan amaç fonksiyonelinin diferansiyellenebilirliği incelenmiş ve onun birinci varyasyonu için formül elde edilmiştir. Gradyent için elde edilen formülden yararlanarak optimal kontrol probleminin çözümü için varyasyon eşitsizliği şeklinde gerek şart ispatlanmıştır.

KAYNAKLAR

- Akbaba, D.G., 2011. Sanal katsayılı gradient içeren Schrödinger denklemi için Lions fonksiyonelli optimal kontrol problemi. **Yüksek Lisans Tezi**, Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kars.
- Aksoy, Y.N., Yıldız, B., Yetişkin, H., 2012. Variational problem with complex coefficient of a nonlinear Schrödinger equation. **Proceedings Mathematical Sciences**, 122(3), pp. 469-484.
- Aksoy Y.N., 2015. The variational formulation of an inverse problem for multi-dimensional nonlinear time dependent Schrödinger equation. **DOI:10.1515/jiip-2015-0029**.
- Butkovskiy, A.G., Samoilenko, Y.I., 1984. **Kuantum mekanik süreçlerin kontrolü**. M.: Nauka, 256 s.
- Goebel, M., 1979. On Existence of Optimal Control // **Math. Nacr.**, Vol.53-s.67-73.
- Ibragimov, N.S., 2009. Linner olmayan durgun kuazi optik denklemi için identifikasyon probleminin çözümünün gerek şartı hakkında // **Lankaran Devlet Üniversitesinin Haberleri**. Doğa bilimleri serisi, Lankaran, s. 30-46.
- Ibrahimov, N.S., 2010. Durgun olmayan kuazi optik denklemi için sınır gözlemi üzerinden identifikasyon probleminin çözümünün varlığı hakkında // **Lankaran Devlet Üniversitesinin Haberleri**. Doğa bilimleri serisi, Lankaran, s. 27-44.
- İbrahimov, N.S., 2010. Durgun olmayan kuazi optik denklemi için identifikasyon problemi // **İnformatiğin ve Matematiğin Tavriya Haberleri**, № 2, s. 45-55.
- Ibrahimov, N.S., 2010. Durgun olmayan kuazi optik denklemi için final gözlemi üzerinden bir identifikasyon problem hakkında // T. Şevçenko Kiev Devlet Üniversitesi, **‘Nümerik ve Uygulamalı Matematik Dergisi**, № 4, s. 26-37.
- Ibrahimov, N.S., 2010. Çok boyutlu lineer olmayan durgun kuazi optik denklemi için final gözlem üzerinden identifikasyon probleminin çözümünün varlığı hakkında // **Azerbaycan Teknik Üniversitesinin Bilimsel Çalışmaları**. Temel bilimler serisi, № 2, s. 75-83.
- Ibrahimov, N.S., 2010. Zayıf genelleştirilmiş çözümlü kuazi optik denklemi için identifikasyon probleminde gerekli şart // **Azerbaycan Teknik Üniversitesinin Bilimsel Çalışmaları**, Temel bilimler serisi, № 3, s. 41-47.
- Ibrahimov N.S., 2010. Linner durgun kuazi optik denklemi için identifikasyon probleminde gerek şart // **Kiev Üniversitesinin Haberleri**, Fizik-Matematik Bilimler serisi, № 4, s. 124-129.
- Ibrahimov, N.S., 2011. Bir boyutlu lineer olmayan durgun kuazi optik denklemi için identifikasyon probleminde gerek şart // **Kontrol ve İnformatiğin Problemleri**, №: 4, s. 51-62.
- Ibrahimov, N.S., 2011. Bir boyutlu lineer olmayan durgun kuazi optik denklemi için bir identifikasyon problemi hakkında // **İnformatiğin ve Matematiğin Tavriya Haberleri**, №: 2, s. 17-29.
- Ibrahimov, N.S., 2012. Durgun olmayan kuazi optik denklemi için identifikasyon probleminde Pontryagin maksimum prensibi tipinde gerek şart // **Sibernetik ve Sistemli Analiz**, c. 48, №: 3, s. 142-154.
- Ibrahimov, N.S., 2012. Lineer olmayan kısmında sanal katsayı olan çok boyutlu lineer olmayan durgun kuazi optik denklemi için final gözlem üzerinden identifikasyon problemi // **Kontrol ve İnformatiğin Problemleri**, №: 4, s. 15-27.

- Ibrahimov, N., Yagub, G., Farzaliyeva, Ü., 2018. Özel gradiyent terimli lineer durgun olmayan kuazi optik denklemleri için başlangıç sınır değer problemi hakkında // **Lankaran Devlet Üniversitesinin Hanerleri**, Doğa Bilimleri, № 2, s. 212-220.
- Iskenderov, A.D., Mahmudov, N.M., 1995. Kuantum Mekanik Sistemler için Lions Kriterli Optimal Kontrol // **AMEA 'nın Haberleri Fizik Teknik Matematik Bilimleri Serisi**-c.16, No: 5-6-30-35.
- Iskenderov, A.D., Yagubov, G.Ya., Musayeva, M.A., 2012. Kuantum potansiyellerinin identifikasyonu. Baku, **Çaşıoğlu**, 552 s.
- Iskenderov, A.D., Ekber, A.S., 2013. Karesel integrallenebilir katsayılı durgun olmayan kuazi optik denklemleri için başlangıç sınır değer problemlerinin çözümlenebilirliği // **Lankaran Devlet Üniversitesinin İlmi Haberleri**, Matematik ve Doğa bilimleri serisi, Lankaran, s. 5-22.
- Iskenderov, A.D., Yagubov, G.Y., Ibrahimov, N.S., Aksoy, N.Y., 2014. Variation formulation of the inverse problem of determining the complex-coefficient of equation of quasioptics // **Euroasian Journal of Mathematical and Computer Applications**, Vol 2., Issue 2, pp. 102-121.
- Iskenderov, A.D., Yagub, G., Zengin, M., 2016. Optimal control problem for nonlinear Schrödinger equation with spesial gradient terms. Abstracts of the XXVII **International Conference Problems of Decision Making under Uncertainties** PDMU, 2016., Tbilisi-Batumi, Georgia, May 23-27,- pp.79-80.
- Iyosida, K., 1967. **Functional Analysis-Moskova**, Mir- s.624.
- Juravlev, V.M., 2001. Dispersiyonlu ve diffuzyonlu çok bileşenli sistemlerde lineer olmayan dalgalar. **Ulyanovsk, UIDÜ**, 201 s.
- Karamzin, Yu.N., Sukhorukov, A.P., Trofimov, V.A., 1989. Lineer olmayan optikte matematiksel modelleme- Moskova, **MDÜ nin yayın evi**.
- Kolmogorov, A.N., Formin, S.V., 1989. Fonksiyonlar Teorisinin ve Fonksiyonel Analizin Elemanları. **M.Nauka**. 1989-s.624.
- Ladyzhenskaya, O.A., Solonnikov, V.A., Uraltseva, N.N. , 1968. Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. Amer. Math. Soc. (english trans) Providence, R.I. **Nauka**, 765 s.
- Ladyzhenskaya, O.A., 1973. Matematiksel Fiziğin Sınır Değer Problemleri-M: **Nauka**.
- Landau, L.D., Lifşis, E.M., 1963. Kuantum Mekaniği. Cilt 3. - s.702.
- Lions, J.-L., Magenes, E., 1972. Non-homogeneous boundary value problems and applications, vol. 2. Berlin, 307 p.
- Lions, J.L., 1987. Dağılmış parametrelili singüler sistemlerle kontrol. M.: **Nauka**, 308 s.
- Mahmudov, N.M., 1997. Lions Fonksiyonelli Kuantum Mekanik Sistemler İçin Optimal Kontrol Probleminin Farklar Metoduyla Çözümü. **Azerbaycan Bilimler Akademisi Matematik Mekanik Enstitüsü Eserleri**- c.7.s.39-42.
- Minu, M., 1990. Matematiksel programlama. Moskova, Nauka, 488 s.
- Vasilyev, F.P., 1981. Extremal Problemlerin Çözüm Metodları. M: **Nauka**, 400 s.
- Vorontsov, M.A., Shmalgauzen, V.I., 1984. Adaptiv Optiğin Prensipleri. Moskova, **Nauka**, 288 s.
- Yagubov, G.Ya., 1994. Kuazi Lineer Schrödinger denkleminin Katsayı İle Optimal Kontrol. **Bilimler Doktoru Tezi. Kiev Devlet Üniversitesi, Kiyev.**, 318 s.
- Yagubov, G.Ya., İbragimov, N.S., 1998. Durgun olmayan kuazi optik denklemleri için bir ters problem hakkında // **'Matematiksel Fiziğin Ters Problemleri' Uluslararası Kongrenin Sunum Özetleri**, Novosibirsk, 21-25 Eylül, s. 76-77.

- Yagubov, G.Y., İbrahimov, N.S., 2001. Durgun olmayan kuazi optik denklemi için optimal kontrol problemi // **‘Matematik modellemenin ve optimal kontrolün problemleri’ toplusu, Bakü**, s. 49-57.
- Yagubov, G.Y., İbrahimov, N.S., 2003. Durgun olmayan kuazi optik denklemi için identifikasyon problemi // **‘Teorik ve Matematiksel Fiziğin Ters Problemleri’ Uluslararası Kongrenin Sunum Özetleri, Sumgayıt**, s. 41-42.
- Yagub, G., İbrahimov, N.S., Zengin, M., Farzaliyeva, U.M., 2019. Identification problem for the linear nonstationary quasi optics equation with a special gradient terms // **Abstracts of the XXXIII International Conference Problems of Decision Making under Uncertainties PDMU, 2019., Hurgada, Egypt January 24-February 1**, pp. 94-96.
- Yagub, G., Ugurlu, G., A. Ekber, A., Zengin, M., 2019. Identification problem for the linear nonstationary quasi optics equation with a square summable coefficients // **Abstracts of the XXXIV International Conference Problems of Decision Making under Uncertainties PDMU, 2019., Lviv, Ukraine, September 23-27**, pp. 117-119.
- Yetişkin, H., 2005. Kompleks Potansiyelli Schrödinger denklemi İçin Optimal Kontrol Problemi ve Onun Sonlu Fark Yaklaşımı. **Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü**, Erzurum.
- Yıldız, B., Kilicoglu, O., Yagubov, G.Y., 2009. Optimal control problem for nonstationary Schrodinger equation // **Numerical methods for partial differential equations, 25, p. 1195-1203**.
- Zengin, M., 2021. Özel gradiyent terimli lineer ve lineer olmayan çok boyutlu Schrödinger denklemleri için sınır fonksiyonelli optimal kontrol problemlerinin iyi konulması ve çözüm için gerek şart, Kars, **Doktora Tezi**, 263 s.