



**T.C.
MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**| KESİRLİ MERTEBEDEN SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN
YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ ÜZERİNE |**

MEHMET CASİM ŞERİFOĞLU

ENFORMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HATAY

KASIM-2016



T.C.
MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**[KESİRLİ MERTEBEDEN SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN
YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ ÜZERİNE]**

MEHMET CASİM ŞERİFOĞLU

ENFORMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**HATAY
KASIM-2016**

**MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KESİRLİ MERTEBEDEN SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN YAKLAŞIK
ÇÖZÜMÜ ÜZERİNE**

Mehmet Casim ŞERİFOĞLU

ENFORMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Yrd. Doç. Dr. Sertan ALKAN danışmanlığında hazırlanan bu tez **17/11/2016** tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından **OYBİRLİĞİ** ile kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Sertan ALKAN

Başkan

Yrd. Doç. Dr. Hakan YETİŞKİN

Üye

Yrd. Doç. Dr. Sebahat Ebru DAŞ

Üye

Kod No:

Prof. Dr. Okan ŞENER
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

17.11.2016

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını ve tez üzerinde Yükseköğretim Kurulu tarafından hiçbir değişiklik yapılamayacağı için tezin bilgisayar ekranında görüntülendiğinde asıl nüsha ile aynı olması sorumluluğunun tarafıma ait olduğunu beyan ederim.

Mehmet Casim ŞERİFOĞLU

ÖZET

KESİRLİ MERTEBEDEN SINIR DEĞER PROBLEMLERİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜ ÜZERİNE

Bu çalışmada kesirli mertebeden lineer adi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümü sinc Galerkin ve sinc sıralama yöntemleri ile incelenmiştir. İlk olarak sinc Galerkin ve sinc sıralama yöntemleri için gerekli tanım ile teoremler ifade ve ispat edilmiştir. Ardından sinc Galerkin ve sinc sıralama yöntemleri anlatılmıştır.

Sonuç olarak, sinc Galerkin ve sinc sıralama yöntemleri bazı örnek problemlere uygulanmış ve elde edilen yaklaşık çözümler mathematica programı kullanılarak grafikler ve tablolar yardımıyla karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırmalarda sinc sıralama yönteminin daha iyi sonuç verdiği görülmüştür.

2016, 44 sayfa

Anahtar Kelimeler: Kesirli mertebeden sınır değer problemleri, sinc fonksiyonu, Galerkin yöntemi, sıralama yöntemi, Caputo türevi

ABSTRACT

ON APPROXIMATE SOLUTION FROM FRACTIONAL ORDER OF BAUNDARY VALUE PROBLEMS

In this study, approximate solution of the linear ordinary differential equations from fractional order is examined with sin Galerkin and sinc collocation. First of all, definition and theorems which are necessary for sinc Galerkin and sinc collocation methods are conceived and proved. Then, sinc Galerkin and sinc collocation methods is described.

Consequently, sinc Galerkin and sinc collocation methods are implemented to some example problems. The approximate solutions which are obtained are compared by using Mathematica with the help of graphics and tables. It is seen that sinc collocation method concludes better in this comparisons.

2016, 44 pages

Key Words: Fractional boundary value problems, sinc function, Galerkin method, collocation method, Caputo derivative

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez konusunun belirlenmesinde, araştırılması ve yazımı sırasında sahip olduğu bilgi birikimi ve tecrübesi ile çalışmayı yönlendiren ve her türlü yardımı esirgemeyen saygıdeğer danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Sertan ALKAN'a sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım sırasında desteklerini benden esirgemeyen değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Turgut YELOĞLU'na, Sayın Adnan SOYDAM'a, Mertcan YAPICI'ya ve aileme teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	I
ABSTRACT	II
TEŞEKKÜR	III
İÇİNDEKİLER	IV
ŞEKİLLER DİZİNİ	V
ÇİZELGELER DİZİNİ	VI
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	VII
1. GİRİŞ	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR	3
3. MATERYAL ve YÖNTEM	16
3.1. Kesirli Mertebeden Adi Diferansiyel Denklemlerin Sinc-Galerkin Yöntemi ile Yaklaşık Çözümü	16
3.2. Kesirli Mertebeden Adi Diferansiyel Denklemlerin Sinc-Sıralama Yöntemi ile Yaklaşık Çözümü	25
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA	28
5. SONUÇ ve ÖNERİLER	36
KAYNAKLAR	37
ÖZGEÇMİŞ	39
EKLER	40
EK1	40
EK2	42
EK3	44

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1.	Sinc baz fonksiyonlarının üç üyesi ($S(k, h)(x)$, $k = -1, 0, 1$, $h = \pi/4$)	10
Şekil 2.2.	Bölgeler arasındaki ilişki	12
Şekil 4.1.	4.3 Problemi için grafikler	34
Şekil 4.2.	4.4 Problemi için grafikler	36

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1.	4.3 Problemi için maksimum hatalar.....	33
Çizelge 4.2.	4.3 Problemi için ($L = 20$) nümerik sonuçlar	34
Çizelge 4.3.	4.4 Problemi için maksimum hatalar.....	35
Çizelge 4.4.	4.4 Problemi için ($L = 20$) nümerik sonuçlar	35

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

Γ : Gamma fonksiyonu

${}_aD_x^\alpha f(x)$: $f(x)$ fonksiyonunun α . mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi

${}_aI_x^\alpha f(x)$: $f(x)$ fonksiyonunun α . mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali

${}_a^CD_x^\alpha f(x)$: $f(x)$ fonksiyonunun α . mertebeden Caputo kesirli türevi

$B(h)$: Tam fonksiyonların sınıfı

KISALTMALAR

SG : Sinc-Galerkin

SC : Sinc Sıralama

H_{SG} : Sinc Galerkin yöntemi ile elde edilen yaklaşık çözümün maksimum hatası

H_{SC} : Sinc sıralama yöntemi ile elde edilen yaklaşık çözümün maksimum hatası

1. GİRİŞ

Fizik, mühendislik ve bazı diğer bilimlerde bir olayı açıklamak ya da bir problemi çözmek, çoğu kez diferansiyel denklem kurmayı ve onu çözmeyi gerektirir. Bilimde birçok fiziksel olay bu denklemlerle modellenmektedir. Benzer şekilde, kesirli mertebeden diferansiyel denklemler de sinyal işleme, kontrol, quantum mekaniği, meteoroloji, finans, yaşam bilimleri gibi birçok fiziksel olayın modellenmesinde sıklıkla kullanılmaktadır. Bu nedenle fiziki olayların daha iyi anlaşılabilmesi için bu denklemlerin çözümlerinin tam ya da yaklaşık olarak elde edilmesi gerekir. Literatürde kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümü üzerine birçok çalışma mevcuttur. Bu çalışmalarda kullanılan yöntemlerden bazıları, diferansiyel dönüşüm yöntem, homotopy perturbasyon yöntem, Adomian ayrıştırma yöntem, Varyasyonel iterasyon yöntem şeklindedir.

Bu yöntemlerin yanı sıra özellikle son yıllarda literatürdeki birçok çalışmada kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümünü elde edebilmek için sinc yöntemleri kullanılmıştır. Bu yöntemler, baz olarak, polinomları kullanan klasik yöntemlerin aksine tam fonksiyonları (sinc fonksiyonu) kullandığı için birçok avantaja sahiptir. Örneğin tekil noktaların varlığında, polinom yöntemlere göre daha doğru ve daha iyi bir yakınsaklık oranı verir. (Lund, J. ve Bowers, K., 1992). Sinc yöntemleri üzerinde literatürdeki bazı çalışmalar; Saadatmandi A., 2012; Secer A ve ark. 2013; Alkan, S., Secer, A, 2014; Alkan, S., Secer, A, 2015; şeklindedir.

Yapılan literatür taraması sonucunda sinc-Galerkin ve sinc sıralama yöntemlerinin lineer adi diferansiyel denklemlere ve kesirli mertebeden adi diferansiyel denklemlere uygulandığı görülmüştür. Bu tezde kesirli mertebeden adi diferansiyel denklemler sinc-Galerkin ve sinc sıralama yöntemleri ile yaklaşık olarak çözülüp elde edilen sonuçlar tablo ve grafikler yardımıyla karşılaştırılmıştır.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. İlk olarak giriş bölümünde literatürdeki bazı çalışmalardan bahsedildi. İkinci bölümde her iki yöntem için gerekli olan bazı tanım, teorem ve Lemmalara yer verildi. Üçüncü bölümde sinc Galerkin ve sinc sıralama yöntemleri anlatıldı. Dördüncü bölümde sinc Galerkin ve sinc sıralama yöntemleri tablolar ve grafikler yardımıyla mathematica programı kullanılarak bazı örneklerle uygulandı. Son olarak sonuç bölümü olan beşinci bölümde ise sonuç ve değerlendirme yapılmış, gelecek çalışmalara yönelik öneriler sunulmuştur.

Ayrıca Ekler kısmında, incelemiş olduğumuz 4.2. Probleminin çözümü için kullanılan algoritmalar verilmiştir.

Bu tez çalışmasının amacı, kesirli mertebeden sınır değer problemlerinin yaklaşık çözümlerini sinc-Galerkin ve sinc sıralama yöntemleri ile yaklaşık olarak çözerek hata oranlarını karşılaştırmaktır.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu bölümde ilerleyen bölümlerde kullanacağımız bazı tanım ve teoremlere yer verilecektir.

Tanım 2.1. (Gamma Fonksiyonu) Kesirli analizin temel fonksiyonlarından biri olan Gamma fonksiyonu $n!$ sayısını tam olmayan sayılara ve hatta karmaşık sayılara genelleştirir. Gamma fonksiyonunun en basit anlatımı, faktöriyelin bütün reel sayılar için genelleştirilmesidir. Şimdi Gamma fonksiyonunu tanımlayalım.

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z \in \mathbb{R}$$

eşitliğine Gamma fonksiyonu denir ve karmaşık düzlemin $Re(z) > 0$ sağ yarısında yakınsaktır. Bu durumu gösterelim,

$$\begin{aligned} \Gamma(x + iy) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1+iy} dt = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} e^{iy \log t} \log t dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} [\cos(y \log t) + i \sin(y \log t)] dt \end{aligned}$$

olup, köşeli parantezin içindeki ifade her t için sınırlıdır. e^{-t} ifadesinden dolayı sonsuzda yakınsaklık sağlanır ve $t = 0$ noktasındaki yakınsaklık için de $x = Re(z) > 1$ olması gereklidir (Podlubny, 1999).

Gamma fonksiyonunun en temel özelliklerinden birisi

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) \tag{2.1}$$

eşitliğidir. Bu eşitlik kısmi integrasyon yöntemi ile kolayca ispatlanabilir. Öyle ki

$$\Gamma(z + 1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z dt = [e^{-t} t^z]_{t=0}^{t=\infty} + z \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt = z\Gamma(z)$$

yazılır. Buradan açıkça görülmektedir ki; $\Gamma(1) = 1$ şeklindedir ve (2.1) eşitliğini kullanarak $z = 1, 2, 3, \dots$ için

$$\Gamma(2) = 1. \Gamma(1) = 1 = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2. \Gamma(2) = 2.1! = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3. \Gamma(3) = 3.2! = 3!$$

... ..

$$\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n) = n(n - 1)! = n!$$

elde ederiz (Podlubny, 1999). Ayrıca Gamma fonksiyonu için

$$2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\Gamma(2x)$$

şeklinde çoğalma formülü verilebilir (Alkan, 2014).

Tanım 2.2. (Kesirli Türev ve İntegraller) $\alpha > 0$ için birçok kesirli mertebeden türev tanımı vardır. Bu tanımlardan birkaçı Riemann-Liouville, Caputo ve Grünwald-Letnikov tanımlarıdır. Bu tanımlardan Riemann-Liouville ve Caputo en sık kullanılanlardır.

Şimdi Riemann-Liouville kesirli integrali, Riemann-Liouville kesirli türevi ve Caputo kesirli türevinin tanımlarını verelim.

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon, α pozitif bir reel sayı, $n; n - 1 \leq \alpha < n$ şartını sağlayan bir tamsayı ve Γ Euler Gamma fonksiyonu olsun. O halde

- i. $f(x)$ fonksiyonunun α . mertebeden sol ve sağ Riemann-Liouville kesirli integrali sırası ile,

$${}_a I_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - t)^{\alpha-1} f(t) dt,$$

ve

$${}_x I_b^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t - x)^{\alpha-1} f(t) dt,$$

şeklinde verilir.

- ii. $f(x)$ fonksiyonunun α . mertebeden sol ve sağ Riemann-Liouville kesirli türevi sırası ile

$${}_aD_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t) dt, \quad (2.2)$$

ve

$${}_xD_b^\alpha f(x) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^b (t-x)^{n-\alpha-1} f(t) dt,$$

şeklinde verilir.

- iii. $f(x)$ fonksiyonunun α . mertebeden sol ve sağ Caputo kesirli türevi sırası ile

$${}_a^CD_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt,$$

ve

$${}_x^CD_b^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_x^b (-1)^n (t-x)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt,$$

şeklinde verilir (Almeida ve Torres, 2011).

Ayrıca Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türevi arasındaki ilişki

$${}_a^CD_x^\alpha f(x) = {}_aD_x^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (x-a)^{k-\alpha}$$

ve

$${}_x^CD_b^\alpha f(x) = {}_xD_b^\alpha f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(b)}{\Gamma(k-\alpha+1)} (b-x)^{k-\alpha}$$

şeklinde yazılabilir. Özel olarak, eğer $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$ ise

$${}_a^CD_x^\alpha f(x) = {}_aD_x^\alpha f(x) \quad (2.3)$$

ve $f(b) = f'(b) = \dots = f^{(n-1)}(b) = 0$ ise

$${}_x^C D_b^\alpha f(x) = {}_x D_b^\alpha f(x)$$

olur (Almeida ve Torres, 2011).

Teorem 2.1. Eğer $\alpha > 0$, $n \in \mathbb{N}$ için $n - 1 < \alpha \leq n$ ve $f(x) \in C^n[a, b]$, olmak üzere

$${}_a^C D_x^\alpha f(x) = {}_a I_x^{n-\alpha} f^{(n)}(x) \quad (2.4)$$

şeklindedir (Vazqueze ve ark., 2009).

Teorem 2.2. Eğer $\alpha > 0$ ve f sürekli ise

$${}_a D_x^\alpha {}_a I_x^\alpha f(x) = f(x) \quad (2.5)$$

şeklindedir (Vazqueze ve ark., 2009).

Tanım 2.3. Eğer $\alpha > 0$ ise

$$\int_a^b g(x) {}_a^C D_x^\alpha f(x) dx = \int_a^b f(x) {}_x D_b^\alpha g(x) dx + \sum_{j=0}^{n-1} [{}_x D_b^{\alpha+j-n} g(x) \cdot {}_x D_b^{n-1-j} f(x)]_a^b$$

ve

$$\begin{aligned} \int_a^b g(x) {}_x^C D_b^\alpha f(x) dx &= \int_a^b f(x) {}_a D_x^\alpha g(x) dx \\ &+ \sum_{j=0}^{n-1} [(-1)^{n+j} {}_a D_x^{\alpha+j-n} g(x) \cdot {}_a D_x^{n-1-j} f(x)]_a^b \end{aligned}$$

olarak yazılır. Burada $k < 0$ için ${}_a D_x^k g(x) = {}_a I_x^{-k} g(x)$ ve ${}_x D_b^k g(x) = {}_x I_b^{-k} g(x)$ şeklindedir (Almeida ve Torres, 2011).

Sonuç 2.1. Eğer $0 < \alpha < 1$ ise

$$\int_a^b g(x) {}_a^C D_x^\alpha f(x) dx = \int_a^b f(x) {}_x D_b^\alpha g(x) dx + [{}_x I_b^{1-\alpha} g(x) \cdot f(x)]_a^b$$

ve

$$\int_a^b g(x) {}^C D_b^\alpha f(x) dx = \int_a^b f(x) {}_a D_x^\alpha g(x) dx - [{}_a I_x^{1-\alpha} g(x) \cdot f(x)]_a^b$$

olur (Almeida ve Torres, 2011).

Sonuç 2.2. Eğer $0 < \alpha < 1$ ve $f(x)$ fonksiyonu $f(a) = f(b) = 0$ şartını sağlıyorsa

$$\int_a^b g(x) {}^C D_b^\alpha f(x) dx = \int_a^b f(x) {}_x D_b^\alpha g(x) dx \quad (2.6)$$

ve

$$\int_a^b g(x) {}^C D_b^\alpha f(x) dx = \int_a^b f(x) {}_a D_x^\alpha g(x) dx$$

olarak yazılır (Almeida ve Torres, 2011).

Şimdi sinc baz fonksiyonlarının özelliklerini ve Kuadratur interpolasyonları için gerekli bazı tanım ve teoremleri verelim.

Tanım 2.4. Eğer $S \subseteq \mathbb{C}$ açık kümesi A ve B iki ayrık açık kümenin birleşimi olarak yazılamıyorsa S kümesine bağlantılı küme denir. Eğer $\bar{\mathbb{C}} \setminus S$ kümesi bağlantılı ise $S \subseteq \mathbb{C}$ açık kümesine basit bağlantılı küme denir. Bir D bölgesi $\mathbb{C}$ kümesinin açık basit bağlantılı alt kümesidir (Lund ve Bowers, 1992).

Tanım 2.5. Düzgün bir $z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$, eğrisi $\mathbb{C}$ kümesinde noktalar kümesi belirtir. Burada $t \in [a, b]$ için $z \in C^1[a, b]$ ve $z'(t) \neq 0$ şeklindedir. Eğer eğri, sürekli olduğu noktaların sonlu bir kümesi dışında diferansiyellenebilirse, parçalı diferansiyellenebilirdir. Eğer $z(a) = z(b)$ ise eğriye kapalı bir eğri (yol) denir. $\mathbb{C}$ kümesinde γ basit kapalı bir eğri, $a \leq t \leq b$ için $z(t) = x(t) + iy(t)$ ile verilir. $z(t)$ sadece $z(a) = z(b)$ durumunda parçalı diferansiyellenebilirdir (Lund ve Bowers, 1992).

Tanım 2.6. f fonksiyonu için

$$f'(z_0) \equiv \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right] \quad (2.7)$$

limiti varsa f , $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasında diferansiyellenebilirdir denir. $f'(z_0)$ ifadesine f fonksiyonunun z_0 noktasındaki türevi denir. Eğer f fonksiyonun türevi z_0 noktasının bazı komşuluklarının her bir noktasında mevcut ise f fonksiyonu z_0 noktasında analitiktir denir. Eğer f fonksiyonu bir D bölgesinin her bir noktasında analitik ise f fonksiyonuna D bölgesinde analitiktir denir. Eğer f fonksiyonu bütün $\mathbb{C}$ kümesinde analitik ise f fonksiyonuna tamdır denir (Lund ve Bowers, 1992).

Tanım 2.7. Bütün $z \in \mathbb{C}$ için tanımlanan

$$\text{sinc}(z) \equiv \begin{cases} \frac{\sin(\pi z)}{\pi z} & , z \neq 0 \\ 1 & , z = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

fonksiyonuna *sinc fonksiyonu* denir. Bu fonksiyon bütün $\mathbb{C}$ kümesinde analitik olduğundan tamdır (Lund ve Bowers, 1992).

Tanım 2.8. (Konform Dönüşüm) Uygulamalı matematikteki birçok problem bölge olarak reel eksene sahip değildir. Herhangi bir aralıkta bir problem ve reel eksen üzerinde nümerik bir işlem verilsin. Bu durumda çözüme ulaşmak için iki yol vardır; biri problemdeki değişkenleri değiştirmektir ki bu sayede problem nümerik işlem ile aynı bölgeye sahip olur. Diğeri ise nümerik işlemi yeni bir bölgeye taşımak ve işlemi bu bölgede yapmaktır. Sinc yöntemlerinin bir bölgeden diğerine dönüşümü *konform dönüşüm* yoluyla olur (Lund ve Bowers, 1992).

Tanım 2.9. Eğer f fonksiyonu bir D bölgesinde analitik, $z_0 \in D$ ve $f'(z_0) \neq 0$ ise f fonksiyonuna z_0 noktasında konformdur denir. Eğer bütün $z \in D$ için $f'(z) \neq 0$ ise f fonksiyonuna D bölgesinin bir konform dönüşümü denir (Lund ve Bowers, 1992).

Bu tanımın geometrik anlamı şudur; eğer f dönüşümü z_0 noktasında konform ise, o zaman z_0 noktasından geçen iki yay arasındaki açı, onların f altındaki görüntülerinin (z_0 noktasındaki) aralarındaki açı ile aynıdır. Böylece açının yönü korunur (Lund ve Bowers, 1992).

Tanım 2.10. f , $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlanmış bir fonksiyon ve $h > 0$ olsun.

$$S(k, h)(x) = \text{sinc}\left(\frac{x - kh}{h}\right) \equiv \begin{cases} \frac{\sin(\pi(x - kh)/h)}{\pi(x - kh)/h} & , x \neq kh \\ 1 & , x = kh \end{cases} \quad (2.9)$$

fonksiyonlarına dönüştürülmüş Sinc fonksiyonları ve

$$C(f, h)(x) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) \text{sinc}\left(\frac{x - kh}{h}\right)$$

serisi, yakınsak olduğunda f fonksiyonunun Whittaker Kardinal fonksiyonu olarak adlandırılır (Lund ve Bowers, 1992). Dönüştürülmüş sinc fonksiyonlarının belli k ve h değerleri için grafikleri Şekil 2.1 ile verilmiştir.

Tanım 2.11. h pozitif bir sabit olsun. $B(h)$ Paley-Wiener fonksiyonlar sınıfı, $f \in L^2(\mathbb{R})$ tam fonksiyonlarının ailesidir (Lund ve Bowers, 1992).

Teorem 2.3. Eğer $f \in B(h)$ ise her $z \in \mathbb{C}$ için

$$f(z) = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \text{sinc}\left(\frac{t - z}{h}\right) dt$$

olur (Lund ve Bowers, 1992).

Teorem 2.4. Eğer $g \in L^2(\mathbb{R})$ ise

$$k(z) \equiv \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \text{sinc}\left(\frac{t - z}{h}\right) dt$$

olmak üzere $k \in B(h)$ olur (Lund ve Bowers, 1992).

Teorem 2.5. Eğer $f \in B(h)$ ise her $z \in \mathbb{C}$ için

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) \text{sinc}\left(\frac{z - kh}{h}\right)$$

ve

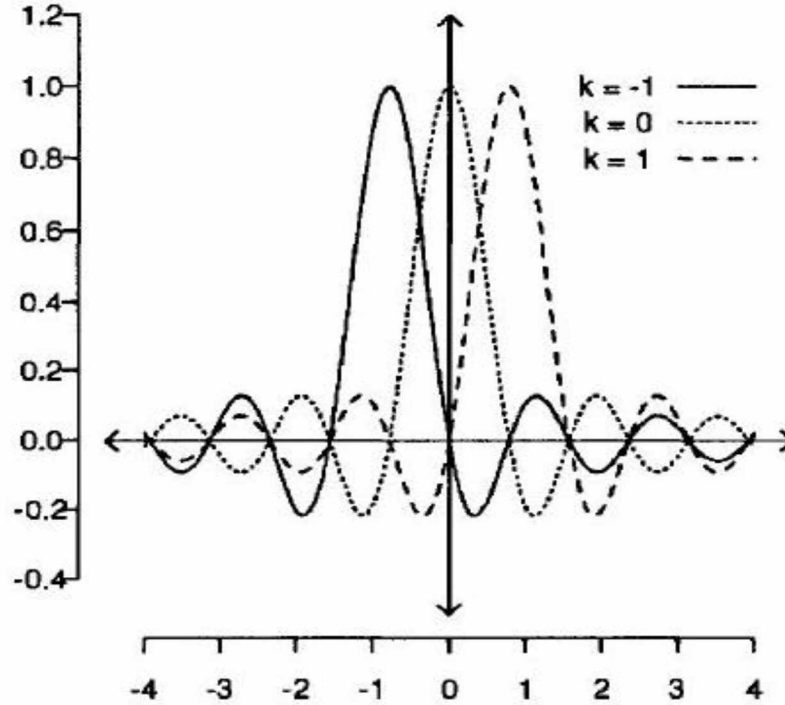
$$f(kh) = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \operatorname{sinc}\left(\frac{t - kh}{h}\right) dt$$

olur (Lund ve Bowers, 1992).

Sonuç 2.3. Eğer $f \in B(h)$ ve $f \in L^1(\mathbb{R})$ ise

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh)$$

olur (Lund ve Bowers, 1992).



Şekil 2.1. Sinc bazlarının üç üyesi ($S(k, h)(x)$, $k = -1, 0, 1$, $h = \pi/4$) (Koonprasert, 2003)

Teorem 2.6. Eğer $f \in B(h)$ ise o zaman her $z \in \mathbb{C}$ için

$$f(z) = C(f, h)(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) S(k, h)(z)$$

olur. Burada

$$S(k, h)(z) \equiv \text{sinc}\left(\frac{z - kh}{h}\right)$$

fonksiyonları dönüştürülmüş sinc fonksiyonlarıdır. Sonuç olarak eğer $f \in L^1(\mathbb{R})$ ise

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = h \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh)$$

olur. Bu özdeşlik integral için trapez kuralıdır (Lund ve Bowers, 1992).

(2.9) ile tanımlanan dönüştürülmüş sinc fonksiyonları diferansiyel denklemlerin nümerik çözümünde sıklıkla kullanılır.

Hem $\text{sinc}(x)$ hem de $S(k, h)(x)$ fonksiyonları bütün reel eksen üzerinde tanımlanır. Sınır değer problemlerin yaklaşık çözümlerinde bu fonksiyonları kullanmak için (a, b) ve $(-\infty, \infty)$ aralıkları arasında uygun bire bir dönüşüme ihtiyaç duyulur. Bunun için

$$\phi(z) = \ln\left(\frac{z - a}{b - z}\right)$$

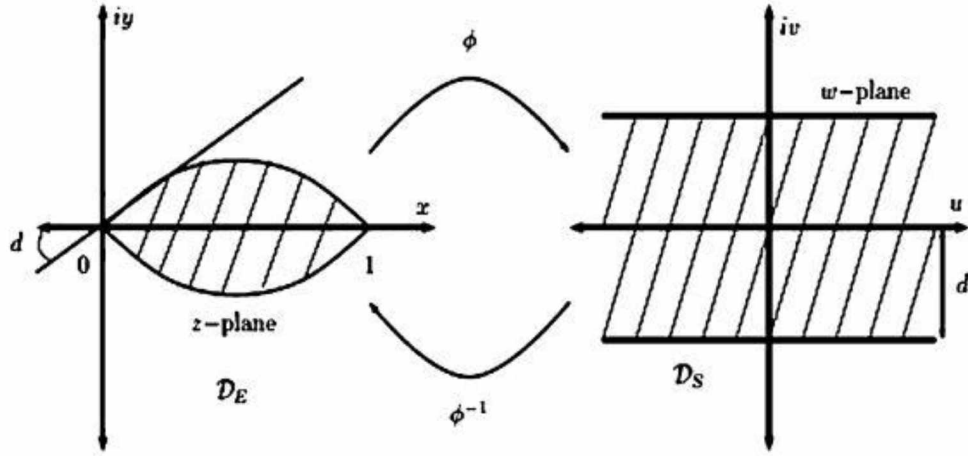
konform dönüşümü seçilebilir. Bu dönüşüm

$$D_E = \left\{ z = x + iy : \left| \arg\left(\frac{z - a}{b - z}\right) \right| < d \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

bölgesini

$$D_S = \left\{ w = u + iv : |v| < d \leq \frac{\pi}{2} \right\}$$

bölgesine dönüştürür. Bu durum Şekil 2.2 ile gösterilmiştir (Hajii ve Al-Mdallal, 2013).



Şekil 2.2. Bölgeler arasındaki ilişki (Alkan, 2014)

Nümerik yaklaşımlarda kullanılan Sinc baz fonksiyonları, $S(k, h)$ dönüştürülmüş Sinc fonksiyonları ile ϕ konform dönüşümünün,

$$S_k(z) = S(k, h) \circ \phi(z) = \text{sinc} \left(\frac{\phi(z) - kh}{h} \right) \quad (2.10)$$

şeklindeki bileşimi ile verilir. Burada $z \in D_E$ şeklindedir. (2.10) ile verilen $S_k(z)$ fonksiyonları (a, b) aralığında ele alınan denklemin yaklaşık çözümünde baz fonksiyonları olarak alınacaktır. h uzunluğu, reel eksen üzerindeki $\{kh\}$ türdeş grid noktalarını tanımlar. $D_E = (a, b)$ aralığındaki $\{x_k\}$ grid noktaları $\{kh\}$ grid noktalarının ters görüntüleri, dolayısıyla

$$x_k = \phi^{-1}(kh) = \frac{a + be^{kh}}{1 + e^{kh}}$$

ile verilir. Burada $k \in \mathbb{Z}$ şeklindedir (Hajii ve Al-Mdallal, 2013).

Şimdi sinc fonksiyon interpolasyonu ve kuadratürleri tanımlayalım.

Tanım 2.12. $\phi: D_E \rightarrow D_S$ bir konform dönüşüm, $\psi \equiv \phi^{-1}$ ve $\Gamma = \{\psi(u) \in D_E: -\infty < u < \infty\}$ olsun. O halde $B(D_E)$,

$$\int_{\psi(t+L)} |f(z)| dz \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \pm\infty$$

ve

$$\int_{\partial D_E} |f(z)| dz < \infty$$

şartlarını sağlayan ve $B(D_E)$ kümesinde analitik olan fonksiyonların sınıfıdır. Burada $L = \{iv: |v| < d \leq \frac{\pi}{2}\}$ ve $\partial D_E, D_E$ bölgesinin sınırıdır (Hajii ve Al-Mdallal, 2013).

Teorem 2.7. $\phi', f \in B(D_E)$ olsun. O halde her $z \in \Gamma$ için

$$f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(z_j) S_j(z) + E_f \quad (2.11)$$

olur. Burada

$$E_f = \frac{\sin(\pi\phi(z)/h)}{2\pi i} \int_{\partial D_E} \frac{\phi'(w)f(w)dw}{(\phi(w) - \phi(z))\sin(\pi\phi(w)/h)}$$

şeklindedir (Hajii ve Al-Mdallal, 2013).

Nümerik yaklaşımlarda (2.11) toplamında kesme yapılır. Aşağıda verilen teorem yapılan kesme hatası ile ilgilidir.

Teorem 2.8. $F \in B(D_E)$, ϕ bir konform dönüşüm ve α, β, C ;

$$\Gamma_- = \{z \in \Gamma: \phi(z) = x \in (-\infty, 0)\} = \left(a, \frac{a+b}{2}\right)$$

ve

$$\Gamma_+ = \{z \in \Gamma: \phi(z) = x \in [0, \infty)\} = \left(\frac{a+b}{2}, b\right)$$

olmak üzere

$$\left| \frac{F(z)}{\phi'(z)} \right| \leq C \begin{cases} \exp(-\alpha|\phi(z)|), & z \in \Gamma_- \\ \exp(-\beta|\phi(z)|), & z \in \Gamma_+ \end{cases}$$

eşitsizliğini sağlayan sabitler olsun. O halde

$$\int_a^b F(z)dz = h \sum_{j=-M}^N \frac{F(z_j)}{\phi'(z_j)} + \mathcal{O}(e^{-\alpha Mh}) + \mathcal{O}(e^{-\beta Nh}) + \mathcal{O}(e^{-\pi d/h}) \quad (2.12)$$

olur.

$\|x\|$, x değerine eşit ya da x değerinden küçük en büyük tam sayıyı ifade etmek üzere, $N = \left\lceil \left\lfloor \frac{\alpha}{\beta} M + 1 \right\rfloor \right\rceil$, $h = \sqrt{\pi d / (\alpha M)}$ seçimleri için (2.12) eşitliği ile verilen Sinc kuadratrür kuralı için hata $\mathcal{O}(\exp(-\sqrt{\pi d \alpha M}))$ olarak yazılır (El-Gamel ve Zayed, 2004; Hajii ve Al-Mdallal, 2013).

Yukarıdaki iki teorem S_k Sinc baz fonksiyonları yardımıyla $B(D_E)$ sınıfındaki fonksiyonların integralleri için kuadratrür kurallarının elde edilmesinin yanı sıra bu fonksiyonlar için interpolasyon formüllerinin de elde edilmesini sağlar. Elde edilen formüller problemlerin çözümü için nümerik bir yol geliştirilmesinde temel oluşturacaktır (Hajii ve Al-Mdallal, 2013).

Lemma 2.1. ϕ , D_E basit bağlantılı bölgesinden D_S bölgesi üzerine bire bir konform dönüşüm olsun. O halde

$$\delta_{jk}^{(0)} = [S(j, h) \circ \phi(x)]|_{x=x_k} = \begin{cases} 1 & , j = k \\ 0 & , j \neq k \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\delta_{jk}^{(1)} = h \frac{d}{d\phi} [S(j, h) \circ \phi(x)] \Big|_{x=x_k} = \begin{cases} 0 & , j = k \\ (-1)^{k-j} & , j \neq k \\ \frac{k-j}{k-j} & , j \neq k \end{cases} \quad (2.14)$$

$$\delta_{jk}^{(2)} = h^2 \frac{d^2}{d\phi^2} [S(j, h) \circ \phi(x)] \Big|_{x=x_k} = \begin{cases} -\frac{\pi^2}{3} & , j = k \\ -2(-1)^{k-j} & , j \neq k \\ \frac{(k-j)^2}{(k-j)^2} & , j \neq k \end{cases} \quad (2.15)$$

olur (El-Gamel, 2007). Ayrıca, $m = M + N + 1$ olmak üzere, $i = 0, 1, 2$ için $m \times m$ tipinde

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_m^{(0)} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix} = [\delta_{jk}^{(0)}] \\
\mathbf{I}_m^{(1)} &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{m-1} \\ 1 & 0 & -1 & \dots & -\frac{1}{m-2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & \dots & \frac{1}{m-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ -\frac{1}{m-1} & \frac{1}{m-2} & -\frac{1}{m-3} & & 0 \end{bmatrix} = [\delta_{jk}^{(1)}] \\
\mathbf{I}_m^{(2)} &= \begin{bmatrix} -\frac{\pi^2}{3} & \frac{2}{1^2} & -\frac{2}{2^2} & \dots & -\frac{2}{(m-1)^2} \\ \frac{2}{1^2} & -\frac{\pi^2}{3} & \frac{2}{1^2} & \dots & \frac{2}{(m-2)^2} \\ -\frac{2}{2^2} & \frac{2}{1^2} & -\frac{\pi^2}{3} & \dots & -\frac{2}{(m-3)^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ -\frac{2}{(m-1)^2} & \frac{2}{(m-2)^2} & -\frac{2}{(m-3)^2} & & 0 \end{bmatrix} = [\delta_{jk}^{(2)}]
\end{aligned}$$

$\mathbf{I}^{(i)} = [\delta_{jk}^{(i)}]$ matrisi yazılır.

Lemma 2.2. $\delta_{jk}^{(i)}$ için

$$\delta_{jk}^{(0)} = \delta_{kj}^{(0)}, \quad \delta_{jk}^{(1)} = -\delta_{kj}^{(1)}, \quad \delta_{jk}^{(2)} = \delta_{kj}^{(2)}$$

eşitlikleri vardır. (Alkan ve Secer, 2015)

Tanım 2.13. $n \times n$ tipindeki bir A kare matrisinde köşegenlerin üstündeki ve altındaki farklı tüm elemanları sıfıra eşit ise A matrisine köşegen (diagonal) matris denir. (Donduran M, 2008)

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde sınır değer koşulları ile verilen kesirli mertebeden adi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümü için sinc-Galerkin ve sinc sıralama yöntemlerini kullanacağız. Bu amaç doğrultusunda bazı teoremler verip ispatlarını yapacağız.

3.1. Kesirli Mertebeden Adi Diferansiyel Denklemlerin Sinc-Galerkin Yöntemi ile Yaklaşık Çözümü

${}_0^C D_x$ Caputo kesirli türev operatörü olmak üzere

$$\mu_2(x)y'' + \mu_1(x)y' + \mu_\alpha(x){}_0^C D_x^\alpha y + \mu_0(x)y = f(x), \quad (3.1)$$

$$0 < x < 1, \quad 0 < \alpha < 1,$$

$$y(0) = y(1) = 0 \quad (3.2)$$

kesirli mertebeden lineer iki noktalı sınır değer problemini ele alalım. Burada $\mu_2(x)$, $\mu_1(x)$, $\mu_\alpha(x)$, $\mu_0(x)$, $f(x)$ analitik fonksiyonlardır. Problemin yaklaşık bir çözümü $S_j(x)$ sinc baz fonksiyonları kullanılarak

$$y_n(x) = \sum_{j=-M}^M c_j S_j(x), \quad n = 2M + 1, \quad (3.3)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $S_j(x)$ fonksiyonu (2.10) ile tanımlanmıştır. (3.3) ile verilen yaklaşık çözümdeki bilinmeyen c_j katsayıları, baz fonksiyonlarına göre ortogonalite kullanılarak hesaplanır. Ayrıca

$$S_j(x_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & , j = k \\ 0 & , j \neq k \end{cases}$$

olduğundan $y_n(x_k) \approx c_k$ olup $x_k = \phi^{-1}(kh)$ şeklindedir. y_n ifadesindeki n sayıları kullanılan baz fonksiyonlarının sayısını ifade eder (Hajii ve Al-Mdallal, 2013).

(3.1) ile verilen eşitliğin her iki tarafının $S_k(x)$ fonksiyonu ile iç çarpımını alırsak,

$$\begin{aligned} < \mu_2(x)y'', S_k > + < \mu_1(x)y', S_k > + < \mu_\alpha(x) {}^C D_x^\alpha y, S_k > \\ & + < \mu_0(x)y, S_k > = < f(x), S_k > \end{aligned} \quad (3.4)$$

elde edilir.

Sinc-Galerkin yöntemi için kullanılan iç çarpım tanımı, f ve η iki fonksiyon olmak üzere

$$< f, \eta > = \int_a^b f(x)\eta(x)w(x)dx \quad (3.5)$$

şeklindedir. Burada $w(x)$ ağırlık fonksiyonu olarak adlandırılıp bu fonksiyon sınır koşullarına, bölgeye ve ele alınan problemin mertebesine göre seçilir. $2n$ mertebeden bir sınır değer problemi için $w(x) = 1/(\phi'(x))^n$ şeklinde seçilir. Ele aldığımız problem ikinci mertebeden olduğundan

$$w(x) = \frac{1}{\phi'(x)}$$

olarak almak uygun olacaktır (El-Gamel, 2007).

(3.4) ile verilen eşitlikteki iç çarpımlar lemma 2.1 ve aşağıdaki teoremler kullanılarak hesaplanır.

Teorem 3.1.1.

$$\begin{aligned} g_{2,2} &= (\mu_2 w)(\phi')^2, & g_{2,1} &= (\mu_2 w)\phi'' + 2(\mu_2 w)'\phi', & g_{2,0} &= (\mu_2 w)'', \\ g_{1,1} &= (\mu_1 w)\phi', & g_{1,0} &= (\mu_1 w)', \end{aligned}$$

olsun. Ayrıca

$$G = \mu_0 y \text{ veya } G = f(x)$$

olmak üzere

$$< \mu_2(x)y'', S_k > \cong h \sum_{j=-M}^M \sum_{i=0}^2 \frac{y(x_j)}{\phi'(x_j)h^i} \delta_{kj}^{(i)} g_{2,i}, \quad (3.6)$$

$$< \mu_1(x)y', S_k > \cong -h \sum_{j=-M}^M \sum_{i=0}^1 \frac{y(x_j)}{\phi'(x_j)h^i} \delta_{kj}^{(i)} g_{1,i}, \quad (3.7)$$

ve

$$< G, S_k > \cong h \frac{G(x_k)w(x_k)}{\phi'(x_k)}, \quad (3.8)$$

ifadeleri sağlanır (Mohsen ve El-Gamel, 2008).

İspat (3.5) ile verilen iç çarpım tanımını, (2.12) ile verilen sinc kuadratr kuralını ve Galerkin yöntemini kullanarak teoremden verilen iç çarpımların her birini ayrı ayrı hesaplayalım.

$$< \mu_2(x)y''(x), S_k > = \int_0^1 \mu_2(x)y''(x)S_k(x)w(x)dx$$

olup kısmi integrasyondan

$$\begin{aligned} < \mu_2(x)y''(x), S_k > = y'(x)\mu_2(x)S_k(x)w(x)|_0^1 \\ - \int_0^1 y'(x) \frac{d}{dx} [\mu_2(x)S_k(x)w(x)] dx \end{aligned}$$

yazılır. Sağ taraftaki integrale tekrar kısmi integrasyon uygularsak,

$$\begin{aligned} < \mu_2(x)y''(x), S_k > = y'(x)\mu_2(x)S_k(x)w(x)|_0^1 \\ - y(x) \frac{d}{dx} [\mu_2(x)S_k(x)w(x)] \Big|_0^1 \end{aligned}$$

$$+ \int_0^1 y(x) \frac{d^2}{dx^2} [\mu_2(x) S_k(x) w(x)] dx$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafındaki ilk terim $S_k(0) = S_k(1) = 0$ olduğu için sıfır olur. $S_k(x)$ fonksiyonu $x = 0$ ve $x = 1$ uç noktalarında diferansiyellenemez. Bu nedenle, $w(x)$ ağırlık fonksiyonu, $\frac{d}{dx} [\mu_2(x) S_k(x) w(x)]$ ifadesi $x = 0$ ve $x = 1$ noktalarında diferansiyellenebilir olacak şekilde seçilir. $\phi(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$ dönüşümü için uygun bir ağırlık fonksiyonu $w(x) = 1/\phi'(x)$ şeklindedir. $y(0) = y(1) = 0$ sınır koşulları ve $w(x)$ kullanıldığında

$$< \mu_2(x) y''(x), S_k > = \int_0^1 y(x) \frac{d^2}{dx^2} [\mu_2(x) S_k(x) w(x)] dx$$

olarak bulunur. Burada

$$\frac{d}{dx} [S_k(x)] = \frac{d}{d\phi} [S_k(x)] \phi'(x) \quad (3.9)$$

ve

$$\frac{d^n}{d\phi^n} [S_k(x)] = S_k^{(n)}(x) \quad (3.10)$$

olarak alındığında

$$< \mu_2(x) y''(x), S_k > = \int_0^1 y(x) \left[S_k(x) g_{2,0}(x) + S_k^{(1)}(x) g_{2,1}(x) + S_k^{(2)}(x) g_{2,2}(x) \right] dx \quad (3.11)$$

yazılır. Burada

$$g_{2,0}(x) = (w(x) \mu_2(x))''$$

$$g_{2,1}(x) = \phi''(x) w(x) \mu_2(x) + 2\phi'(x) (w(x) \mu_2(x))'$$

$$g_{2,2}(x) = (\phi'(x))^2 w(x) \mu_2(x)$$

şeklindedir.

(3.11) eşitliğinin sağ tarafına (2.12) ile verilen sinc kuadratür kuralını uygulayıp Lemma 2.1 kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} < \mu_2(x) y''(x), S_k > \\ &\cong h \sum_{j=-M}^M \frac{y(x_j)}{\phi'(x_j)} \left[\frac{1}{h^2} \delta_{kj}^{(2)} g_{2,2}(x_j) + \frac{1}{h} \delta_{kj}^{(1)} g_{2,1}(x_j) + \delta_{kj}^{(0)} g_{2,0}(x_j) \right] \\ &= h \sum_{j=-M}^M \sum_{i=0}^2 \frac{y(x_j)}{\phi'(x_j) h^i} \delta_{kj}^{(i)} g_{2,i} \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde

$$< \mu_1(x) y'(x), S_k > = \int_0^1 \mu_1(x) y'(x) S_k(x) w(x) dx$$

olup kısmi integrasyondan

$$< \mu_1(x) y'(x), S_k > = y(x) \mu_1(x) S_k(x) w(x) \Big|_0^1 - \int_0^1 y(x) \frac{d}{dx} [\mu_1(x) S_k(x) w(x)] dx$$

yazılır. Burada $y(0) = y(1) = 0$ sınır koşulları kullanılırsa

$$< \mu_1(x) y'(x), S_k > = - \int_0^1 y(x) \frac{d}{dx} [\mu_1(x) S_k(x) w(x)] dx$$

olarak yazılır. Bu eşitliğin sağ tarafında (3.12) ve (3.13) notasyonları kullanılırsa

$$< \mu_1(x) y'(x), S_k > = - \int_0^1 y(x) [S_k(x) g_{1,0}(x) + S_k^{(1)}(x) g_{1,1}(x)] dx \quad (3.12)$$

elde edilir. Burada

$$g_{1,1}(x) = (\mu_1(x)w(x))\phi'(x)$$

$$g_{1,0}(x) = (\mu_1(x)w(x))'$$

şeklindedir. (3.12) ile verilen eşitlikteki integrale (2.12) ile verilen sinc kuadratür kuralını uygulayıp Lemma 2.1 kullanılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \langle \mu_1(x)y'(x), S_k \rangle &\cong -h \sum_{j=-M}^M \frac{y(x_j)}{\phi'(x_j)} \left[\frac{1}{h} \delta_{kj}^{(1)} g_{1,1}(x_j) + \delta_{kj}^{(0)} g_{1,0}(x_j) \right] \\ &= -h \sum_{j=-M}^M \sum_{i=0}^1 \frac{y(x_j)}{\phi'(x_j) h^i} \delta_{kj}^{(i)} g_{1,i} \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Benzer şekilde $G = \mu_0 y$ için (3.5) ile verilen iç çarpım tanımı kullanılırsa

$$\langle \mu_0(x)y, S_k \rangle = \int_0^1 \mu_0(x)y(x)S_k(x)w(x)dx$$

yazılır. Bu eşitlikteki integrale (2.12) ile verilen sinc kuadratür kuralını uygularsak

$$\langle \mu_0(x)y, S_k \rangle \cong h \frac{\mu_0(x_k)y(x_k)w(x_k)}{\phi'(x_k)} = h \frac{G(x_k)w(x_k)}{\phi'(x_k)}$$

olarak bulunur. Aynı işlem $G = f(x)$ için de benzer şekilde yapılır. Sonuç olarak ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.1.2. $0 < \alpha < 1$ olmak üzere

$$\begin{aligned} &\langle \mu_\alpha(x) {}^C_0 D_x^\alpha y(x), S_k \rangle \\ &\cong -\frac{h}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=-M}^M \frac{y(x_j)}{\phi'(x_j)} \frac{d}{dx} \left[h_L \sum_{r=-L}^L \frac{(x_r - x)^{-\alpha} K(x_r)}{\xi'(x_r)} \right] \Bigg|_{x=x_j} \end{aligned} \quad (3.13)$$

ifadesi sağlanır. Burada $K(x) = \mu_\alpha(x)S_k(x)w(x)$ ve $\xi(t) = \ln\left(\frac{t-x}{1-t}\right)$ şeklindedir (Secer ve ark, 2013).

İspat İç çarpım tanımından

$$< \mu_\alpha(x) {}^C_0 D_x^\alpha y(x), S_k > = \int_0^1 {}^C_0 D_x^\alpha y(x) (\mu_\alpha(x) S_k(x) w(x)) dx$$

yazılır. Burada sonuç 2.2 de verilen (2.6) eşitliği kullanılırsa $K(x) = \mu_\alpha(x) S_k(x) w(x)$ için

$$< \mu_\alpha(x) {}^C_0 D_x^\alpha y(x), S_k > = \int_0^1 y(x) {}_x D_1^\alpha (K(x)) dx \quad (3.14)$$

elde edilir. O halde Riemann-Liouville tanımından

$${}_x D_1^\alpha (K(x)) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^1 (t-x)^{-\alpha} K(t) dt \quad (3.15)$$

yazabiliriz. (3.15) ile verilen eşitlikteki integral $[x, 1]$ kapalı aralığında ıraksak olduğundan bu integrali hesaplamak için (2.12) ile verilen sinc kuadratür kuralını kullanacağız. Bu amaç için konform dönüşüm ve bu dönüşümün ters görüntüsü sırasıyla

$$\xi(t) = \ln \left(\frac{t-x}{1-t} \right)$$

ve

$$x_r = \xi^{-1}(rh_L) = \frac{e^{rh_L} + x}{1 + e^{rh_L}}$$

şeklinde verilir. O halde sinc kuadratür kuralına göre $h_L = \frac{\pi}{\sqrt{L}}$ için

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^1 (t-x)^{-\alpha} K(t) dt \\
& \cong -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \left[h_L \sum_{r=-L}^L \frac{(x_r-x)^{-\alpha} K(x_r)}{\xi'(x_r)} \right]
\end{aligned}$$

yazabiliriz. Sonuç olarak (3.14) eşitliğinin sağ tarafı

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 y(x) {}_x D_1^\alpha (K(x)) dx \\
& \cong -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 \left(y(x) \frac{d}{dx} \left[h_L \sum_{r=-L}^L \frac{(x_r-x)^{-\alpha} K(x_r)}{\xi'(x_r)} \right] \right) dx
\end{aligned} \tag{3.16}$$

olarak yazılır. Şimdi (3.16) ile verilen ifadenin sağ tarafına sinc kuadratür kuralını uygulayalım. Bu amaç için konform dönüşüm ve bu dönüşümün ters görüntüsü sırası ile

$$\phi(x) = \ln \left(\frac{x}{1-x} \right)$$

ve

$$x_k = \phi^{-1}(kh) = \frac{e^{kh}}{1 + e^{kh}}$$

şeklindedir. Sonuç olarak sinc kuadratür kuralına göre $h = \frac{\pi}{\sqrt{M}}$ için

$$\begin{aligned}
& \langle \mu_\alpha(x) {}_0^C D_x^\alpha y(x), S_k \rangle \\
& \cong -\frac{h}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{j=-M}^M \frac{y(x_j)}{\phi'(x_j)} \frac{d}{dx} \left[h_L \sum_{r=-L}^L \frac{(x_r-x)^{-\alpha} K(x_r)}{\xi'(x_r)} \right] \Bigg|_{x=x_j}
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

(3.6)-(3.8) ve (3.11) ifadeleri ile (3.4) eşitliğindeki her bir terim yer değiştirilirse ve elde edilen eşitlikte $y(x_j)$ yerine c_j yazılıp eşitliğin her iki tarafı h ile bölünürse aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.1.3. Eğer (3.1)-(3.2) ile verilen sınır değer probleminin yaklaşık çözümü (3.3) şeklinde ise, o zaman $\{c_j\}_{j=-M}^M$ bilinmeyen katsayılarını hesaplamak için ayrık sinc-Galerkin sistemi

$$\sum_{j=-M}^M \left\{ \sum_{i=0}^2 \frac{1}{h^i} \delta_{kj}^{(i)} \frac{g_{2,i}(x_j)}{\phi'(x_j)} c_j - \sum_{i=0}^1 \frac{1}{h^i} \delta_{kj}^{(i)} \frac{g_{1,i}(x_j)}{\phi'(x_j)} c_j - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{c_j}{\phi'(x_j)} \frac{d}{dx} \left[h_L \sum_{r=-L}^L \frac{(x_r - x)^{-\alpha} K(x_r)}{\xi'(x_r)} \right] \right\}_{x=x_j} \quad (3.17)$$

$$+ \frac{\mu_0(x_k)w(x_k)}{\phi'(x_k)} c_k = \frac{f(x_k)w(x_k)}{\phi'(x_k)}, \quad -M \leq k \leq M$$

şeklinde verilir (Secer ve ark., 2013).

Şimdi (3.17) ile verilen sistemi matris şeklinde ifade etmek için bazı notasyonlar tanımlayalım. $m = 2M + 1$ olmak üzere $\mathbf{D}(g)$ köşegen elemanları

$$[g(x_{-M}), g(x_{-M+1}), \dots, g(x_0), \dots, g(x_M)]^T$$

şeklinde olan $m \times m$ tipinde bir diagonal matris, $\mathbf{R}$

$$\mathbf{R} = - \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \left[h_L \sum_{r=-L}^L \frac{(x_r - x)^{-\alpha} K(x_r)}{\xi'(x_r)} \right]_{x=x_j}$$

ile verilen $m \times m$ tipinde bir matris ve $\mathbf{I}^{(i)}$, $i = 0, 1, 2$ için

$$\mathbf{I}^{(i)} = [\delta_{kj}^{(i)}], \quad j, k = -M, \dots, M$$

olarak tanımlanan bir matris olsun. O halde

$$\mathbf{x} = [x_{-M}, x_{-M+1}, \dots, x_M]^T$$

$$\mathbf{c} = [c_{-M}, c_{-M+1}, \dots, c_M]^T$$

$$\mathbf{1} = [1, 1, \dots, 1]^T$$

olmak üzere (3.1.17) sistemi

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{i=0}^2 \frac{1}{h^i} \mathbf{I}^{(i)} \mathbf{D} \left(\frac{g_{2,i}}{\phi'} \right) - \sum_{i=0}^1 \frac{1}{h^i} \mathbf{I}^{(i)} \mathbf{D} \left(\frac{g_{1,i}}{\phi'} \right) - \mathbf{R} \mathbf{D} \left(\frac{1}{\phi'} \right) \right] \mathbf{c} + \mathbf{D} \left(\frac{\mu_0(x_k) w(x_k)}{\phi'(x_k)} \right) \mathbf{c} \\ & = \mathbf{D} \left(\frac{f(x_k) w(x_k)}{\phi'(x_k)} \right) \mathbf{1} \end{aligned}$$

matris-vektör sistemi şeklinde yazılabilir. Bu sistemden $-M \leq j \leq M$ için c_j katsayılarının değerleri hesaplanıp

$$y(x) \cong y_n(x) = \sum_{j=-M}^M c_j S_j(x)$$

toplamında yerine yazılarak yaklaşık çözüm bulunmuş olur (Hajii ve Al-Mdallal, 2013).

3.2. Kesirli Mertebeden Adi Diferansiyel Denklemlerin Sinc-Sıralama Yöntemi ile Yaklaşık Çözümü

(3.1) ve (3.2) ile verilen sınır değer problemini sinc sıralama yöntemi ile çözmek için aşağıdaki yolu izleyelim.

$$y_n(x) = \sum_{j=-M}^N c_j S_j(x), \quad n = M + N + 1 \quad (3.18)$$

burada $S_j(x)$ fonksiyonu $S(j, h) \phi(x)$ fonksiyonudur, (3.18) denklemindeki c_j , bilinmeyen katsayılardır. Bu katsayıları sinc sıralama yöntemi ile belirlemek için aşağıdaki teoremleri inceleyelim.

Teorem 3.2.1. $y_n(x)$ fonksiyonunun birinci ve ikinci mertebeden türevi

$$\frac{d}{dx} y_n(x) = \sum_{j=-M}^N c_j \phi'(x) \frac{d}{d\phi} S_j(x) \quad (3.19)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} y_n(x) = \sum_{j=-M}^N c_j \left(\phi''(x) \frac{d}{d\phi} S_j(x) + (\phi')^2 \frac{d^2}{d\phi^2} S_j(x) \right) \quad (3.20)$$

şeklindedir.

Teorem 3.2.2. $\xi, [a, x]$ aralığında olmak üzere $y_n(x)$ fonksiyonunun $0 < \alpha < 1$ için α . mertebeden türevi aşağıda verilmiştir;

$${}_a^c D_x^\alpha (y_n(x)) = \sum_{j=-M}^N c_j {}_a^c D_x^\alpha (S_j(x)) \quad (3.21)$$

burada

$${}_a^c D_x^\alpha (S_j(x)) \approx \frac{h_L}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{r=-L}^L \frac{(x-x_r) S_j'(x_r)}{\xi'(x_r)} \quad (3.22)$$

şeklindedir.

Sonuç 3.2.1. Şimdi (3.1) ve (3.2) ile verilen kesirli mertebeden sınır değer probleminin her bir terimini (3.18)-(3.22) yaklaşık çözümleri ile değiştirip, elde edilen eşitlik $\{(1/\phi')^2\}$ ile çarpılır ve daha sonra $x = x_k$ yazılırsa,

$$\sum_{j=-M}^N \left[c_j \left\{ \sum_{i=0}^2 g_i(x_k) \frac{d^i}{d\phi^i} S_j + g_3(x_k) {}_a^c D_x^\alpha (S_j(x_k)) \right\} \right] = f(x_k) \left(\frac{1}{\phi'(x_k)} \right)^2$$

sistemi elde edilir. Burada

$$g_0(x) = \mu_0(x) \left(\frac{1}{\phi'(x)} \right)^2$$

$$g_1(x) = \left(\mu_1(x) \left(\frac{1}{\phi'(x)} \right) - \mu_2(x) \left(\frac{1}{\phi'} \right)' \right)$$

$$g_2(x) = \mu_2(x)$$

$$g_3(x) = \mu_\alpha(x) \left(\frac{1}{\phi'} \right)^2$$

şeklindedir.

Teorem 3.2.3. Eğer (3.1) ve (3.2) ile verilen sınır değer problemin yaklaşık çözümü (3.18) ise $\{c_j\}_{k=-M}^N$ bilinmeyen katsayılarını hesaplamak için sinc sıralama sistemi

$$\sum_{j=-M}^N \left[c_j \left\{ \sum_{i=0}^2 \frac{g_i(x_k)}{h^i} \delta_{kj}^{(i)} + g_3(x_k) {}^C D_x^\alpha (S_j(x_k)) \right\} \right] = f(x_k) \left(\frac{1}{\phi'(x_k)} \right)^2, \quad (3.23)$$

$$j = -M, \dots, N$$

şeklindedir.

Şimdi (3.23) ile verilen sistemi matris şeklinde ifade edebilmek için bazı notasyonlar tanımlayalım. Diagonal (köşegen) elemanları $y(x_{-M}), y(x_{-M+1}), \dots, y(x_N)$ şeklinde olan ve diğer elemanları sıfır olan $\mathbf{D}(y)$ şeklinde matris tanımlayalım. Ayrıca, $\mathbf{R} = {}^C D_x^\alpha (S_j(x_k))$ olmak üzere ve Lemma 2.1 ve Lemma 2.2 kullanılırsa, (3.23) lineer sistemindeki c_j bilinmeyen değerlerini hesaplamak için

$$\mathbf{A} \mathbf{c} = \mathbf{B} \quad (3.24)$$

sistemini yazabiliriz. Burada $\mathbf{D}, \mathbf{R}, \mathbf{I}^{(0)}, \mathbf{I}^{(1)}$ ve $\mathbf{I}^{(2)}$ $n \times n$ tipinde karesel matrisler olmak üzere,

$$\mathbf{A} = \sum_{i=0}^2 \frac{1}{h^i} \mathbf{D}(g_i) \mathbf{I}^{(i)} + \mathbf{D}(g_3) \mathbf{R}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{D} \left(\left(\frac{f}{(\phi')^2} \right) \right) \mathbf{1}$$

$$\mathbf{c} = (c_{-M}, c_{-M+1}, \dots, c_N)^T$$

şeklindedir. (3.24) sistemi n denklemlili n bilinmeyenli lineer denklem sistemidir. Bu sistemi çözerek c_j bilinmeyen değerleri elde ederiz.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Bu bölümde bazı problemlerin yaklaşık çözümünü sinc-Galerkin ve sinc sıralama yöntemi ile göstereceğiz. Buradaki problemleri çözerken $d = \pi/2$, $\alpha = \beta = 1/2$, $h = \sqrt{\pi d / \alpha M}$ ve $N = M = L$ olarak alınmıştır. Ayrıca,

$$H_{SG} = \max_{-L \leq i \leq L} |y(x_i) - y_{n,SG}(x_i)|$$

$$H_{SC} = \max_{-L \leq i \leq L} |y(x_i) - y_{n,SC}(x_i)|$$

şeklinde sinc yöntemlerindeki maksimum hatayı temsil etmektedir. (Mohsen ve El Gamel, 2008)

4.1. Problem

$$f(x) = \int_0^1 e^x dx$$

integralini sinc kuadratür kuralı ile hesaplayalım. ($L = 3$ için)

İlk olarak (2.12) eşitliğinden hareketle

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \sum_{k=-M}^N \frac{f(x_k)}{\varphi'(x_k)}$$

yazılabilir. $M = N = L$, $h = \sqrt{\pi d / \alpha M}$ olmak üzere $d = \pi/2$, $\alpha = 1/2$ alalım. $h = \pi / \sqrt{M}$ olur. $\varphi(x) = \ln\left(\frac{x-a}{b-x}\right)$ ve $x_k = \varphi^{-1}(hk) = \frac{a+be^{kh}}{1+e^{kh}}$ olmak üzere,

$$\varphi(x) = \ln\left(\frac{x-0}{1-x}\right) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

$$x_k = \varphi^{-1}(hk) = \frac{0 + 1e^{kh}}{1 + e^{kh}} = \frac{1e^{kh}}{1 + e^{kh}}$$

yazılır. Buradan,

$$\varphi'(x) = \frac{(1-x)\left(\frac{1}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^2}\right)}{x}$$

elde edilir. $h = \pi/\sqrt{3}$ olmak üzere

$$\int_0^1 e^x dx \approx h \sum_{k=-M}^M \frac{f(x_k)}{\varphi'(x_k)} = h \sum_{k=-3}^3 \frac{x_k e^{x_k}}{(1-x_k)\left(\frac{1}{1-x_k} + \frac{x_k}{(1-x_k)^2}\right)} = 1.71269$$

sonucuna ulaşılır. $f(x)$ fonksiyonunun gerçek değeri $f(x) = 1.71828$ dir. Buradaki hata $|Gerçek\ değer - yaklaşık\ değer| = |1.71828 - 1.71269| = 0,00558$ şeklindedir.

4.2. Problem

$$y''(x) + y^{(0.7)}(x) + y(x) = f(x) \quad y(0) = y(1) = 0$$

homojen sınır koşullu lineer kesirli mertebeden sınır değer problemini ele alalım. Burada $f(x) = -12x^2 + 20x^3 - 2.71022x^{3.3} - x^4 + 3.15142x^{4.3} + x^5$ şeklindedir. Bu problemin tam çözümü $y(x) = x^4(x-1)$ olup, $L = 1$ için sinc Galerkin ve sinc sıralama yöntemlerini kullanalım.

İlk olarak sinc galerkin yöntemini inceleyelim, bu yöntem için gerekli olan matrisler

$$\mathbf{I}_3^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{I}_3^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{I}_3^2 = \begin{pmatrix} -\frac{\pi^2}{3} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{\pi^2}{3} & 2 \\ -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{\pi^2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} -0.12844 & 0.07292 & -0.01926 \\ -0.18747 & 0.22566 & 0.03668 \\ 0.02536 & -0.11809 & 0.28766 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} -0.41274 & 0.20264 & -0.19662 \\ 0.49458 & -0.83333 & 0.49458 \\ -0.19662 & 0.20264 & -0.41274 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.00510 & 0.01823 & -0.0007 \\ -0.00744 & 0.05641 & 0.00145 \\ 0.00100 & -0.02952 & 0.01142 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 0.00157 & 0 & 0 \\ 0 & 0.06250 & 0 \\ 0 & 0 & 0.00157 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -0.41627 & 0.22087 & -0.19739 \\ 0.48713 & -0.71441 & 0.49603 \\ -0.19562 & 0.17311 & -0.39974 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ve

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -0.00003 \\ -0.04040 \\ 0.01076 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Bu matrisler

$$\mathbf{Ac} = \mathbf{B}$$

sisteminde yerine yazılıp çözülürse

$$c_{-1} = 0.05000, c_0 = 0.07860, c_1 = -0.01735$$

yaklaşık çözümler elde edilir. Bu katsayılar $y_n(x)$ yaklaşık çözümünde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} y(x) \cong y_3(x) &= \frac{0,07860. \sin[\text{Log}[\frac{x}{1-x}]]}{\text{Log}[\frac{x}{1-x}]} + \frac{0,01735. \sin[\text{Log}[\frac{x}{1-x}]]}{-\pi + \text{Log}[\frac{x}{1-x}]} \\ &- \frac{0,05000. \sin[\text{Log}[\frac{x}{1-x}]]}{\pi + \text{Log}[\frac{x}{1-x}]} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

Şimdi sinc sıralama yöntemini ele alalım. Bu yöntem için gerekli olan matrisler

$$\mathbf{I}_3^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{I}_3^1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{I}_3^2 = \begin{pmatrix} -\frac{\pi^2}{3} & 2 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{\pi^2}{3} & 2 \\ -\frac{1}{2} & 2 & -\frac{\pi^2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 4.79250 & 0.94636 & -0.37543 \\ -0.83826 & 0.89433 & 0.32353 \\ 0.25590 & -1.77665 & 1.49419 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} -0.33333 & -0.08929 & 0.09530 \\ 0.20264 & -0.33333 & 0.20264 \\ 0.09530 & -0.08929 & -0.33333 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.00755 & 0.00149 & -0.00059 \\ -0.05239 & 0.05589 & 0.02022 \\ 0.00040 & -0.00280 & 0.00235 \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 0.00157 & 0 & 0 \\ 0 & 0.06250 & 0 \\ 0 & 0 & 0.00157 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -0.32420 & -0.08780 & 0.09471 \\ 0.15025 & -0.21493 & 0.22286 \\ 0.09571 & -0.09209 & -0.32940 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ve

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -0.00003 \\ -0.04040 \\ 0.01076 \end{pmatrix}$$

olup

$$\mathbf{Ac} = \mathbf{B}$$

sisteminin çözümünden

$$c_{-1} = -0.04338, c_0 = 0.08582, c_1 = -0.06926$$

elde edilir. Bu katsayılar $y_n(x)$ yaklaşık çözümünde yerine yazılırsa

$$y(x) \cong y_3(x) = \frac{0,08582. \sin[\text{Log}[\frac{x}{1-x}]]}{\text{Log}[\frac{x}{1-x}]} + \frac{0,06926. \sin[\text{Log}[\frac{x}{1-x}]]}{-\pi + \text{Log}[\frac{x}{1-x}]} + \frac{0,04338. \sin[\text{Log}[\frac{x}{1-x}]]}{\pi + \text{Log}[\frac{x}{1-x}]}$$

elde edilir.

4.3. Problem

$$y''(x) - xy'(x) + x^2y^{(0.3)}(x) = f(x) \quad y(0) = y(1) = 0$$

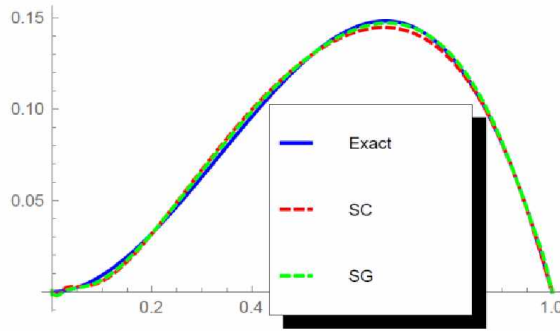
homojen sınır koşullu lineer kesirli mertebeden sınır değer problemini ele alalım. Burada $f(x) = -3x^3 + 2x^2 - 6x + 2 - \frac{6}{\Gamma(3.7)}x^{4.7} + \frac{2}{\Gamma(2.7)}x^{3.7}$ şeklindedir. Bu problemin tam çözümü $y(x) = x^2(1-x)$ olup N' 'nin farklı değerleri için sinc Galerkin ve sinc sıralama yöntemi ile elde edilen yaklaşık çözümlerin maksimum hataları Çizelge 4.1 ile sinc Galerkin ve sinc sıralama yöntemlerinin yaklaşık çözümlerinin sonuçları ise Çizelge 4.2 ile verilmiştir. Ayrıca sinc Galerkin ve sinc sıralama yöntemlerinin yaklaşık çözüm grafikleri Şekil 4.1 ile gösterilmiştir.

Çizelge 4.1. 4.3. Problemi için maksimum hatalar

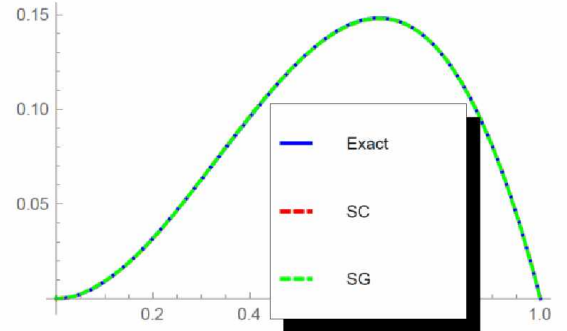
L	H_{SG}	H_{SC}
5	2.633×10^{-3}	1.604×10^{-3}
10	2.345×10^{-4}	7.453×10^{-5}
20	4.289×10^{-6}	1.073×10^{-6}
40	1.252×10^{-7}	3.962×10^{-9}

Çizelge 4.2. 4.3. Problemi için ($L = 20$) nümerik sonuçlar.

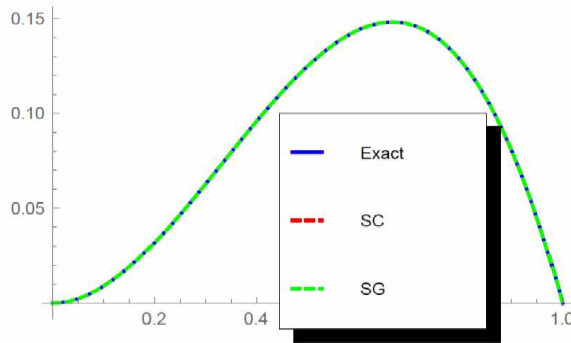
x	Tam Çözüm	SG Hata	SC Hata
0	0	0	0
0.1	0.009	3.144×10^{-6}	3.258×10^{-6}
0.2	0.032	2.793×10^{-6}	2.270×10^{-7}
0.3	0.063	6.967×10^{-6}	6.981×10^{-6}
0.4	0.096	9.308×10^{-6}	1.166×10^{-5}
0.5	0.125	2.933×10^{-6}	1.073×10^{-6}
0.6	0.144	8.611×10^{-6}	1.065×10^{-5}
0.7	0.147	1.022×10^{-6}	5.127×10^{-6}
0.8	0.128	1.066×10^{-8}	1.434×10^{-6}
0.9	0.081	8.207×10^{-7}	1.778×10^{-6}
1	0	0	0



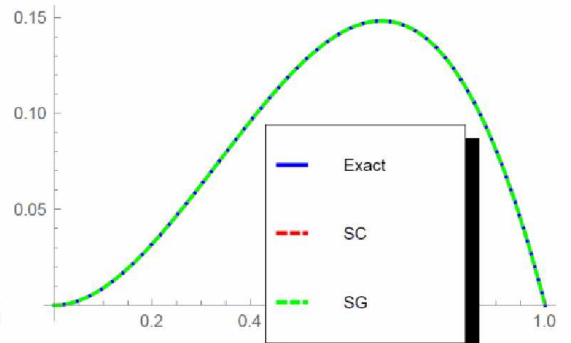
(a) $L = 5$ için



(b) $L = 10$ için



(c) $L = 20$ için



(d) $L = 40$ için

Şekil 4.1. 4.3. Problemi için grafikler (Alkan ve ark., 2016).

4.4. Problem

$$y''(x) + \frac{1}{x}y^{(0.7)}(x) + \frac{1}{x-1}y(x) = f(x) \quad y(0) = y(1) = 0$$

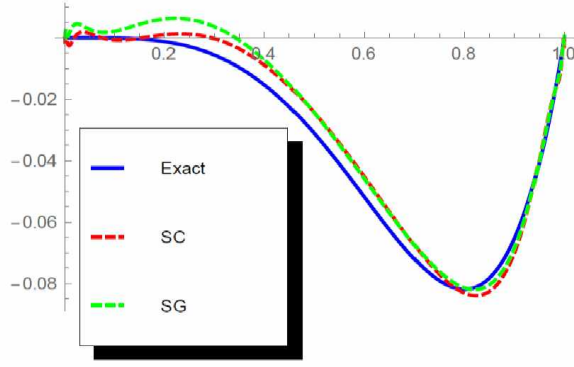
homojen sınır koşullu singüler lineer kesirli mertebeden sınır değer problemini ele alalım. Burada $f(x) = x^4 + 20x^3 - 12x^2 + \frac{120}{\Gamma(5.3)}x^{3.3} - \frac{24}{\Gamma(4.3)}x^{2.3}$ şeklindedir. Bu problemin tam çözümü $y(x) = x^4(x-1)$ olup N' 'nin farklı değerleri için sinc Galerkin ve sinc sıralama yöntemi ile elde edilen yaklaşık çözümlerin maksimum hataları Çizelge 4.3 ile sinc Galerkin ve sinc sıralama yöntemlerinin yaklaşık çözümlerinin sonuçları ise Çizelge 4.4 ile verilmiştir. Ayrıca sinc Galerkin ve sinc sıralama yöntemlerinin yaklaşık çözüm grafikleri Şekil 4.2 ile gösterilmiştir.

Çizelge 4.3. 4.4. Problemi için maksimum hatalar

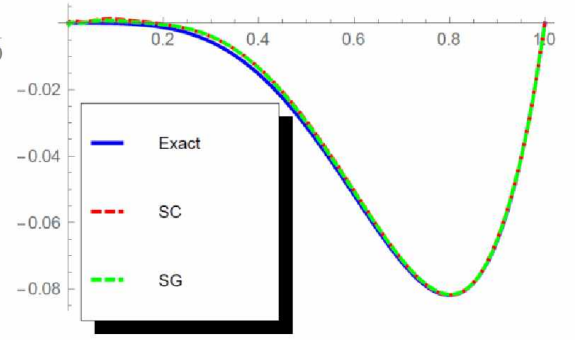
L	H_{SG}	H_{SC}
5	7.230×10^{-3}	6.760×10^{-3}
10	1.519×10^{-3}	1.690×10^{-3}
20	4.550×10^{-4}	4.118×10^{-4}
40	2.043×10^{-4}	7.567×10^{-5}

Çizelge 4.4. 4.4. Problemi için ($L = 20$) nümerik sonuçlar.

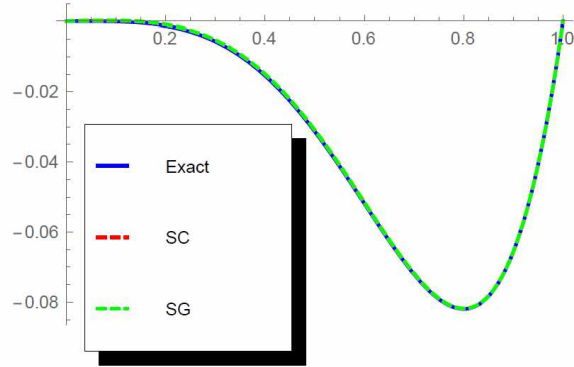
x	Tam Çözüm	SG Hata	SC Hata
0	0	0	0
0.1	0.009	2.754×10^{-4}	2.470×10^{-4}
0.2	0.032	3.777×10^{-4}	3.550×10^{-4}
0.3	0.063	4.340×10^{-4}	3.912×10^{-4}
0.4	0.096	4.497×10^{-4}	4.380×10^{-4}
0.5	0.125	4.125×10^{-4}	4.013×10^{-4}
0.6	0.144	3.380×10^{-4}	3.235×10^{-4}
0.7	0.147	2.558×10^{-4}	3.344×10^{-4}
0.8	0.128	1.402×10^{-4}	1.301×10^{-4}
0.9	0.081	5.324×10^{-5}	2.215×10^{-5}
1	0	0	0



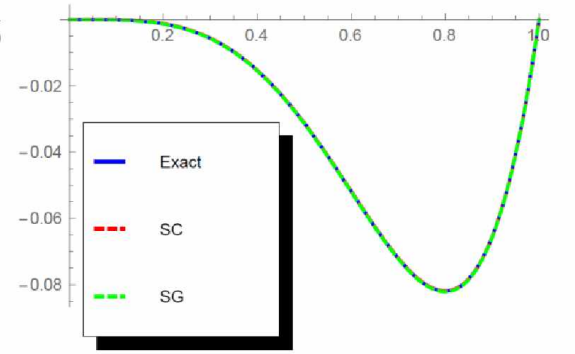
(a) $L = 5$ için



(b) $L = 10$ için



(c) $L = 20$ için



(d) $L = 40$ için

Şekil 4.2. 4.4. Problemi için grafikler (Alkan ve ark., 2016).

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tezde kesirli mertebeden iki noktalı sınır değer problemlerinin yaklaşık çözümü sinc Galerkin ve sinc sıralama yöntemleri ile incelendi. Kesirli mertebeden sınır değer problemlerinin çözümü için SG ve SC yöntemlerinin performansları karşılaştırıldı. Bu karşılaştırma tablo ve grafiklerle gösterildi. Bunun sonucunda sinc sıralama yönteminin sinc Galerkin yönteminden daha etkili bir yöntem olduğu görüldü.

Bu iki yöntem kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlere uygulanarak da karşılaştırılabilir.

KAYNAKLAR

- Alkan, S., 2014. Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümü. Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora Tezi. (84 sayfa)
- Alkan, S. and Secer, A., 2014. Application of Sinc-Galerkin Method for Solving Space-Fractional Boundary Value Problems. **Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering**, 10, 2015, Article ID 217348.
- Alkan, S. and Secer, A., 2015. Solving nonlinear boundary value problems by the Galerkin method with sinc functions. **Open Phys.**, 13, 389–394.
- Alkan, S. and Secer, A., 2015. Solution of nonlinear fractional boundary value problems with nonhomogeneous boundary conditions, **Appl. Comput. Math.** 14, 3, 284-295.
- Alkan, S., Serifoglu C, M., Yeloglu, T., 2016. Comparison of sinc methods for the solution of fractional boundary value problems, **Journal of Abstract and Computational Mathematics**. NTMSCI 1, 1, 13-23.
- Almeida, R. and Torres, D.F.M., 2011. Necessary and sufficient conditions for the fractional calculus of variations with Caputo derivatives, **Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.**, 16(3), 1490-1500
- El-Gamel, M., 2007. A comparison between the Sinc-Galerkin and the modified decomposition methods for solving two-point boundary value problems, **J Comput Phys**, 223, 369-383.
- El-Gamel, M. and Zayed, A. 2004. Sinc–Galerkin method for solving nonlinear boundary-value problems, **Comput. Math. Appl.**, 48: 1285-1298.
- Hajji, M.A. and Al-Mdallal, Q.M., 2013. Modified Sinc-Galerkin method for nonlinear boundary value problems, **Journal of Mathematics**, 10, 2013, Article ID 875930.
- Koonprasert, S. 2003. The sinc-galerkin method for problems in oceanography, montana state university. Bozeman, Montana.
- Lund, J. and Bowers, K., 1992. Sinc Methods for Quadrature and Differential Equations, **SIAM**. Philadelphia, 303, 92, 12139
- Mohsen, A. and El-Gamel, M., 2008. On the Galerkin and collocation methods for two-point boundary value problems using sinc bases, **Computers & Mathematics with Applications**, 56(4): 930-941.
- Podlubny, I., 1999. **Fractional Differential Equations**, Academic Press. Technical Universty of Kosice, Slovak Republic. San Diego, California 92101-4495, USA.
- Pourbashash, H., Kheiri, H., Akbarfam. A. J., 2014. Solving Singular ODEs in Unbounded Domains with Sinc-Collocation Method. **International Journal of Mathematical Modelling & Computations**. 04, 01, 35- 42
- Saadatmandi A., 2012. Numerical Study of Second Painleve Equation. **ISPACS**, 2012, Article ID cna-00157, 16, doi:10.5899/2012/cna-00157.

- Secer, A., Alkan, S., Akinlar, M. A. and Bayram, M., 2013. Sinc-Galerkin method for approximate solutions of fractional order boundary value problems, *Boundary Value Problems*, 1, 281.
- Vazqueze, L., Tanga, Y., Nie, N., Jimenez, S. and Li, M., 2009. Solving two-point boundary value problems of fractional differential equations by spline collocation methods, 1-10.
- Wang, Q., Homotopy perturbation method for fractional KdV equation, **Appl. Math. Comput.**, 2007, 190, 2, 1795-1802.
- Wang, Q., Homotopy perturbation method for fractional KdV-Burgers equation, **Chaos Soliton Fract.**, 2008, 35, 5, 843-850.

ÖZGEÇMİŞ

Yazar, 1992 yılında Hatay'ın Antakya ilçesinde doğdu. İlk ve orta öğrenimini Atatürk İlköğretim Okulu'nda, lise öğrenimini Antakya Lisesi'nde tamamladı. 2010 yılında lisans eğitimine başladığı Mustafa Kemal Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2014 yılında mezun oldu. 2014 yılında Fen Bilimleri Enstitüsü Enformatik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimine başladı. 2016 yılı itibari ile Antakya Madenboyu İmam Hatip Ortaokulu'nda Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktadır ve yüksek lisans eğitimine halen devam etmektedir.

EKLER

EK-1. Sinc_Galerkin.nb

```
Needs["PlotLegends`"];

y[x_]=x^4 (x-1);

μ0[x_]=1;μ1[x_]=0;μ2[x_]=1;n[x_]=1;

Clear[h]

Clear[h1]

phi1[x_]=Log[(x-z)/(1-x)];

w1[x_]=1/D[phi1[x],x];

x1[k_]=(Ek h1+z)/(1+Ek h1);

r[t_]=(t-z)-0.7 (h t Sin[(π (-h j+Log[t/(1-t)]))/h])/((1-t) (1/(1-t)+t/(1-t)2) (-h j π+π Log[t/(1-t)]));

L=20;

h1=π/√L;

cc[z_]=-1/Gamma[0.3] D[Simplify[N[h1 Sum[w1[x1[k]]r[x1[k]],{k,-L,L}]],TimeConstraint->5000],z];

g[x_]=Simplify[μ2[x]y''[x]+μ1[x]y'[x]+n[x]/Gamma[1-0.7] Integrate[(x-t)-0.7 D[y[t],t],{t,0,x}]+μ0[x]y[x]];

phi[x_]=Log[x/(1-x)];

M=20;

h=π/√M;

x[k_]=Ek h/(1+Ek h);

w[x_]=1/D[phi[x],x];

matson1[k_,j_]=cc[x[k]]//N;

matris2=Table[matson1[j,k],{k,-M,M},{j,-M,M}]/N;

g10[x_]=D[μ1[x]w[x],x];

g11[x_]=μ1[x]w[x]D[phi[x],x];

g20[x_]=D[D[μ2[x]w[x],x],x];

g21[x_]=D[D[phi[x],x],x] w[x]μ2[x]+2D[phi[x],x]D[μ2[x]w[x],x];

g22[x_]=D[phi[x],x]2 w[x]μ2[x];
```

```

dphi[x_]=D[phi[x],x];
I0=IdentityMatrix[2 M+1];
I1=Table[If[j==k,0,(-1)k-j/(k-j)],{j,-M,M},{k,-M,M}];
I2=Table[If[j==k,-π/3,(-2 (-1)k-j/(k-j)2],{j,-M,M},{k,-M,M}];
A10=DiagonalMatrix[Table[g10[x[k]]/dphi[x[k]],{k,-M,M}]];
A11=DiagonalMatrix[Table[g11[x[k]]/dphi[x[k]],{k,-M,M}]];
A20=DiagonalMatrix[Table[g20[x[k]]/dphi[x[k]],{k,-M,M}]];
A21=DiagonalMatrix[Table[g21[x[k]]/dphi[x[k]],{k,-M,M}]];
A22=DiagonalMatrix[Table[g22[x[k]]/dphi[x[k]],{k,-M,M}]];
W=DiagonalMatrix[Table[w[x[k]],{k,-M,M}]]/N;
matris3=DiagonalMatrix[Table[μ0[x[t]]w[x[t]]2,{t,-M,M}]]/N;
A=(I0.A20+1/h I1.A21+1/h2 I2.A22)-(I0.A10+1/h I1.A11)+matris3+matris2.W/N;
B=Transpose[{Table[w[x[t]]2*g[x[t]],{t,-M,M}]}]/N;
R=LinearSolve[A,B];
sincxx[x_]=Sin[π x]/(π x);
uSG[x_]=Sum[R[[k+M+1]]*sincxx[1/h (phi[x]-k h)],{k,-M,M}];

```

EK-2. Sinc_siralama.nb

```
Needs["PlotLegends`"]

y[x_]=x^4 (x-1);

μ0[x_]=1;μ1[x_]=0;μ2[x_]=1;n[x_]=1;

Clear[h];

M1=20;

h1=π/√M1;

phi1[t_]=Log[t/(z-t)];

phi[x_]=Log[x/(1-x)];

dphi1[t_]=D[phi1[t],t];

sinccc[t_]=If[t==0,1,Sin[π t]/(π t)];

sk[t_]=sinccc[1/h (phi[t]-k h)];

x1[k_]=(z*Ekh1)/(1+Ekh1);

f[t_]=sk[t];

F[t_]=(z-t)-0.7 D[f[t],t];

Frac[z_]=1/Gamma[1-0.7] h1 Sum[F[x1[j]]/dphi1[x1[j]],{j,-M1,M1}]/N;

f[x_]=Simplify[μ2[x]y''[x]+μ1[x]y'[x]+n[x]/Gamma[1-0.7] Integrate[(x-t)-0.7
D[y[t],t],{t,0,x}]+μ0[x]y[x]];

phi[x_]=Log[x/(1-x)];

dphi[x_]=D[phi[x],x];

M=20;

h=π/√M;

x[k_]=Ekh/(1+Ekh);

r[x_]=D[1/dphi[x],x]-μ1[x] 1/dphi[x];

s[x_]=μ0[x](1/dphi[x])2;

a[x_]=n[x](1/dphi[x])2;

I0=IdentityMatrix[2 M+1]

I1=Table[If[j==k,0,(-1)k-j/(k-j)],{j,-M,M},{k,-M,M}]

I2=Table[If[j==k,-π2/3,(-2 (-1)k-j/(k-j)2),{j,-M,M},{k,-M,M}]

fracmatrix[k_,j_]=Frac[x[j]]/N;
```

```

matrix=Table[fracmatrix[j,k],{k,-M,M},{j,-M,M}]

A=1/h^2 I2+1/h DiagonalMatrix[Table[r[x[k]],{k,-
M,M}]].I1+DiagonalMatrix[Table[a[x[k]],{k,-
M,M}]].matrix+DiagonalMatrix[Table[s[x[k]],{k,-M,M}]].I0

B=DiagonalMatrix[Table[f[x[k]] (1/dphi[x[k]])^2,{k,-M,M}]].Table[1,{k,-M,M}]/N

R=LinearSolve[A,B]

sincce[x_]=Sin[π x]/(π x);

uSC[x_]=Sum[R[[k+M+1]]*sincce[1/h (phi[x]-k h)],{k,-M,M}];

```

EK-3. Tablo_Grafik.nb

```
TableForm[Table[{i,y[i],Abs[y[i]-uSC[i]],Abs[y[i]-  
uSG[i]]},{i,0.1,0.9,0.1}],TableHeadings->{None,{"x","Exact","SC Error","SG  
Error"}}]  
  
Plot[{y[x],uSC[x],uSG[x]},{x,0,1},PlotLegend->{"Exact","SC","SG"},PlotStyle-  
>{Directive[Blue,Thick],Directive[Red,Dashed,Thick],Directive[Green,Dashed,Thick]}  
]
```