



**T.C.
MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

HADAMARD MATRİSLERİN SAYISAL BÖLGESİ

ASLI ATAKAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Antakya/HATAY

Ağustos-2013



**T.C.
MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

HADAMARD MATRİSLERİN SAYISAL BÖLGESİ

ASLI ATAKAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Antakya/HATAY

Ağustos-2013

MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HADAMARD MATRİSLERİN SAYISAL BÖLGESİ

ASLI ATAKAN
YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Doç. Dr. Ahmet İPEK danışmanlığında hazırlanan bu tez 13/08/2013 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Ahmet İPEK	Yrd. Doç. Dr. Turgut YELOĞLU	Yrd. Doç. Dr. Yener TEKELİ
Başkan	Üye	Üye

Bu tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.

Kod No:670

Doç. Dr. İsmail Hakkı KARAHAN

Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını ve tez üzerinde Yükseköğretim Kurulu tarafından hiçbir değişiklik yapılmayacağı için tezin bilgisayar ekranında görüntülendiğinde asıl nüsha ile aynı olması sorumluluğunun tarafıma ait olduğunu beyan ederim.

Aslı ATAKAN

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	III
ABSTRACT.....	IV
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	V
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	VI
1. GİRİŞ	1
1.1. Amaç ve Kapsam	12
2.ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....	13
3. MATERYAL VE YÖNTEM	16
3.1. MATERYAL	16
3.1.1. Matrislerin Özdeğerleri ve Özvektörleri	16
3.1.2. Özdeğer ve Özvektörün Özellikleri	20
3.1.3. Matrislerin Sayısal Bölgesi (Değerler Cismi)	29
3.1.3.1. Sayısal Bölgenin (Değerler Cisminin) Temel Özellikleri.....	35
3.1.3.2. Sayısal Bölgenin (Değerler Cisminin) Konveksliği.....	37
3.1.3.3. Sayısal Bölgenin Genelleştirilmesi	44
3.1.4. Hadamard Matrisler	58
3.1.4.1. Hadamard Matrislerin Denkliği	61
3.1.4.2. Bazı Hadamard Matrisleri Türetme Teknikleri.....	68
3.2. YÖNTEM.....	76
3.2.1. Hadamard Matrislerin Sayısal Bölgesi.....	76
3.2.2. Kompleks Hadamard Matrislerin k -Sayısal Bölgesi.....	90
3.2.3. Kompleks Hadamard Matrislerin q -Sayısal Bölgesi.....	92
4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA.....	94

5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	95
KAYNAKLAR	96
TEŞEKKÜR.....	98
ÖZGEÇMİŞ	99

ÖZET**HADAMARD MATRİSLERİN SAYISAL BÖLGESİ**

Tez, materyal ve yöntem olmak üzere iki kısımdan oluşmaktadır. Tezin materyal kısmında, matrisler için “özdeğer” ve “özvektör” kavramları tanımlanmakta, bu kavramlar bazı teorem, sonuç ve örneklerle pekiştirilmektedir. Karesel matrisler için sayısal bölge ve genelleştirilmiş hali k -sayısal bölge, q -sayısal bölge, c -sayısal bölge, C -sayısal bölge kavramları tanımlanmakta ve bazı özellikleri verilmektedir. Ayrıca Hadamard matrisler, Hadamard matrislerin kuruluşları, Hadamard matrislerin özellikleri ve denklikleri incelenmektedir. Tezin yöntem kısmında bazı Hadamard matrislerin klasik sayısal bölgeleri, herhangi bir $n \times n$ tipindeki Hadamard matrisin k -sayısal bölgesi ve q -sayısal bölgesi elde edilmektedir.

2013, 108 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Hadamard Matrisler; Matrislerin Sayısal Bölgesi; Hadamard Matrislerin Sayısal Bölgesi.

ABSTRACT**NUMERICAL RANGE OF HADAMARD MATRICES**

Thesis is consisted of two parts which are named as material and method. In the material part of thesis, the eigenvalue and eigenvector concepts for matrices are defined and these concepts are reinforced with some theorems, results and examples. The numerical range for the square matrices and its generalized forms; the k -numerical range, the q numerical range, the c -numerical range, the C -numerical range concepts are defined, and their properties are given. Also Hadamard matrices, constructions of Hadamard matrices, some properties of Hadamard matrices, and equivalence of Hadamard matrices are examined. In the method part of thesis, the classical numerical ranges of some Hadamard matrices, the k -numerical range and the q -numerical range of any $n \times n$ Hadamard matrices are obtained.

2013, 108 pages

Key Words: Hadamard Matrices; Numerical Range of Matrices; Numerical Range of Hadamard Matrices.

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$M_{m,n}(\square)$	$m \times n$ Tipinde Reel Matrisler Kümesi
$M_{m,n}(\square)$	$m \times n$ Tipinde Kompleks Matrisler Kümesi
$M_n(\square)$	$n \times n$ Tipinde Reel Matrisler Kümesi
$M_n(\square)$	$n \times n$ Tipinde Kompleks Matrisler Kümesi
$S + T$	S ve T Kümelerinin Toplamı
$A \otimes B$	A ve B Matrislerinin Kronecker Çarpımı
$A \oplus B$	A ve B Matrislerinin Direkt Toplamı
$\ A\ $	A Matrisinin Normu
$\text{iz}(A)$	A Matrisinin Köşegen Elemanları Toplamı
$\det(A)$	A Matrisinin Determinantı
$W(A)$	A Matrisinin Değerler Cismi
$H(A)$	A Matrisinin Hermityen Kısmı
$S(A)$	A Matrisinin Ters Hermityen Kısmı
$\sigma(A)$	A Matrisinin Özdeğerlerinin Kümesi
x^*	x Vektörünün Eşlenik Transpozu
$\bar{x}$	x Vektörünün Eşleniği
x^t	x Vektörünün Transpozu
C^*	C cebirsel eğrisinin duali
$\text{tr}(A)$	A matrisinin izi
$C(A)$	Sonlu A matrisi ile ilişkilendirilmiş cebirsel eğri
$C_o(A)$	A kümesinin konveks örtüsü
$W_k(A)$	A matrisinin k -sayısal bölgesi
$W_c(A)$	A matrisinin c -sayısal bölgesi
$W_C(A)$	A matrisinin C -sayısal bölgesi
$W_q(A)$	A matrisinin q -sayısal bölgesi

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 1.1. Hadamard matrislerden oluşturulmuş kaldırım süsü örneği.....	6
Şekil 1.2. Walshfonksiyonunun çizimi.....	10
Şekil 3.1. AX ile X vektörlerinin doğrusal olmaması.....	17
Şekil 3.2. AX ile X vektörlerinin doğrusal olması.....	17
Şekil 3.3. $\lambda > 1$ için X ile $\lambda X = AX$ vektörünün geometrik gösterimi	17
Şekil 3.4. $0 < \lambda < 1$ için X ile $\lambda X = AX$ vektörünün geometrik gösterimi	17
Şekil 3.5. $\lambda < 0$ için X ile $\lambda X = AX$ vektörünün geometrik gösterimi	17
Şekil 3.6. A_1 matrisinin sayısal görüntüsünün Maple ekran çıktısı	40
Şekil 3.7. A_1 matrisinin sayısal görüntüsünün farklı bir yöntemle çizilmiş Maple ekran çıktısı.....	41
Şekil 3.8. A_2 matrisinin sayısal görüntüsünün Maple ekran çıktısı.....	41
Şekil 3.9. A_2 matrisinin sayısal görüntüsünün farklı yöntemle çizilmiş Maple ekran çıktısı	42
Şekil 3.10. A_3 matrisinin sayısal görüntüsünün Maple ekran çıktısı	42
Şekil 3.11. A_3 matrisinin sayısal görüntüsünün farklı bir yöntemle çizilmiş Maple ekran çıktısı.....	43
Şekil 3.12. A_4 matrisinin sayısal görüntüsünün Maple ekran çıktısı.....	43
Şekil 3.13. A_4 matrisinin sayısal görüntüsünün farklı bir yöntemle çizilmiş Maple ekran çıktısı.....	44
Şekil 3.14.. Dışbükey küme.....	76
Şekil 3.15. Dışbükey olmayan küme	76
Şekil 3.16. A matrisinin sayısal görüntüsünün Maple ekran çıktısı	78
Şekil 3.17. A matrisinin sayısal görüntüsünün farklı bir yöntemle çizilmiş Maple ekran çıktısı.....	79
Şekil 3.18. B matrisinin sayısal görüntüsünün Maple ekran çıktısı.....	80

Şekil 3.19. B matrisinin sayısal görüntüsünün farklı bir yöntemle çizilmiş Maple ekran çıktısı.....	82
Şekil 3.20. C matrisinin sayısal görüntüsünün Maple ekran çıktısı	83
Şekil 3.21. C matrisinin sayısal görüntüsünün farklı bir yöntemle çizilmiş Maple ekran çıktısı.....	84
Şekil 3.22. E matrisinin sayısal görüntüsünün Maple ekran çıktısı	85
Şekil 3.23. E matrisinin sayısal görüntüsünün farklı bir yöntemle çizilmiş Maple ekran çıktısı.....	86
Şekil 3.24. G matrisinin sayısal görüntüsünün Maple ekran çıktısı.....	88
Şekil 3.25. G matrisinin sayısal görüntüsünün farklı bir yöntemle çizilmiş Maple ekran çıktısı.....	88
Şekil 3.26. J matrisinin sayısal görüntüsünün Maple ekran çıktısı	89
Şekil 3.27. J matrisinin sayısal görüntüsünün farklı bir yöntemle çizilmiş Maple ekran çıktısı.....	90
Şekil 3.28. J matrisi için $W_2(J)'$ in Maple ekran çıktısı.....	91
Şekil 3.29. C matrisi için $W_3(C)'$ in Maple ekran çıktısı.....	92

1.GİRİŞ

Sayısal bölge; özdeğerler kümesi olan spektrum gibi $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrisi ile ilişkilendirilen ve

$$W(A) = \{z^*Az : \|z\|=1, z \in \mathbb{C}^n\}$$

ile tanımlanan bir kompleks sayılar kümesidir.

Sayısal bölge aynı zamanda değerler cismi, Wertovorrat, Hausdorf bölgesi, değerler bölgesi gibi isimlerle de anılmaktadır. Ama artık günümüzde daha çok sayısal bölge ve değerler cismi kavramları kullanılmaktadır.

Sayısal bölge kavramı, 1932 de Marshall Stone tarafından kompleks bir H Hilbert uzayında T operatörünün sayısal bölgesi olarak ifade edilen

$$W(T) = \{\langle Tz, z \rangle : z \in H, \|z\|=1\}$$

ile tanımlanmış $\mathbb{C}$ kompleks düzleminin alt kümesi için kullanılmıştır.

Bu tanım sonlu mertebeli $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrisinin sayısal bölgesi göze alınarak

$$W(A) = \{z^*Az : z^*z=1, z \in \mathbb{C}^n\}$$

biçiminde sınırlandırılmış ve bu küme A 'nın sayısal bölgesi olarak ifade edilmiştir. Bu küme oldukça dikkat çekicidir. Çünkü belirtilen küme bir dönüşüm gibi A hakkında özellikle de A 'nın özdeğerleri ve A 'nın öz uzayı hakkında bilgi vermektedir.

Bunun nedeni de

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(\lambda I_n - A) = 0\}$$

kümesi ile tanımlanan A 'nın spektrumu A 'nın özdeğerlerini içerir. x, λ ' ya karşılık gelen bir özvektör olarak alındığında,

$$\lambda x = Ax \text{ ve } x \neq 0$$

olması durumu ile birlikte

$$\lambda \frac{x}{\|x\|} = A \frac{x}{\|x\|}$$

eşitliğine ulaşılır. $y = \frac{x}{\|x\|}$ denilirse, y vektörü A 'nın $\|y\|=1$ koşullu bir özvektörü olur ve A 'nın her bir özdeğeri için $\lambda = y^*Ay \in W(A)$ dır. Böylece $\sigma(A) \subseteq W(A)$ sonucu elde edilir.

Bunun yanında özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ olan $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrisinin,

$$\rho(A) = \max_{1 \leq j \leq n} |\lambda_j|$$

ile tanımlanan spektral yarıçapı,

$$r(A) = \max_{|x|=1} |\langle Ax, x \rangle|$$

ile tanımlanan sayısal yarıçapı ve

$$\|A\| = \max_{|x|=1} |Ax|$$

ile tanımlanan spektral normu çoğu durumda, matris hakkında istenen bilgileri vermede ve matrisle ilgili var olan bir problemi çözmede kullanılan temel argümanlardır. Bu üç argüman arasında

$$\rho(A) \leq r(A) \leq \|A\| \leq 2r(A)$$

bağıntısı olduğundan bu argümanları kapsayan $W(A)$ önemli bir araştırma konusu olmuştur.

Sayısal bölgenin tayini; operatör teori, fonksiyonel analiz, C^* -cebiri, Banach cebiri, matris normları, eşitsizlikler, sayısal analiz, pertürbe teori, operatörün yakınsaklık özelliklerinin belirlenmesi, fonksiyonel denklemlerin çözümlenmesi, operatör trigonometri, model teori, indirgeme teorisi, matris polinomlarının ayrışımı, matris polinomları, sistem teori, kuantum fiziği gibi uygulamalı bilimin bir çok branşıyla ilgili uygulamalara sahiptir.

Sayısal bölge, sayısal yarıçap kavramları ve bu kavramların genelleştirilmeleri üzerine oldukça fazla çalışma vardır (Horn, 1991; Gustafson, 1997).

Halen de çeşitli araştırma grupları tarafından yürütülen bir çok araştırma projeleri mevcuttur. “<http://www.ams.org/mathscinet/search.html>” matematik bilim sitesi üzerinde sayısal bölge (veya değerler cismi) ve sayısal yarıçap konuları etrafında 500’ü aşkın bilimsel çalışma ve proje yer almaktadır. Ayrıca bir çok doktora tezinin tamamı veya bir kısmı bu konulara adanmıştır. Bazı monografiler, dergilerin

bazı özel sayıları, çoğu matematik ders kitaplarının bazı bölümleri bu konulara ayrılmıştır (Bonsall and Duncan, 1971; Bonsall and Duncan, 1973; Bonsall and Duncan, 1980; Gustafson and Rao, 1997; Halmos, 1982; Horn and Johnson, 1991; Istratescu, 1982; Sun and Stewart, 1990). Konu üzerine araştırma çalışmaları sürekli olarak saygın matematik dergilerinde görülmekte ve konu üzerine konferanslar düzenlenmekte ve konuşmalar yapılmaktadır.

Bazı bilim alanlarının hangi kısımlarında bu konuya gereksinim duyulduğuna değinelim:

- **Kuantum hesaplama ve kuantum kontrol**

Kuantum hesaplama ve kuantum kontrol bilim alanı ile ilgili olarak en heyecan verici gelişmelerden biri; $X^*X = I_k$ ve $X^*AX = zI_k$ olacak şekilde $n \times k$ tipinde X matrisinin varlığını sağlayan z kompleks sayılarından oluşan küme olarak tanımlanan rank- k sayısal bölge çalışmasıdır. Bu çalışmaya, kuantum hata doğrulama kodları üzerine yapılan çalışmalar destek vermektedir. Ayrıca bir matrisin C -sayısal bölgesi; NMR ile ilgili olan kuantum kontrol problemleri üzerine çalışmak için faydalı bir araçtır.

- **Operatör teori ve fonksiyonel analiz**

Hilbert ve Banach uzaylarında tanımlanan lineer operatörler üzerine çalışırken, sayısal bölge ve sayısal yarıçap tayinleri çok önem arz etmektedir. Sayısal bölge ve sayısal yarıçap kavramları; m -konveks cebirleri, topolojik- $*$ -cebirleri, H -lokal konveks uzayları, Krein uzayları, Wachs uzayları, gerçel kuaterniyonlar üzerindeki iç çarpım uzayları gibi daha genel uzaylarda tanımlanan doğrusal ve doğrusal olmayan operatörler üzerine çalışma yapmak için vazgeçilmez kavramlardır. Ayrıca, yarı hiponormal operatör, harmonik sembolü Toeplitz operatörü, üç bant operatörü, blok kaydırma operatörü, kuaterniyon operatörü gibi özel operatörlerin sayısal bölgelerinin tayini üzerine çalışmalarda oldukça fazla ve halen devam etmektedir. Birçok durumda özel operatörleri, yarı adjoint, normal ve üniter olarak sınıflandırmak için ve ayrıca Banach- $*$ -cebirlerini karakterize etmek için kullanılan bir araçtır sayısal bölge tayini konusu.

- **Doğrusal cebir**

A herhangi n -kare kompleks matris ve $K(A)$ da belirli bir matris fonksiyonu ile ilgili olan A' 'nın indirgenmiş operatörü olmak üzere; A' 'nın ayrılabilir sayısal bölgesi, ayrılabilir birim vektörler üzerinde hareket eden x^* vektörü için $\langle K(A)x^*, x^* \rangle$ formundaki kompleks sayıların kümesidir. Klasik sayısal bölgeye benzer olarak ayrılabilir sayısal bölge, indirgenmiş $K(A)$ operatörü üzerine çalışma yapmada faydalı bir araçtır. Ayrıca ayrılabilir sayısal yarıçapla ilgili olan sonuçlar bize her zaman ilginç ve değerli matris eşitsizlikleri sunmaktadır.

- **Spektrum bölgesi ve uygulamaları**

Matrisin klasik sayısal bölgesi, her zaman kendisinin spektrumunu içermektedir. Bunun bir sonucu olarak, matrisin özdeğerlerinin bulunduğu bölgeyi tayin etme ile yakından ilgili olan “matrislerin kararlılığı” ve “matrislerin tekil olmaması” gibi konular için büyük önem taşımaktadır. Daha genel uzaylarda klasik sayısal bölge kavramı genelleştirilerek doğrusal ve doğrusal olmayan operatörler üzerine spektra çalışmaları literatürde mevcuttur ve halen de devam etmektedir. Matrisin spektrumuna ek olarak sayısal bölge, pozitif tanımlı matrislerin genelleştirilmiş özdeğerlerinin pertürbe edilmesi alanında da önemli bir araçtır.

- **Kuantum fiziği**

A ve C sabit matrisler ve U , üniter matris olmak üzere kuantum fiziğindeki birçok problem CU^*AU formunda ifade edilmektedir. $\text{iz}(CU^*AU)$ şeklindeki kompleks sayıların kümesi, A' 'nın C -sayısal bölgesi olarak bilinmektedir ve son yıllarda bir çok fizikçi bu bölgenin tayini ile ilgili çalışmalar yapmışlardır. Kuantum dinamiği alanında konu ile ilgili çalışma, hermityen olmayan durumlar arasındaki üniter dönüşümlerin etkililiği üzerinedir ve bu etkililiğin belirlenmesi, belirli A ve C nilpotent matrisleri için A' 'nın C -sayısal bölgesinin tayin edilmesi ile mümkündür. Ayrıca bir matrisin sayısal bölgesinin tayini, kuantum fiziğindeki p -etkileşimli q -parça sistemlerinin çalışma alanı ile yakından ilgilidir.

- **Sayısal analiz**

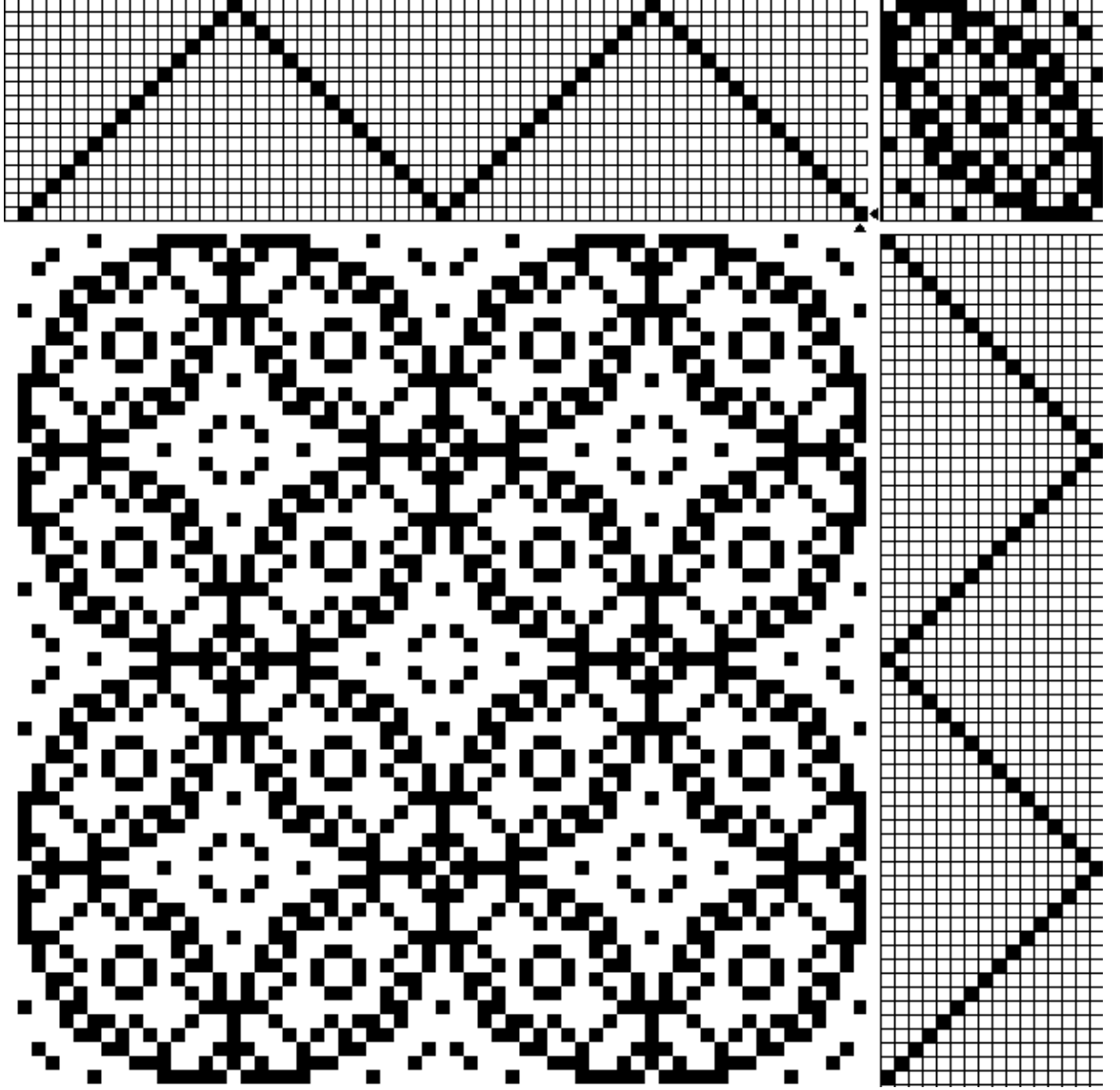
Sayısal bölge tayini, çeşitli algoritmaların yakınsaklık oranını belirlemede önemli bir rol oynamaktadır. Bu konu hakkında mükemmel bir kaynak olarak (Gustafson and Rao, 1997) gösterilebilir.

Sayısal bölge kavramının bu kadar çok alanda kullanılmasından kaynaklı bu kavram üzerine ve bu kavramı genelleştirme üzerine bir çok araştırma ve çalışma yapılmıştır.

Bu çalışmada ise, Hadamard matrislerinin sayısal bölgesi ve bazı genelleştirilmeleri araştırılmıştır.

Girdileri 1 ya da -1 olan ve $HH^t = nI_n$ eşitliğini sağlayan $n \times n$ tipindeki matrisler Hadamard matrisleri olarak isimlendirilirler. Bu matrislere, başta iletişim (özellikle mobil iletişim), istatistik, projektif geometri, kaldırım süslemesinde, tamamlanamamış blok tasarımlar ve optimal kontrol uygulamasında, blok şifrelerde kullanılan doğrusal dönüşümlerin incelenmesinde, kodlar teorisinde hata düzelten kodlar yaratmada bilgisayar mühendisliğinde ve kuantum kapılarında olmak üzere bir çok alanda karşılaşılmaktadır (Selda Küçükçiftçi, 2004; Bozkurt B. ve arkadaşları; Fikri Gökpınar, 2007). Yarlaga ve Hershey (1997) tarafından Hadamard matrislerin modern telekomünikasyon ve dijital sinyal işlemede birçok uygulamaları bulunmuştur.

Ayrıca Hadamard matrislerinin birden fazla kod bölümü uygulamaları için yayılan dizileri tasarım erişimi (CDMA) doğrudan dizisi (DS) spektrum yayılım (SS) sistemleri Lam ve Tantarana (1994) kullanımını göz önüne alacağız.



Şekil 1.1. Hadamard matrislerden oluşturulmuş kaldırım süsü örneği
(Allan Wentink, 2004)

- **Hadamard matrislerden elde edilen hata kontrol kodları**

Hadamard matrislerden elde edilen kodların hata düzeltme kapasitelerini ilk olarak gösteren 1951 de Plotkin idi (Plotkin, 1960). Daha sonra Bose ve Shrikhande (1959) tarafından incelenmiş ve Hadamard matrisleri ile simetrik blok kodu tasarımı arasındaki bağlantıyı göstermişlerdir. Bu daha sonra Harmuth tarafından genişletilmiştir (1960).

Teorem 1. 1. Eğer bir $n \times n$ Hadamard matrisi var ise $2n$ kod vektörleri ile bir ikili kod vardır ve en küçük uzaklık $n/2$ dir (Bunun bir lineer kod olması gerekli değildir.).

H Hadamard matrisinden bir blok kod dizaynı $\begin{pmatrix} H \\ -H \end{pmatrix}$ ile kurulur (Peterson (1961)).

Böyle bir kodun en küçük uzaklığının $n/2$ olmasından, kodlar verilen bir şifrenin uzunluğu için maksimum kod hata düzeltme kapasitesine sahip olan Hadamard matrislerden ortaya çıkarılır.

Sondaj makinalarının güneş sisteminin dışındaki gezegenleri ve Marsı dolaşması sırasında bu kodlar Dünya'ya geri şifrelenen bilgilerin dönüşümü olarak Mariner ve Voyager sondaj makinelerinde 1960 larda kullanıldı. Dünya ve bu gezegenler arasındaki anormal uzaklıktan dolayı, sadece sinyalin dünyaya gelişi sırasında önemli bir zamanı almakla kalmaz aynı zamanda sinyal çok zayıftır.

Sadece kodların hata düzeltme yeterliliklerinin gücünden dolayı, Satürn, Uranüs, Neptün ve onların uydularının yüksek nitelikteki görüntüleri uygun bir şekilde deşifre edileceği için bu sinyal mümkündür. Maddenin gerçekliği gibi hata düzeltme kodlarının gücünü planlamada Hadamard matrislerinin uygulanması, yükselen meraklardan olan Hadamard matrislerin yeni kurulumlarının bulunması ile ilgili faktörlerden bir tanesiydi (Yani Ang et al. (2003), Baumert and Hall (1965), Tryn(1972)).

- **Hadamard matrisleri ve Walsh fonksiyonları**

Literatürde Walsh fonksiyonlarının Szabatin(1982) ve Yarlagadda ve Hershey' ye (1997) ait çift tanımı vardır. Burada $[0,1]$ aralığını vereceğiz.

$$Wal(0, t) = x_0(t) = 1, 0 \leq t \leq 1$$

$$Wal(1, t) = x_1(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 0.5 \\ -1, & 0.5 \leq t < 1 \end{cases}$$

$$Wal(2, t) = x_2(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 0.25 \text{ ve } 0.75 \leq t \leq 1 \\ -1, & 0.25 \leq t < 0.75 \end{cases}$$

$$Wal(3, t) = x_3(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 0.25 \text{ ve } 0.5 \leq t < 0.75 \\ -1, & 0.25 \leq t < 0.5 \text{ ve } 0.75 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Ve yinelenerek $m=1,2,\dots$ ve $k=1,\dots,2^{m-1}$ için,

$$Wal(2^{m-1}+k-1, t) = x_m^k(t)$$

$$x_{m+1}^{2k-1}(t) = \begin{cases} x_m^k(2t), & 0 \leq t < 0.5 \\ (-1)^{k+1} x_m^k(2t-1), & 0.5 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$$x_{m+1}^k(t) = \begin{cases} x_m^k(2t), & 0 \leq t < 0.5 \\ (-1)^k x_m^k(2t-1), & 0.5 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Bu yenilenme formülü herhangi m ve k değerleri için Walsh fonksiyonlarının tanımı için kullanılabilir ve ilk sekiz Walsh fonksiyonunun çizimi Şekil 2. de verilmiştir. Walsh fonksiyonları aynı zamanda Sylvester-Hadamard matrisleri kullanarak tanımlanabilir. 2^m mertebeli böyle bir H_{2^m} matrisini kullanarak $Wal(0, t)$ den $Wal(2^m - 1, t)$ ye kadarki fonksiyonlar aşağıda verilen yöntemle tanımlanabilir. Eğer $[0,1]$ aralığını

$$\left[0, \frac{1}{2^m}\right), \left[\frac{1}{2^m}, \frac{2}{2^m}\right), \dots, \left[\frac{2^m-1}{2^m}, 1\right)$$

gibi 2^m tane aralığa ayırırsak H_{2^m} matrisinin i . satırı ile tanımlanan Walsh fonksiyonu;

Eğer

$H_{2^m}(i, k + 1) = 1$ ise $[k/2^m, (k + 1)/2^m]$ aralığında 1 değerini alır, diğer durumlarda ise -1 değerini alır.

Aşağıda Hadamard matrisleri ve Walsh fonksiyonları arasındaki bağıntıya bir örnek verilmektedir. H_8 matrisi şöyle elde edilmiştir :

$$H_8 = \begin{pmatrix} H_4 & H_4 \\ H_4 & -H_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_2 & H_2 & \vdots & H_2 & H_2 \\ H_2 & -H_2 & \vdots & H_2 & -H_2 \\ \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots \\ H_2 & H_2 & \vdots & H_2 & H_2 \\ H_2 & -H_2 & \vdots & H_2 & -H_2 \end{pmatrix}$$

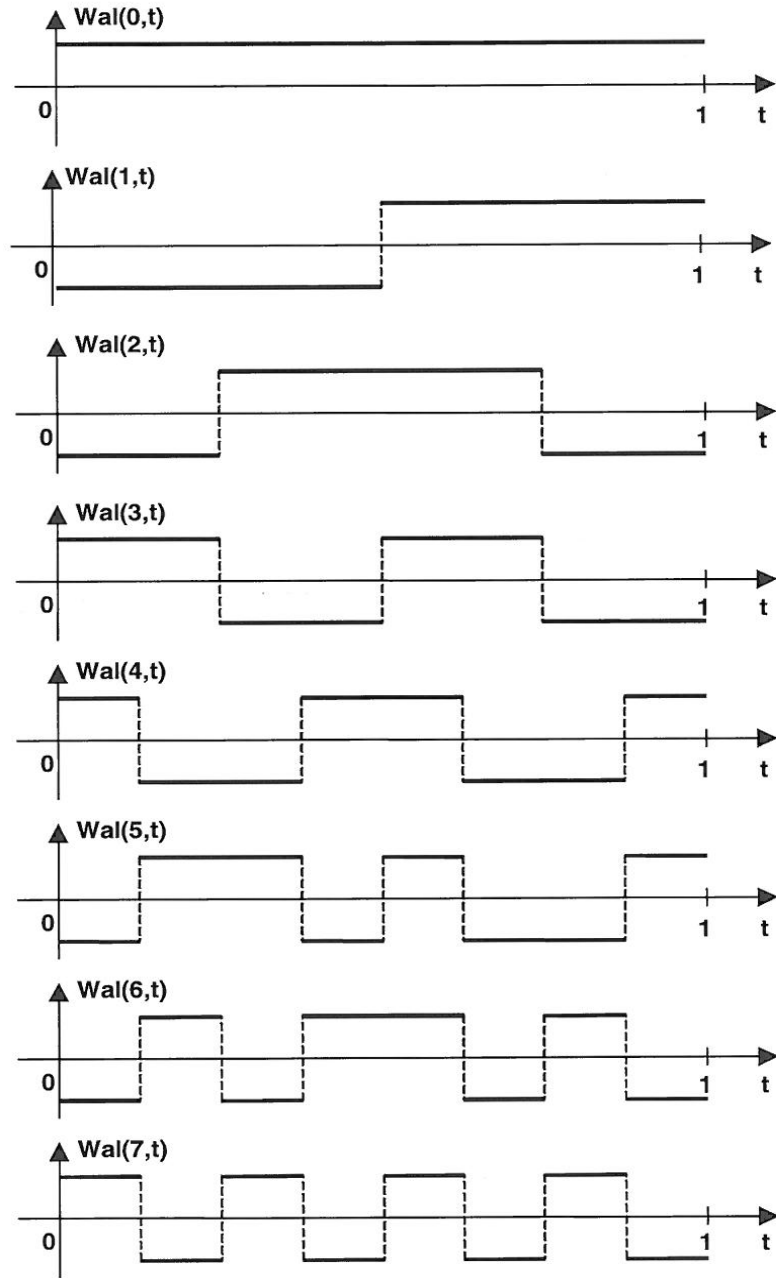
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & \vdots & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & \vdots & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & \vdots & 1 & -1 & -1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \vdots & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & \vdots & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & \vdots & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & \vdots & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Şekil 1.2. ve H_8 in satırları karşılaştırılarak H_8 ile Walsh fonksiyonları arasındaki eşleştirme aşağıdaki gibidir.

$$H_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} Wal(0,t) \\ Wal(7,t) \\ Wal(3,t) \\ Wal(4,t) \\ Wal(1,t) \\ Wal(6,t) \\ Wal(2,t) \\ Wal(5,t) \end{matrix}$$

Genel olarak H_{2^m} matrisinin i . satırı k . Walsh fonksiyonu $Wal(k,t)$ olarak tanımlanır. Burada k ifade edilen satırdaki elemanların işaret değişimini göstermektedir.

Walsh fonksiyonları, ortogonal fonksiyonların komple kümesini oluşturmaktadır (Walsh 1923). Bu her fonksiyonun $[0,1]$ aralığında tanımlandığı anlamına gelir.



Şekil 1.2. Walsh fonksiyonunun çizimi

- **Hadamard matrislerin ekran özellikleri**

Eğer p kolonlarının her seçimi için, 2^p satır vektörlerinin her biri sadece bir kere ortaya çıkarsa N satırları ve k sütunları gösteren semboller olmak üzere (N, k, p) dizilimi bir ekran dizaynıdır. Ekran dizaynı (q) çarpanlarının büyük sayıları incelediği durumlarda kullanışlıdır. Ama bunlardan sadece bir kaç k umulduğu kadar önemlidir. Ekran dizaynı sadece belirli ana etkiler için geleneksel olarak kullanılan Hadamard matrislerden doğar.

Genelliği kaybetmeksizin bir Hadamard matrisin ilk kolonunun sadece birlerden oluştuğunu farz edebiliriz. Sonra bu kolonu yer değiştirerek $(N, N-1, p)$ ekran dizaynını $p \geq 2$ iken elde edebiliriz. Bu formdaki bazı ekran dizaynları Placket ve Burman tarafından sunulmuştur ve bunlar Placket-Burman dizaynları olarak ifade edilmiştir (Lin (1993), Tang ve Wu (1997), Wu (1993)).

- **Hadamard matrisleri ve optimal tartım dizaynları**

Herhangi bir eğilimi olmayan kimyasal (iki gözlü terazi) terazide n defa ölçümle p tane nesnenin tartıldığını farz edelim. Eğer j . nesne i . ölçümde sol göze yerleştirilmiş ise $x_{ij} = 1$; Eğer j . nesne i . ölçümde sağ göze yerleştirilmiş ise $x_{ij} = -1$ olsun. Böylece $n \times p$ mertebeli $X = (x_{ij})$ matrisi tam olarak ağırlık deneyini karakterize etmiş olur.

P nesnelerinin hilesiz gerçek ağırlıklarını $w_1, w_2, \dots, w_p$ ile gözlemler ve n tane tartımın sonuçlarını ise $y_1, y_2, \dots, y_n$ ile gösterelim. Böylece gözlemler göstermiştir ki sol gözdeki ağırlık i . ölçümde y_i kadar sağ gözdekinden daha büyüktür. Sırasıyla W ve Y ,

w 'nın ve y 'nin kolon vektörlerini göstermek üzere , gözlemler bir lineer model ile

$$Y = XW + e$$

eşitliğini verir. Burada $e, e_1, e_2, \dots, e_n$ nin sütun vektörü ve e_i gözlemlenen ile umulan gözlemler arasındaki hatadır. Farz edelim ki e , sıfır ortalama ve bir kovaryans matris $\sigma^2 I$ ile rastgele vektördür. Tartılırken nesnelerin karşılaştırılan kütlelerden küçük kütlelere sahip olması durumunda eylemsizlikten dolayı kendini dengeleyeceği mantıklı bir tahmin olacaktır.

Hotelling (1944), herhangi bir ölçüm dizaynının $\hat{\omega}_i$ değişiminin σ^2/n den daha küçük olamayacağını göstermiştir. Eğer X ölçüm dizaynı, her σ^2/n minimum değişimli ağırlıkları hesap edebiliyorsa optimal deriz. Kiefer' in çalışması göstermiştir ki eğer Hadamard matrislerden alınan kolonları ortogonal olan ± 1 lerden oluşan $n \times p$ lik bir matris ise kimyasal terazi ölçüm X dizaynı optimaldir.

Yukarıda Hadamard matrislerin kullanıldığı belli başlı konuları ele aldık ama hadamard matrisler daha bir çok yerde kullanılmaktadır. Bundan dolayı yıllarca bilim adamları, matematikçiler Hadamard matrisler üretmeye çalışmışlar ve Hadamard matrisi kurma yöntemleri geliştirmeye çalışmışlardır.

Bizde Hadamard matrisler ve sayısal bölge (değerler cismi) hakkında bilgi verip aynı zamanda bu iki kavramın birleşimi yani Hadamard matrislerin sayısal görüntüsü nedir? sorusuna yanıt arayarak, araştırmalarımız sonucunda elde ettiğimiz bilgi ve sonuçları paylaşmaya karar verdik.

1.1. Amaç ve Kapsam

Hadamard matrisler ve kompleks Hadamard matrislerin sayısal bölgesini ve genelleştirilmiş sayısal bölgesini bulmak amacımızdır.

Matrisler için “özdeğer” ve “özvektör” kavramlarının tanımlanmaları ve hesaplanmaları, karesel matrislerin “değerler cismi” ve “sayısal görüntü (sayısal bölge)”, genelleştirilmiş sayısal bölge, hadamard matrisleri, hadamard matrislerin oluşturulması, dışbükey örtü gibi kavramlarının tanımlanıp genel olarak bu kavramların temel özelliklerinin incelenmesi, hadamard matrislerin sayısal bölgeleri (veya değerler cisimleri) için elde edilen bulguların sunulması çalışmanın kapsamını oluşturmaktadır.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

A , $n \times n$ tipinde kompleks bir matris olmak üzere A nın sayısal bölgesi $W(A) = \{z^*Az : \|z\|=1, z \in \mathbb{C}^n\}$ şeklinde tanımlanmaktadır. Klasik sayısal bölge üzerinde bilinen sonuçları genelleştirilen tridiagonal matrisin C -sayısal bölgesinin eliptik bir disk olabilmesi için gerekli koşullar verilmektedir (Chien and Nakazato, 2001). Li ve Ark. (2002), negatif olmayan bir matrisin sayısal bölgesi için Perron-Frobenius sonuçlarının hemen hemen bütün gelişimini sunmuşlardır.

Negatif olmayan matrislerin sayısal bölgeleri düzenli aşağı bükey çokgen olarak elde edilmekte ve bazı problemler ortaya atılmaktadır.

Sürekli kesir matrisin sayısal bölgesi eliptik bir disk olarak elde edilmiştir (Chien and Huang, 2001). Matrisin klasik sayısal bölgesinin birer genelleştirilmesi olarak değerlendirilen cebirsel sayısal bölge ve M -sayısal bölge gibi kavramlar türetilmiştir. Bu genelleştirilmiş sayısal bölge kavramlarıyla birlikte yeni tanımlar üretilmiştir.

Kısmi diferansiyel denklemler ve sınır değer problemlerinin sayısal çözümleri için kararlı metotlar üretmede, sayısal analizdeki kararlılık incelemesi ile sayısal bölgelerin ilişkisi dikkate alınmaktadır. Ayrıca kararlı tahmin ediciler hakkında varsayımlar sunulmaktadır (Spijker, 1993).

Matris polinomlarının spektrumlarının sınırlanması ile, kuadratik sayısal bölgeler arasındaki ilişkilere değinilmektedir (Guo ve ark., 2009).

Eiermann, elemanları kapalı formda

$$a_{ij} = \begin{cases} a_{i,i+1} = a, & i = 1, 2, 3, \dots, n-1 \\ a_{i+1,i} = b, & i = 1, 2, 3, \dots, n-1 \\ a_{ij} = 0, & |i-j| > 1 \end{cases}$$

ile tanımlanan ve açık bir şekilde

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b & 0 & a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & 0 & a & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \dots & \dots & 0 & b & \ddots \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{C}$$

ile verilen $A_1 = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$ kompleks üç bant matrisin değerler cisminin

$$W(A_1) = \{z \in \mathbb{C} : z = \cos(\frac{\pi}{n+1})(ae^{-i\theta} + be^{i\theta}), 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

ile tanımlanan bir eliptik disk olduğunu gösterdi. (Eiermann, 1993)

Eiermann' ın bulduğu sonuçların bir neticesi olarak Chien ve Huang (Chien and Huang, 2001)

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & \ddots \end{bmatrix}_{n \times n}$$

matrisinin sayısal bölgesini elde etmiştir. A_2 matrisinin belirttiği küme

$$W(A_2) = \left\{ z \in \mathbb{C} : z = 2i \sin \theta \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right), 0 \leq \theta < \pi \right\}$$

şeklindedir.

Chien ve Huang' ın aynı çalışmasında A_3 matrisinin sayısal bölgesi kanıtlanmıştır.

$$A_3 = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & a & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & b & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & \ddots \end{bmatrix}_{n \times n}, a, b \in \mathbb{R}$$

Merkezi $(a+b)/2$ olan bir eliptik diskdir. Yatay eksen uzunluğu $|a-b|$, dikey eksen uzunluğu $4\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$ dir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde tezin özgün sonuçlarını içeren yöntem bölümü için gerekli ön bilgiler verilecektir.

3.1. Materyal

Bu bölümde, matrisler için “özdeğer” ve “özvektör” kavramları tanımlanacak ve hesaplanmalarına değinilecek, matrisler için “ sayısal bölge (değerler cismi) ” kavramları tanımlanıp genel olarak sayısal bölge’ nin özellikleri verilecektir. Ayrıca Hadamard matrisleri ve Hadamard matrislerinin özellikleri de verilecektir.

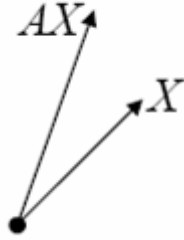
3.1.1. Matrislerin Özdeğerleri ve Özvektörleri

Matemette, özdeğer, özvektör ve özuzay, doğrusal cebir alanında birbiriyle ilişkili kavramlardır. Doğrusal cebir, vektörler üzerine uygulanan matrisler şeklinde temsil edilen doğrusal dönüşümleri araştırır. Özdeğerler, özvektörler ve özuzaylar, bir matrisin karakteristikleridir ve matris hakkında önemli bilgiler verirler. Matrislerin çarpanlarına ayrılmasında kullanılabilirler. Uygulamalı matematik alanlarında olduğu kadar finans ve kuantum mekaniğinde de uygulama alanları vardır.

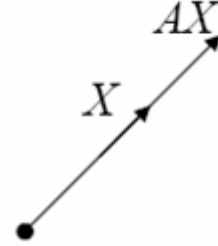
Özellikle son yıllarda matris yöntemleri üzerinde yapılan çalışmaların fizik, mekanik, yöneylem ve ekonomi gibi uygulamalı bilimlerde verimli bir ortam sağlaması, matrislerin özdeğer ve özvektörleri konusunun önemini artırmıştır. Uygulamada kullanılan matrislerin simetrik matris olarak seçilmesi ile simetrik matrislerin özelliklerinden dolayı uygulamaları daha da kullanışlı hale gelmiştir.

Genel olarak, bir vektör üzerine uygulanan matris o vektörün hem büyüklüğünü, hem de yönünü değiştirir. Buna rağmen, bir matris bazı belirli vektörler üzerine etkideğinde onların sadece büyüklüğünü değiştirir, doğrultularını değiştirmez (yani belli bir yönelime sahip vektör, tam tersi yöne yönelebilir). Doğrultusu değişmeyen bu vektörler söz konusu matrisin *özvektörleri* olarak adlandırılır. Bir matris, bir özvektörü üzerine etkideğinde onun büyüklüğünü bir çarpan kadar katlar. Bu çarpan pozitif ise vektörün yönü değişmeden kalır, negatif ise vektörün yönü tersine döner (dikkat edilirse

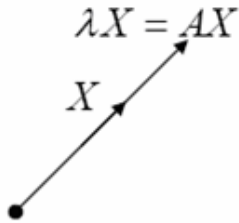
her iki durumda da vektörün doğrultusu değişmez.). (Şekil 3.1., Şekil 3.2, Şekil 3.3, Şekil 3.4, Şekil 3.5 bahsettiklerimizi geometriksel olarak göstermektedir.). Bu çarpana, söz konusu özvektöre ilişkin *özdeğer* denir. Bir *özuzay*, aynı özdeğere sahip tüm özvektörlerin oluşturduğu kümedir.



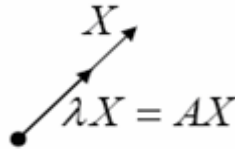
Şekil 3.1. AX ile X vektörlerinin
doğrusal olmaması



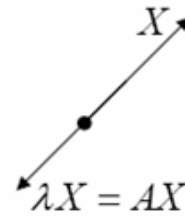
Şekil 3.2. AX ile X vektörlerinin
doğrusal olması



Şekil 3.3. $\lambda > 1$ için X ile
 $\lambda X = AX$ vektörünün
geometrik gösterimi



Şekil 3.4. $0 < \lambda < 1$ için X
ile $\lambda X = AX$ vektörünün
geometrik gösterimi



Şekil 3.5. $\lambda < 0$ için X ile
 $\lambda X = AX$ vektörünün
geometrik gösterimi

Özdeğer ve özvektör ifadelerinin İngilizce karşılıkları eigenvalue ve eigenvector dır. Eigen terimini ilk olarak David Hilbert (1862-1943) kullanmıştır. Hilbert eigenfunction ve eigenwert ifadelerini ilk olarak integral denklemlerle ilgili bildirilerinde kullanmıştır. Hilbert'in çıkış noktası homojen olmayan integral denklemlerin, bir λ parametresiyle matrissel karşılığının $(I - \lambda A)x = y$ olması idi. Hilbert bu eşitliğin sıfırdan farklı homojen çözümü için λ değerlerine eigenwerte adını

vermiştir ve λ değerleri A matrisinin karakteristik köklerine karşılık gelmektedir. Eigenvector kavramı ise ilk olarak Courant ve Hilbert tarafından sonlu boyut ifadesi açıklanırken kullanılmıştır.

John Von Neuman (1903-1957) bir eserinde $f \neq 0$ şartı altında $Rf = \lambda f$ ifadesindeki λ yı eigenwerte, f yi ise eigenfunction olarak adlandırmıştır. Bu yaygın bir kullanım haline gelmiştir. 1946 da H.&B. Jeffreys in “ Methods of Mathematical Physics ” adlı eserinde özdeğer kavramı karakteristik değer ve gizli kök kavramlarıyla eş anlamlı olarak ifade edilmiştir.

Şimdide özdeğer ve özvektör kavramlarının cebirsel olarak ifadesini verelim.

Tanım 3.1.1.1. A , $n \times n$ tipinde reel sayıların bir matrisi olmak üzere, λ ya göre bir polinom denklemi olan, $\det(A - \lambda I) = 0$ denkleminde A nın *karakteristik denklemi* ve köklerine A nın *özdeğerleri* denir.

$x \neq 0$ için $Ax = \lambda x$ (1.1) oluyorsa x vektörüne λ özdeğerine karşılık gelen *özvektör* denir. Bir özdeğere birden çok özvektör karşılık gelebilir.

Dikkat edilirse (1.1) denkleminde Ax çarpımı x vektörünü yine kendi skaler katına dönüştürmektedir.

Örnek 3.1.1.1 $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ vektörü $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin özvektörüdür. Burada X vektörüne karşılık gelen özdeğer -1 olup,

$$AX = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = -1X$$

yazılır.

O halde tüm bu anlattıklarımızdan herhangi bir A matrisinin özdeğerini bulmak için bu matrisin karakteristik denkleminin köklerini bulmak yetecektir. Özvektörlerini bulmak için ise özdeğerler bulunduğundan sonra özdeğerler $(\lambda I_n - A)x = 0$ denkleminde tek tek yerine yazılır. A matrisinin λ_i özdeğeri için elde edilen

$$(\lambda_i I_n - A)x = 0$$

denkleminin çözüm kümesi K_i^n uzayının bir alt vektör uzayıdır. Bu alt vektör uzayı A_i olsun. A_i alt uzayı λ_i öz değerine karşılık gelen öz vektörlerin uzayıdır.

Örnek 3.1.1.2. $A \in \mathbb{R}^3_3$, $A = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ olmak üzere A matrisinin özdeğerlerini ve

öz vektörlerini bulalım.

Çözüm.

$$\det(\lambda I_3 - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda + 3 & 4 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda + 3 \end{bmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 3)^2$$

olur. Karakteristik denklemin farklı kökleri $\lambda_1 = 1$ ve $\lambda_2 = -3$ tür. Buna göre A matrisinin iki tane özdeğeri vardır. Bunlar 1 ve -3 tür.

$\lambda_1 = 1$ için $(\lambda_1 I_3 - A)x = 0$ denklemi,

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(1)

denklemine dönüşür. Bu denklemin genişletilmiş matrisinde elementer satır işlemleri yapılarak

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bulunur öyleyse (1) denkleminin çözümleri,

$$x = \begin{bmatrix} -t \\ t \\ 0 \end{bmatrix}$$

biçimindeki x matrislerinin kümesidir. λ_1 özdeğerine karşılık gelen öz uzay A_1 olsun.

$$A_1 = \left\{ \begin{bmatrix} -t \\ t \\ 0 \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = \text{Sp} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

olur. A_1 , $\mathbb{R}^3_1$ uzayının bir boyutlu bir alt vektör uzayıdır.

$\lambda_2 = -3$ için $(\lambda_1 I_3 - A)x = 0$ denklemi,

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

denkleme dönüştür. Bu denklemin genişletilmiş matrisinde elementer satır işlemleri yapılarak

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Öyleyse (2) denkleminin çözümleri,

$$x = \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$$

biçimindeki x matrislerinin kümesidir. λ_2 özdeğerine karşılık gelen öz uzay A_2 olsun.

$$A_2 = \left\{ \begin{bmatrix} k \\ 0 \\ t \end{bmatrix} : k, t \in \mathbb{C} \right\} = Sp \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

olur. $A_2, \mathbb{C}_1^3$ uzayının iki boyutlu bir alt vektör uzayıdır.

3.1.2. Özdeğer ve Özvektörün Özellikleri:

Öz değer ve öz vektörlerle ilgili aşağıdaki özellikler vardır:

a) $p(\lambda)$ polinomunun n -inci dereceden kompleks katsayılı polinom olacağı açıktır. Kompleks katsayılı $p(\lambda)$ polinomunun $\mathbb{C}$ de n tane kompleks kökünün (çakışık olabilir) varlığı ise cebirin esas teoreminden bilinmektedir. A matrisinin karakteristik polinomunda λ^n ,

$$(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \dots (\lambda - a_{nn})$$

çarpımından elde edilir ve böylece λ^n ifadesinin katsayısı 1 olur. Buradan,

$$\det(\lambda I_n - A) = p(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

denkleminde ulaşılır. $\lambda = 0$ alırsak,

$$\det(\lambda I_n - A) = \det(-A) = a_n$$

olur. Sonuç olarak, $a_n = (-1)^n \det A$ olur.

Kısacası n . mertebeden bir kare matrisin karakteristik polinomu n . dereceden bir polinomdur ve en yüksek dereceli terimin katsayısı 1, polinomdaki sabit terim $a_n = (-1)^n |A|$ ve λ^{n-1} in katsayısı $-iz(A)$ dir. Eğer A matrisinin özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ise $iz(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ ve $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$ şeklindedir.

b) Benzer matrislerin öz değerleri aynıdır.

c) A matrisi tekil ise en az bir öz değer sıfırdır. A matrisi tekil değilse tüm öz değerler sıfırdan farklıdır.

d) Birim matrisin bütün öz değerleri 1 dir.

e) A köşegen bir matris ise, öz değerler köşegen elemanlarıdır.

f) A simetrik bir matris ($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ve $A = A^t$) ise, tüm öz değerleri reel dir.

g) A Hermityen bir matris ($A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ve $A = (\bar{A})^t$) ise, tüm öz değerleri reel dir.

f) A^{-1} matrisinin öz değeri, A nın öz değerinin tersine eşittir.

h) Reel simetrik bir matrisin tüm öz vektörleri karşılıklı ortogonaldır.

i) A ve A^t matrislerinin öz değerleri aynıdır.

i) Eğer bir A matrisinin λ öz değerine karşılık gelen öz vektörü v ise, c bir sabit olmak üzere cv de A matrisinin öz vektörüdür.

Teorem 3.1.2.1. $A[a_{jk}]$, $n \times n$ tipinde bir matris ve $A[a_{jk}]$ nın öz değerleri de $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2 \leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{jk}|^2$$

olur.

Örnek 3.1.2.1. Aşağıda verilen matrisin öz değerlerini bulunuz ve bu öz değerler için Schur eşitsizliğini kullanarak bir sınır bulunuz.

$$A = \begin{pmatrix} 26 & -2 & 2 \\ 2 & 21 & 4 \\ 4 & 2 & 28 \end{pmatrix}$$

Çözüm: Verilen matrisin öz değerleri $\lambda_1 = 30, \lambda_2 = 25, \lambda_3 = 20$ olarak bulunur.

Schur eşitsizliğinden,

$$|\lambda| \leq \sqrt{1949}$$

olmalıdır. Gerçekten,

$$30^2 + 25^2 + 20^2 = 1925$$

dir ve buradan

$$\sum_{i=1}^3 |\lambda_i|^2 \leq \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 |a_{jk}|^2$$

elde edilir.

Teorem 3.1.2.2. Bir hermityen matrisinin özdeğerlerinin hepsi reeldir ve farklı özdeğerlere ait olan özvektörler ortogondur.

İspat. A bir hermityen matris olsun. λ , A 'nın bir özdeğeri ve x , λ 'ya karşılık gelen özvektör olsun. Eğer $\alpha = x^* Ax$ ise

$$\bar{\alpha} = \alpha^* = (x^* Ax)^* = x^* Ax = \alpha$$

dır. Öyleyse α reeldir.

$$\alpha = x^* Ax = x^* \lambda x = \lambda \|x\|^2$$

olduğundan $\lambda = \frac{\alpha}{\|x\|^2}$ reeldir.

Eğer x_1 ve x_2 , sırasıyla λ_1 ve λ_2 ye karşılık gelen özvektörler ise

$$(Ax_1)^* x_2 = x_1^* A^* x_2 = x_1^* Ax_2 = \lambda_2 x_1^* x_2$$

ve

$$(Ax_1)^* x_2 = (x_2^* Ax_1)^* = (\lambda_1 x_2^* x_1)^* = \lambda_1 x_1^* x_2 \text{ dir.}$$

Buradan

$$\lambda_1 x_1^* x_2 = \lambda_2 x_1^* x_2 \text{ dir}$$

ve $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olduğundan

$$\langle x_2, x_1 \rangle = x_1^* x_2 = 0 \text{ dir.}$$

Teorem 3.1.2.3. (Schur's Teorem): Her $n \times n$ lik A matrisi için, U^*AU üst üçgen matris olacak şekilde bir U üniter matrisi vardır (Steven J Leon, 1990).

İspat. İspat tümevarımla çözülecektir. $n=1$ için sağlar. $k \times k$ için doğru olduğunu varsayalım. $(k+1) \times (k+1)$ lik A matrisini ele alalım. λ_1 , A matrisinin özdeğeri olsun ve w_1 , λ_1 'e ait birim özvektör olsun. Gram-Schmidt işlemini kullanarak $w_1, \dots, w_{k+1}$ 'leri oluşturalım. Öyleki C^{k+1} için $\{w_1, \dots, w_{k+1}\}$ bir ortonormal tabandır. W , $i=1, \dots, k+1$ için i . sütun vektörü w_i olan matris olsun. Böylece kurulumdan kaynaklı W üniter olur. W^*AW 'ın birinci sütunu W^*Aw_1 olur.

$$W^*Aw_1 = \lambda_1 W^*w_1 = \lambda_1 e_1$$

Böylece $M, k \times k$ matris olmak üzere

$$W^*AW = \begin{pmatrix} \lambda_1 & x & x & \dots & x \\ 0 & & & & \\ \vdots & & M & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Tümevarım hipotezinden V_1 $k \times k$ lık üniter matris vardır öyle ki;

$$V_1^*MV_1 = T_1$$

dir. Burada T_1 üçgendir.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \\ \vdots & & V_1 & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}$$

matrisini alalım. Burada V üniterdir ve

$$V^*W^*AWV = \begin{pmatrix} \lambda_1 & x & x & \dots & x \\ 0 & & & & \\ \vdots & & V_1^*MV_1 & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & x & x & \dots & x \\ 0 & & & & \\ \vdots & & T_1 & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix} = T$$

elde edilir.

$$U = WV$$

olsun. U üniterdir. Çünkü

$$U^*U = (WV)^*WV = V^*W^*WV = I$$

dır. Böylece

$$U^*AU = T$$

olur. (Steven J Leon, 1990).

Teorem 3.1.2.4. (Spectral Teorem) Eğer A Hermityen ise A matrisini köşegenleştiren bir U üniter matrisi vardır (Steven J Leon, 1990).

İspat. Schur's Teoreminden T üst üçgen olmak üzere, $U^*AU = T$ olacak şekilde bir U üniter matrisi vardır.

$$T^* = (U^*AU)^* = U^*A^*U = U^*AU = T$$

Böylece T Hermityen ve dolayısı ile T köşegen olmalıdır (Steven J Leon, 1990).

A matrisinin reel ve simetrik olması durumunda özvektörleri ve özdeğerleri reel olmalıdır. Böylece köşegenleştirici U matrisi ortogonaldır.

Sonuç 3.1.2.1. Eğer A reel simetrik matris ise A' yı köşegenleştiren bir ortogonal U matrisi vardır. Öyleki; D köşegen matris olmak üzere $U^T AU = D$ dir (Steven J Leon, 1990).

Örnek 3.1.2.2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ matrisini köşegenleştiren U ortogonal matrisini

bulunuz.

Çözüm: $p(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda + 5 = (1 + \lambda)^2 (5 - \lambda)$ karakteristik polinomunun kökleri

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 5$$

dir. Öz vektörleri hesapladığımızda $x_1 = (1, 0, 1)^T$ ve $x_2 = (-2, 1, 0)^T$ dir. Bu vektörler $N(A + I)$ öz uzayı için tabandır. $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ özdeğerlerine karşılık gelen öz uzay için ortonormal taban elde etmek için Gram-Schmidt işlemlerini uygularsak;

$$u_1 = \frac{1}{\|x_1\|} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0, 1)^T$$

$$p = (x_2^T u_1) u_1 = -\sqrt{2} u_1 = (-1, 0, -1)^T$$

$$x_2 - p = (-1, 1, 1)^T$$

$$u_2 = \frac{1}{\|x_2 - p\|} (x_2 - p) = \frac{1}{\sqrt{3}} (-1, 1, 1)^T$$

$\lambda_3 = 5$ 'e karşılık gelen öz uzay $x_3 = (-1, -2, 1)^T$ ile gerilir. x_3 , u_1 ve u_2 ye dik olması gerektiğinden sadece birim hale getirmeliyiz

$$u_3 = \frac{1}{\|x_3\|} x_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} (-1, -2, 1)^T .$$

Böylece $\{u_1, u_2, u_3\}$ ortonormal kümedir ve

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

matrisi A matrisini köşegenleştirir (Steven J Leon, 1990).

Spectral Teoreminin devamı olarak, her A Hermityen matrisi, U bir üniter matris ve D bir diagonal matris olmak üzere UDU^* çarpımı olarak yazılabilir. U , A 'yı köşegenleştirdiğinden D 'nin köşegen elemanları A 'nın özdeğerleridir ve U 'nun sütun vektörleri A 'nın öz vektörleridir. Böylece A kusurlu olamaz ve C^n için bir ortonormal taban olacak şekilde tam bir özvektörler kümesine sahiptir. Bu anlamda bu ideal bir durumdur. Böylece eğer A , $\{u_1, \dots, u_n\}$ özvektörlerinin bir ortonormal kümesine sahip ve

$$x = c_1 u_1 + \dots + c_n u_n$$

ise

$$Ax = c_1 \lambda_1 u_1 + \dots + c_n \lambda_n u_n$$

dir. Ayrıca

$$c_i = \langle x, u_i \rangle = u_i^* x$$

veya denk olarak

$$c = U^* x$$

dir. Böylece

$$Ax = \lambda_1 (u_1^* x) u_1 + \dots + \lambda_n (u_n^* x) u_n$$

elde edilir.

Genel olarak, eğer A , tam olarak özvektörlerin ortonormal kümesiyle herhangi bir matris ise U üniter ve D köşegen matris olmak üzere $A = UDU^*$ dır. (köşe elemanları kompleks olabilir.) Genel olarak, $D^* \neq D$ ve dolayısıyla $A^* = UD^*U^* \neq A$ dır. Bununla birlikte

$$AA^* = UDU^*UD^*U^* = UDD^*U^*$$

ve

$$A^*A = UD^*U^*UDU^* = UD^*DU^*$$

olur.

$$D^*D = DD^* = \begin{pmatrix} |\lambda_1|^2 & & & \\ & |\lambda_2|^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & |\lambda_n|^2 \end{pmatrix}$$

olduğundan $AA^* = A^*A$ dır (Steven J Leon, 1990).

Tanım 3.1.2.1. Eğer $AA^* = A^*A$ ise A matrisi normaldir.

Teorem 3.1.2.5. A matrisi normaldir ancak ve ancak A matrisi özvektörlerin tam bir ortonormal kümesine sahiptir.

İspat. Daha önceki anlattıklarımızdan kaynaklı sadece bir normal matrisin özvektörlerin tam bir ortonormal kümesine sahip olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır. Schur' un teoreminden bir U üniter matrisi ve bir üçgen T matrisi vardır öyleki $T = U^*AU$ dır. T 'nin de normal olduğunu iddia ediyoruz.

$$T^*T = U^*A^*UU^*AU = U^*A^*AU \text{ ve}$$

$$TT^* = U^*AUU^*A^*U = U^*AA^*U$$

dır. $AA^* = A^*A$ olduğundan $T^*T = TT^*$ dır. TT^* ve T^*T 'in köşe elemanları karşılaştırıldığında,

$$\begin{aligned}
|t_{11}|^2 + |t_{12}|^2 + |t_{13}|^2 + \dots + |t_{1n}|^2 &= |t_{11}|^2 \\
|t_{22}|^2 + |t_{23}|^2 + \dots + |t_{2n}|^2 &= |t_{12}|^2 + |t_{22}|^2 \\
&\vdots \\
|t_{nn}|^2 &= |t_{1n}|^2 + |t_{2n}|^2 + |t_{3n}|^2 + \dots + |t_{nn}|^2
\end{aligned}$$

dir. Burdan $i \neq j$ iken $t_{ij} = 0$ olduğu görülür. Böylece U , A 'yı köşegenleştirir ve U 'nun vektör sütunu A 'nın özvektörleridir (Steven J Leon, 1990).

3.1.3. Matrislerin Sayısal Bölgesi (Değerler Cismi)

Özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ olan $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrisinin spektral yarıçapı,

$$\rho(A) = \max_{1 \leq j \leq n} |\lambda_j|$$

ile, sayısal yarıçapı

$$r(A) = \max_{|x|=1} |(Ax, x)|$$

ile ve spektral normu ise

$$\|A\| = \max_{|x|=1} |Ax|$$

ile tanımlanır.

Karmaşık sayılar kümesinin kapalı sınırlı bir alt kümesi olan ve cebirsel olarak “ A matrisinin değerler cismi”, geometrik olarak “ A matrisinin sayısal görüntüsü” ve genel olarak “ A matrisinin sayısal bölgesi” olarak bilinen $W(A)$ kümesi ve bu kümenin cebirsel ve geometrik özelliklerinden bahsedilecektir.

Tanım 3.1.3.1 $n \times n$ kompleks matrisler kümesinden kompleks sayılar kümesinin bir alt kümesine tanımlanan,

$$F(\square) : M_n \rightarrow D(D \subseteq \square), A \rightarrow F(A) = x^* A x, (x \in \square^n)$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu takdirde,

$$W(A) = \{F(A) : A \in M_n\}$$

$$= \{x^*Ax : A \in M_n, x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\}$$

$$= \{x^*Ax : A \in M_n, x \in \mathbb{C}^n, \|x\| = 1\}$$

ile tanımlanan kümeye, $A \in M_n$ matrisinin *sayısal bölgesi* denir.

Örnek 3.1.3.1 I , n -kare birim matrisinin değerler cismini bulalım. I , birim matrisinin

$W(I)$ değerler cismi,

$$W(I) = \{F(I) : I, n \times n \text{ birim matris}\}$$

$$= \{x^* \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1\}$$

$$= \{[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n] \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} : x_i \in \mathbb{C}, \bar{x}_1x_1 + \bar{x}_2x_2 + \dots + \bar{x}_nx_n = 1\}$$

$$= \{[\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} : x_i \in \mathbb{C}, \bar{x}_1x_1 + \bar{x}_2x_2 + \dots + \bar{x}_nx_n = 1\} = \{1\}$$

şeklinde bir kümedir. O halde, I , birim matrisinin sayısal görüntüsünün de, kompleks düzlemde 1 kompleks sayısına karşılık gelen bir nokta olacağı yorumu yapılır.

Örnek 3.1.3.2 I , n -kare birim matris ve $\alpha \in \mathbb{C}$ olmak üzere αI matrisinin sayısal bölgesini (değerler cismini) bulalım. αI matrisi için $W(\alpha I)$ kümesi,

$$W(\alpha I) = \{F(\alpha I) : I, n \times n \text{ birim matris}, \alpha \in \mathbb{C}\}$$

$$= \{x^*(\alpha I)x : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1, \alpha \in \mathbb{C}\}$$

$$= \{\alpha(x^*Ix) : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1, \alpha \in \mathbb{C}\}$$

$$= \left\{ \alpha \begin{pmatrix} x^* \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x : x \in \mathbb{C}^n, x^*x = 1, \alpha \in \mathbb{C} \right\}$$

$$= \{\alpha : \alpha \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C}$$

şeklinde elde edilir ki, αI matrisinin sayısal bölgesinin kompleks sayılar kümesi olduğu ve geometriksel olarakta kompleks düzlem olduğu bilgilerine ulaşılır.

Örnek 3.1.3.3. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin sayısal bölgesini bulalım.

Verilen matris için $W(A)$ kümesi,

$$\begin{aligned}
W(A) &= \{z = F(A) : A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\} \\
&= \{z = x^* \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x : x^* x = 1, x \in \mathbb{C}^2\} \\
&= \{z = [\bar{x}_1 \bar{x}_2] \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : \bar{x}_1 x_1 + \bar{x}_2 x_2 = 1, x_1, x_2 \in \mathbb{C}\} \\
&= \{z = 3\bar{x}_1 x_1 : \bar{x}_1 x_1 + \bar{x}_2 x_2 = 1, x_1, x_2 \in \mathbb{C}\} \\
&= \{z = 3|x_1|^2 : |x_1|^2 + |x_2|^2 = 1, x_1, x_2 \in \mathbb{C}\}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. $|x_1|^2 + |x_2|^2 = 1, x_1, x_2 \in \mathbb{C}$, şartı altında $W(A)$ kümesinin $z = 3|x_1|^2$ elemanlarını karakterize edelim.

$x_1 \in \mathbb{C}$ için $z = 3|x_1|^2$ olduğundan

$$0 \leq z = 3|x_1|^2 \quad (3)$$

yazılır. Değişken $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ sayıları için $|x_1|^2 + |x_2|^2 = 1$ eşitliğinden,

$$|x_1|^2 \leq 1 \text{ olduğundan}$$

$$z = 3|x_1|^2 \leq 3 \quad (4)$$

yazılır. (3) ve (4) denklemlerinden $0 \leq z \leq 3$ elde edilir. O halde A matrisinin sayısal bölgesi $W(A) = [0, 3]$ olarak elde edilir. Elde edilen $W(A)$ nın kompleks düzlemdeki yansıması düzlemi oluşturan reel eksenin 0 ve 3 arasında kalan parçasıdır.

Herhangi bir matrisin sayısal bölgesinin nasıl bulunacağını pekiştirmek amacı ile bir örneği daha göz önüne alalım.

Örnek 3.1.3.4. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin sayısal bölgesini bulalım. Verilen matris için

$W(A)$ kümesi,

$$\begin{aligned}
W(A) &= \{z = F(A) : A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\} \\
&= \{z = x^* \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x : x \in \mathbb{C}^2, x^* x = 1\} \\
&= \{z = (\bar{x}_1 \quad \bar{x}_2) \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} : x_1, x_2 \in \mathbb{C}, \bar{x}_1 x_1 + \bar{x}_2 x_2 = 1\} \\
&= \{z = 2\bar{x}_1 x_2 : \bar{x}_1 x_1 + \bar{x}_2 x_2 = 1, x_1, x_2 \in \mathbb{C}\}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. $|x_1|^2 + |x_2|^2 = 1, x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ özelliğini de dahil ederek $W(A)$ kümesinin $z = 2\bar{x}_1 x_2$ formundaki elemanlarını belirleyelim. Buradan,

$$z = 2\bar{x}_1 x_2 \Rightarrow |z| = |2\bar{x}_1 x_2| \Rightarrow |z| = 2|\bar{x}_1||x_2| \Rightarrow |z| = 2|x_1||x_2| \in \mathbb{R}$$

yazılır. $(|x_1| - |x_2|)^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 - 2|x_1||x_2|$ özdeşliği ile,

$$0 \leq (|x_1| - |x_2|)^2 = 1 - 2|x_1||x_2|$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu eşitsizlikte, $|z| = 2|x_1||x_2|$ olduğu dikkate alınırsa, $W(A)$ kümesinin

$$0 \leq 1 - |z| \Rightarrow |z| \leq 1$$

eşitsizliğini sağlayan z kompleks sayılarından oluştuğu sonucuna varılır. O halde, verilen matrisin sayısal bölgesi $W(A) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ olacaktır. Şimdi $W(A)$ daki kompleks sayıların kompleks düzlemdeki nokta temsillerinin oluşturduğu geometrik şekli belirleyelim. $W(A)$ nın tüm elemanlarını temsil eden değişken eleman $z = u + iv$ olsun. Bu değişken elemanın taşınması gereken

$$|z| \leq 1 \text{ ya da } |u + iv| \leq 1$$

özellik ile,

$$|u + iv| \leq 1 \Rightarrow \sqrt{u^2 + v^2} \leq 1 \Rightarrow u^2 + v^2 \leq 1$$

eşitsizliğine ulaşılır ki, geometrik olarak bu eşitsizlik uv dik koordinatlarıyla belirlenen kompleks düzlemdeki birim çember ve içini belirler. Bir başka ifade ile, A matrisinin sayısal bölgesi kompleks düzlemde bir çember ve onun iç noktalarından oluşan geometrik şekildir.

Aşağıdaki teorem, $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matrisinin özdeğerlerinin $W(A)$ kümesinde olduğunu ya da matrisin spektrumunun $W(A)$ kümesinin alt kümesi olduğunu ifade eden bir teoremdir.

Teorem 3.1.3.1 λ nın, $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matrisinin bir özdeğeri olması için $\Leftrightarrow \lambda = x^* A x$, $x^* x = 1$ olacak şekilde bir x vektörünün olmasıdır.

İspat. λ , $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matrisinin bir özdeğeridir $\Leftrightarrow Au = \lambda u$, $\exists 0 \neq u \in \mathbb{C}^n$

$$\Leftrightarrow Ax = \lambda x, \exists x = \frac{u}{\|u\|} \in \mathbb{C}^n \ni x^* x = 1$$

$$\Leftrightarrow x^* A x = \lambda (x^* x)$$

$$\Leftrightarrow x^* A x = \lambda \text{ dır.}$$

Böylece, $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ matrisinin $\sigma(A)$ spektrumu ve $W(A)$ kümesi için

$$\begin{aligned} \sigma(A) &= \{\lambda : Ax = \lambda x, 0 \neq x \in \mathbb{C}^n\} \\ &= \{\lambda = x^* A x : Au = \lambda u, 0 \neq u \in \mathbb{C}^n, x = \frac{u}{\|u\|}\} \\ &\subset W(A) \end{aligned}$$

bağıntısı geçerlidir.

3.1.3.1. Sayısal Bölgenin (Değerler Cisminin) Temel Özellikleri

Bu kısımda $W(\square)$ değerler cisminin bazı temel özelliklerine değinilecektir.

Tanım 3.1.3.1.1 $S, T \subset \square$ alt kümelerinin toplamı, $S + T = \{s + t : s \in S, t \in T\}$ dir.

Tanım 3.1.3.1.2. $\alpha \in \square$ sayısı ve $S \subset \square$ alt kümesi için, $\alpha S = \{\alpha s : s \in S\}$ dir.

Tanım 3.1.3.1.3. $A \in M_n(\square)$ için, $H(A) = \frac{1}{2}(A + A^*)$ matrisine A matrisinin

Hermityen kısmı ve $S(A) = \frac{1}{2}(A - A^*)$ kısmına ise A matrisinin ters Hermityen kısmı denir.

Hermityen (veya simetrik) matrislerle ilgili olan problemlerin bilgisayar ortamında çözümlenmeleri daha net ve hızlı olmaktadır. $A \in M_n(\square)$ matrisinin sayısal bölgesinin gerçel elemanlarından oluşan alt kümesi $\text{Re}W(A)$ ile A matrisinin

Hermityen kısmı ise $H(A) = \frac{1}{2}(A + A^*)$ ile gösterilmektedir.

Tanım 3.1.3.1.4 $S \subseteq \square$ alt kümesinin sonlu sayıdaki elemanlarının tüm konveks kombinasyonlarından oluşan küme $\text{Co}(S)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.3.1.5 $A_1, A_2, \dots, A_n \in M_n(\square)$ karesel matrisleri için,

$$\oplus_{i=1}^n A_i = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_n \end{bmatrix}$$

ile tanımlanan $\oplus_{i=1}^n A_i$ blok matrisine $A_1, A_2, \dots, A_n \in M_n(\square)$ matrislerinin direkt toplam matrisi denir.

Önerme 3.1.3.1.1. $A \in M_n(\square)$ ve $\alpha \in \square$ için,

i. $W(A + \alpha I) = W(A) + \alpha$ dir.

ii. $W(\alpha A) = \alpha W(A)$ dir.

iii. $W(H(A)) = \text{Re}W(A)$ dir.

iv. $RHP \equiv \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z > 0\}$ olmak üzere,

$$W(A) \subset RHP \Leftrightarrow A + A^* \text{ pozitif tanımlıdır.}$$

v. $A \in M_n(\mathbb{C})$ ve $RHP_0 \equiv \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z \geq 0\}$ olmak üzere,

$$W(A) \subset RHP_0 \Leftrightarrow A + A^* \text{ pozitif yarı tanımlıdır.}$$

vi. $\sigma(A) \subset W(A)$ dir.

vii. $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ olmak üzere, $W(A+B) \subset W(A) + W(B)$ dir.

viii. $A, U \in M_n(\mathbb{C})$ ve U üniter matris olmak üzere, $W(U^*AU) = W(A)$ dir.

ix. $A \in M_n(\mathbb{C})$ normal bir matris ise, $W(A) = \text{Co}(\sigma(A))$ dir.

x. $A \in M_{n_1}(\mathbb{C})$ ve $B \in M_{n_2}(\mathbb{C})$ için, $W(A \oplus B) = \text{Co}(W(A) \cup W(B))$ dir (Johson, 1997).

Örnek 3.1.3.1.1. $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$ matrisinin $W(A)$ değerler cisminin $W(A) \subset RHP_0$

şeklinde kapsandığını gösterelim. $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$ ve $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ için,

$$\begin{aligned} x^* (A + A^*) x &= (\bar{x}_1 \quad \bar{x}_2) \left[\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= (\bar{x}_1 \quad \bar{x}_2) \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2(\bar{x}_2 x_1 + \overline{\bar{x}_2 x_1}) \\ &= 2 \text{Re } z \geq 0 \end{aligned}$$

olur ki, $W(A) \subset RHP_0$ bağıntısı geçerlidir.

3.1.3.2. Sayısal Bölgenin (Değerler Cisminin) Konveksliği

$\mathbb{C}$ nin $S \subset \mathbb{C}$ alt kümesinin konveksliği için, $0 \leq \alpha \leq 1$ ve $s, t \in S$ olmak üzere $\alpha s + (1 - \alpha)t \in S$ olduğunun gösterilmesi gerektiği gerçeğinden, $W(A)$ nın konveksliği için de $0 \leq \alpha \leq 1$, $x, y \in \mathbb{C}^n$ ve $x^*x = 1 = y^*y$ olmak üzere

$$\alpha x^*Ax + (1 - \alpha)y^*Ay \in W(A)$$

olduğu gösterilmelidir. Bir başka ifade ile, $0 \leq \alpha \leq 1$, $x, y \in \mathbb{C}^n$ ve $x^*x = 1 = y^*y$ olmak üzere $\alpha x^*Ax + (1 - \alpha)y^*Ay \in W(A)$ özelliğindeki $W(A)$ kümesi konveks bir küme olarak isimlendirilir.

Bu kısımda $W(A)$ kümesinin konveksliğine, $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrisine üniter benzer olan bir başka deyişle U üniter matrisi için $B = U^*AU$ formunda ifade edilebilen B matrisinin 2×2 tipindeki sol üst esas alt matrisi $B(\{1, 1\})$ in değerler cisminin konveksliği ile karar verilmesine değinilecektir. Buradan,

“ $W(A)$ kümesinin konveksliği ile $W(B(\{1, 1\}))$ in konveksliği denktir.”

sonucuna ulaşılabacaktır.

Her $x, y \in \mathbb{C}^n$ vektör çifti ve U üniter matrisi için ilk iki değerinden sonraki değerleri sıfıra denk olan

$$x = Uv, \quad y = Uw$$

olacak şekilde $v, w \in \mathbb{C}^n$ vektörleri mevcuttur. Buradan,

$$\begin{aligned} \alpha x^*Ax + (1 - \alpha)y^*Ay &= \alpha v^*U^*AUv + (1 - \alpha)w^*U^*AUw \\ &= \alpha v^*Bv + (1 - \alpha)w^*Bw \end{aligned}$$

yazılır ve böylece ξ ve η sırasıyla bileşenleri v ve w vektörlerinin ilk iki elemanından oluşan vektörler olmak üzere

$$\alpha x^*Ax + (1 - \alpha)y^*Ay = \alpha \xi^*B(\{1, 2\})\xi + (1 - \alpha)\eta^*B(\{1, 2\})\eta$$

elde edilir. O halde görülmektedir ki, B matrisine $B=U^*AU$ şeklinde üniter benzer olan A matrisinin $W(A)$ değerler cisminin konveksliği ile $W(B(\{1,1\}))$ in konveksliği denktir.

Bu denklikten hareketle, $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrisinin $W(A)$ değerler cisminin konveksliğine $\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}$, $(0 < a, b \in \mathbb{C})$ formundaki matrislerin $W\left(\begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix}\right)$ değerler cisimlerinin konveksliği üzerinden karar verilecektir.

Aşağıdaki yardımcı teorem ile, herhangi bir $A \in M_2(\mathbb{C})$ matrisinin üniter benzerlik durumuna değinilecektir.

Yardımcı Teorem 3.1.3.2.1 Her $A \in M_2(\mathbb{C})$ için, W^*AW nun iki ana köşegen elemanı eşit olacak şekilde $W \in M_2(\mathbb{C})$ üniter matrisi vardır.

Sonuç 3.1.3.2.1. Herhangi $A \in M_2(\mathbb{C})$ matrisi,

$$W^*AW = \begin{bmatrix} -k & c_{12} \\ c_{21} & -k \end{bmatrix}, k = -\frac{1}{2} \text{iz}A$$

şeklinde

$$D = \begin{bmatrix} -k & c_{12} \\ c_{21} & -k \end{bmatrix}$$

matrisine üniter benzer ise, bu takdirde

$$W(A) = W(D) + (-k)$$

bağıntısı geçerlidir.

Yardımcı Teorem 3. ile ulaşılan; herhangi $A \in M_2(\mathbb{C})$ matrisinin,

$$W^*AW = \begin{bmatrix} -k & c_{12} \\ c_{21} & -k \end{bmatrix}, k = -\frac{1}{2} \text{iz}A,$$

şeklinde bir üniter benzerliğe sahip olacağı ve Sonuç 3.1.3.2.1 ile ulaşılan;

$$W(A) = W\left(\begin{pmatrix} 0 & c_{12} \\ c_{21} & 0 \end{pmatrix}\right) + (-k)$$

eşitliğinin aynı anda değerlendirilmesi ile, $\begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ formundaki matrislerin

$W\left(\begin{pmatrix} 0 & c_{12} \\ c_{21} & 0 \end{pmatrix}\right)$ değerler cisimlerinin elde edilmelerinin önemi daha net anlaşılmaktadır.

$D = \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ formundaki matrislerin $W(D)$ değerler cismini elde etme

işlemini biraz daha basitleştirelim. $W = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}$, $\theta \in \mathbb{R}$ üniter matris için, D matrisinin üniter benzer matrisi

$$\begin{aligned} W^*DW &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & ce^{i\theta} \\ de^{-i\theta} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. c ve d kompleks sayılarının $c = |c|e^{i\theta_1}$, $(\theta_1 \in \mathbb{R})$ ve $d = |d|e^{i\theta_2}$, $(\theta_2 \in \mathbb{R})$ şeklinde yazılımları ve $\theta = \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1)$ alınması ile,

$$W^*DW = \begin{pmatrix} 0 & ce^{i\theta} \\ de^{-i\theta} & 0 \end{pmatrix} = e^{i\psi} \begin{pmatrix} 0 & |c| \\ |d| & 0 \end{pmatrix}, \psi = \frac{1}{2}(\theta_1 + \theta_2)$$

formu elde edilecektir. Böylece, $D = \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ kompleks matrisin değerler cismi, köşegen elemanları negatif olmayan $\begin{pmatrix} 0 & |c| \\ |d| & 0 \end{pmatrix}$ matrisinin değerler cismi üzerinde belirlenebilecektir. Daha açık olarak,

$$W(D) = W\left(e^{i\psi} \begin{pmatrix} 0 & |c| \\ |d| & 0 \end{pmatrix}\right) = e^{i\psi} W\left(\begin{pmatrix} 0 & |c| \\ |d| & 0 \end{pmatrix}\right)$$

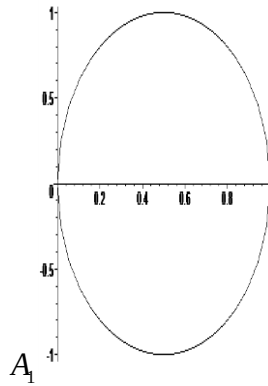
eşitliğinden $W(D)$ ye ulaşılabilinecektir. $D = \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ kompleks matrisinin değerler cisminin reel $\begin{pmatrix} 0 & |c| \\ |d| & 0 \end{pmatrix}$ matrisinin değerler cismine indirgenmesi, değerler cisim kümesine ulaşırken takip edilen incelemeyi oldukça kolay kılacaktır.

Aşağıdaki teorem, $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$, $0 \leq a, b \in \mathbb{R}$ formundaki reel matrisin sayısal bölgesi olan geometrik şekli belirleyen bir teoremdir.

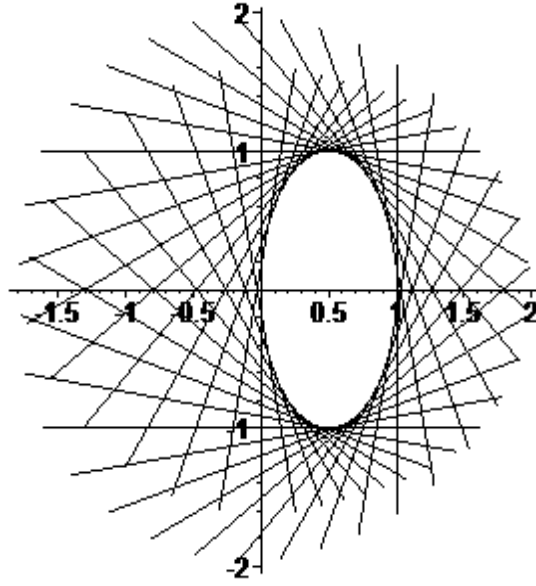
Teorem 3.1.3.2.1. $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$, $0 \leq a, b \in \mathbb{R}$ formundaki bir matrisin sayısal bölgesi xoy -kompleks düzlemi üzerinde merkezi orjinde, sanal eksen üzerinde $|a-b|$ uzunluklu küçük eksene, reel eksen üzerinde $|a+b|$ uzunluklu büyük eksene sahip ve odakları $\pm\sqrt{ab}$ olan elips ve onun iç bölgesidir.

Sayısal bölgenin genelleştirmesine geçmeden önce MAPLE programı içerisinde kompleks matrislerin sayısal görüntülerinin ekran görüntülerini sunan algoritmik yazılımı (procedure) içeren bir paket yardımıyla bazı kompleks matrislerin sayısal bölgelerinin ekran görüntülerine örnekler vereceğiz.

Örnek 3.1.3.2.1. $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinin sayısal bölgesi;

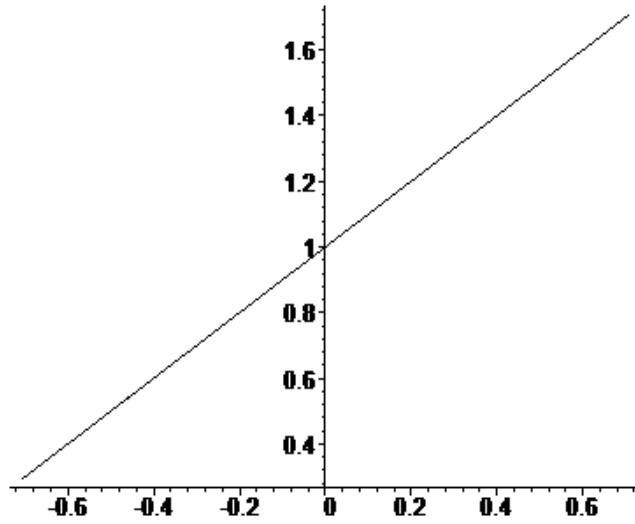


Şekil 3.6 A_1 matrisinin sayısal görüntüsünün Maple ekran çıktısı

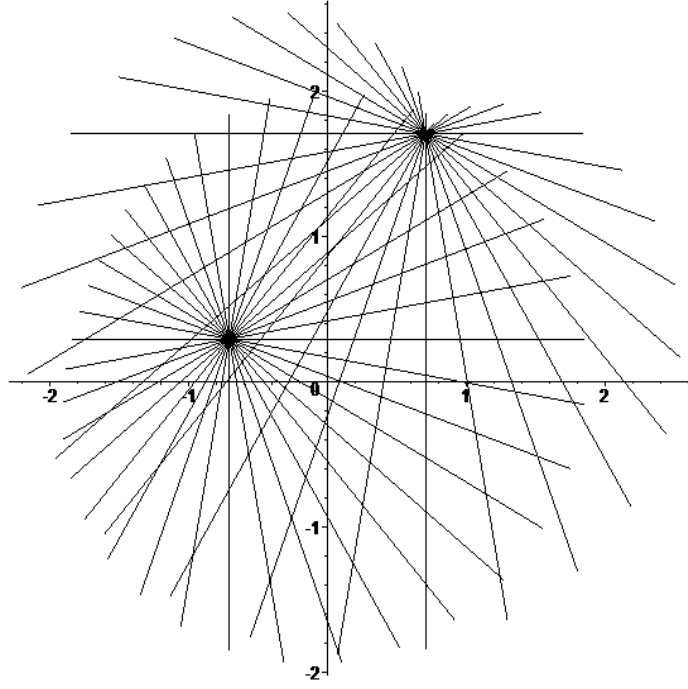


Şekil 3.7 A_1 matrisinin sayısal görüntüsünün farklı bir yöntemle çizilmiş Maple ekran çıktısı

Örnek 3.1.3.2.2. $A_2 = \begin{bmatrix} i & -1 \\ -i & i \end{bmatrix}$ matrisinin sayısal bölgesi;

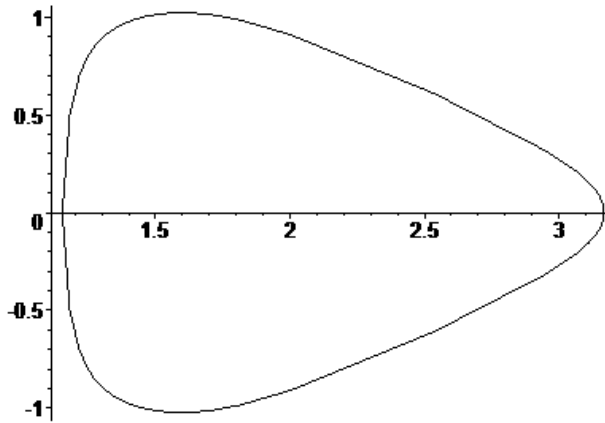


Şekil 3.8 A_2 matrisinin sayısal görüntüsünün Maple ekran çıktısı

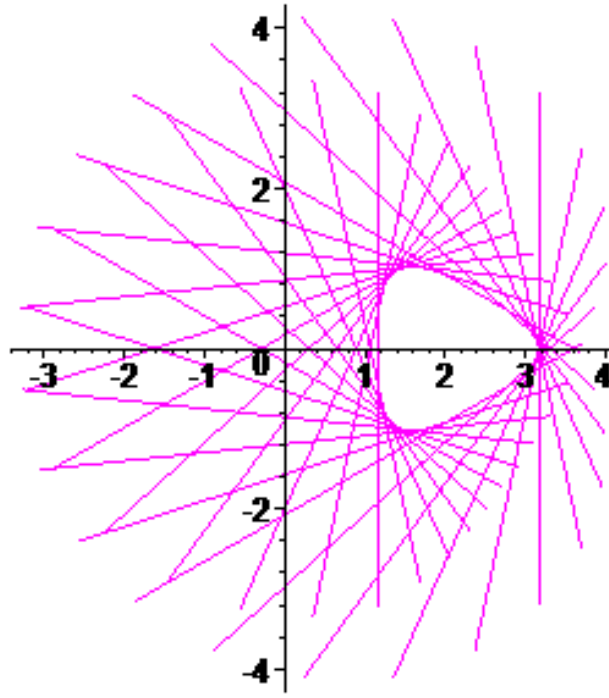


Şekil 3.9 A_2 matrisinin sayısal görüntüsünün farklı bir yöntemle çizilmiş Maple ekran çıktısı

Örnek 3.1.3.2.3. $A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin sayısal bölgesi;

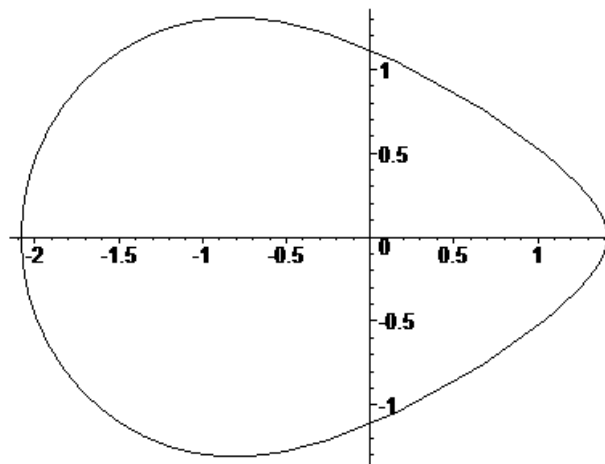


Şekil 3.10 A_3 matrisinin sayısal görüntüsünün Maple ekran çıktısı

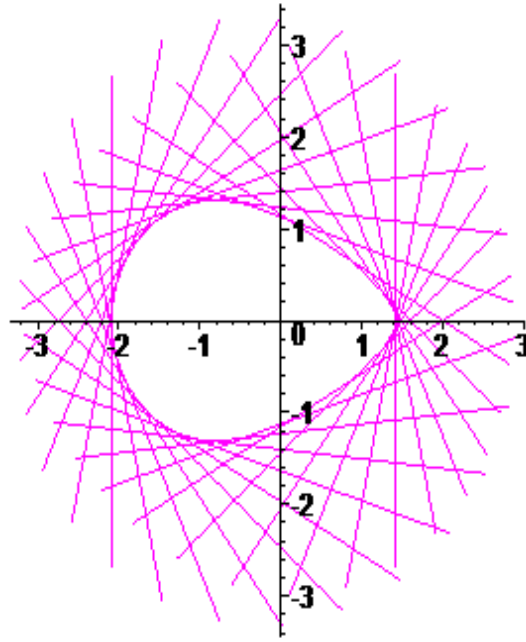


Şekil 3.11 A_3 matrisinin sayısal görüntüsünün farklı bir yöntemle çizilmiş Maple ekran çıktısı

Örnek 3.1.3.2.4. $A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ matrisinin sayısal bölgesi;



Şekil 3.12 A_4 matrisinin sayısal görüntüsünün Maple ekran çıktısı



Şekil 3.13 A_4 matrisinin sayısal görüntüsünün farklı bir yöntemle çizilmiş Maple ekran çıktısı

3.1.3.3. Sayısal Bölgenin Genelleştirilmesi

Bu bölümde sayısal bölgenin genelleştirmelerinden C -sayısal bölge ve C -sayısal bölgenin iki tipi olan k -sayısal bölge ve c -sayısal bölge ile bu genelleştirmelerin özelliklerini vereceğiz. Daha fazla bilgi için Hing-Sang Lau' nun tezine ve tezinde verdiği referanslara bakılabilir (Hing-Sang Lau, 1999).

- **k -Sayısal Bölge**

$A \in M_n(\mathbb{C})$ olmak üzere $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ için

$$W_k(A) = \left\{ \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k x_i^* A x_i : x_1, \dots, x_k \text{ } \mathbb{C}^n \text{ de ortonormal} \right\}$$

kümesi k -sayısal bölge olarak adlandırılır. İlk olarak 1964 de P. R. Halmos tarafından göz önüne alınmıştır. $W_1(A) = W(A)$ olduğundan k -sayısal bölge klasik sayısal bölgenin genelleştirilmiş halidir.

Örnek 3.1.3.3.1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin $W_2(A)$ sını belirleyelim.

Çözüm. $x_1 = (x_{11}, x_{12})$ ve $x_2 = (x_{21}, x_{22})$ $\mathbb{C}^2$ de ortonormal olmak üzere

$$\begin{aligned} W_2(A) &= \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 x_i^* A x_i : x_1, x_2 \text{ de } \mathbb{C}^2 \text{ de } \text{ortonormal} \right\} \\ &= \left\{ \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} \overline{x_{11}} & \overline{x_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{x_{21}} & \overline{x_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} \right) : x_{11}^2 + x_{12}^2 = 1, x_{21}^2 + x_{22}^2 = 1 \right\} \\ &= \left\{ z = \frac{1}{2} (x_{12} \overline{x_{12}} + x_{22} \overline{x_{22}}) \right\} \\ &= \left\{ z = \frac{1}{2} (|x_{12}|^2 + |x_{22}|^2) \right\} \end{aligned}$$

kümesidir.

$$x_{11}^2 + x_{12}^2 = 1, x_{21}^2 + x_{22}^2 = 1 \text{ ve } |x_{12}|^2 \leq 1 \text{ ve } |x_{22}|^2 \leq 1$$

olduğundan

$$0 \leq (|x_{12}|^2 + |x_{22}|^2) \leq 2 \Rightarrow 0 \leq z = \frac{1}{2} (|x_{12}|^2 + |x_{22}|^2) \leq \frac{1}{2} 2 = 1$$

bulunur. Bu durumda $0 \leq z \leq 1$ olduğundan $W_2(A)$, $[0,1]$ aralığıdır.

Önerme 3.1.3.3.2. (k -sayısal bölgenin özellikleri)

Her $A \in M_n(\mathbb{C})$ ve $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ için,

- i. $W_n(A) = \left\{ \frac{1}{n} i z A \right\}$
- ii. $W_k(A)$ kompaktır.
- iii. $W_k(\cdot)$ üniter benzer değişmezdir. Yani bütün üniter U matrisleri için $W_k(U^* A U) = W_k(A)$ dır.

iv. $k=1,2,...,n-1$ için $kW_k(A) = \{izA\} - (n-k)W_{n-k}(A)$ dır.

v. $\sigma(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ olmak üzere eğer $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n$ ise

$$\frac{1}{k}(\lambda_{i_1} + \lambda_{i_2} + ... + \lambda_{i_k}) \in W_k(A)$$

dır.

1949 da Fan, A hermityen matrisi için quadratik formların toplamı ile ilgili olarak

$\lambda_1 \geq ... \geq \lambda_n$, A nın özdeğerleri olmak üzere,

$$kW_k(A) = \left[\sum_{j=1}^k \lambda_{n-j+1}, \sum_{j=1}^k \lambda_j \right]$$

eşitliğini elde etmiştir.

Örnek 3.1.3.3.2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2+3i & 5i \\ 2-3i & 2 & 1+7i \\ -5i & 1-7i & 3 \end{bmatrix}$ hermityen matrisinin $W_2(A)$ sınıfını

hesaplayalım.

Çözüm. 12.4327, -0.5018, -5.9309 sayıları A matrisinin özdeğerleridir. Bu durumda

$$kW_k(A) = \left[\sum_{j=1}^k \lambda_{n-j+1}, \sum_{j=1}^k \lambda_j \right]$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
W_2(A) &= \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^2 \lambda_{3-j+1}, \sum_{j=1}^2 \lambda_j \right] \\
&= \frac{1}{2} [-5.9309 - 0.5018, 12.4327 - 0.5018] \\
&= \frac{1}{2} [-6.4327, 11.9309] \\
&= \left[\frac{-6.4327}{2}, \frac{11.9309}{2} \right]
\end{aligned}$$

aralığıdır.

Fan, 14 yıl sonra bütün normal matrisler için $W_k(A)$ nın konveks olduğunu gösterdi. Williams ve Fillmore normal matrislerin k -sayısal bölgesinin, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, A normal matrisinin özdeğerleri olmak üzere

$$W_k(A) = \text{conv} \left\{ \frac{1}{k} (\lambda_{i_1} + \lambda_{i_2} + \dots + \lambda_{i_k}) : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n \right\}$$

olduğunu göstermişlerdir. Daha sonra Halmos her $A \in M_n(\mathbb{C})$ için $W_k(A)$ nın konveks olduğunu tahmin etmiştir ve kısa bir süre sonra Berger doktora tezinde bunu ispatlamıştır. $W_k(A)$ nın konveksliğinin bilinmesi ile Williams ve Fillmore bu sonucu kullanarak aşağıdaki bağıntıyı keşfetmişlerdir.

Teorem 3.1.3.3.1. $1 \leq i < j \leq n$ olmak üzere her $A \in M_n(\mathbb{C})$ için,

$$W_j(A) \subseteq W_i(A)$$

dır.

Bununla beraber Goldberg ve Straus, $W_i(A)$ nın reel lineer kombinasyonlarının bağıntıları üzerinde çalıştıklarında yukarıda verilen teoremle tezat olacak şekilde aşağıdaki teoremi sunmuşlardır.

Teorem 3.1.3.3.2. $1 \leq i < j \leq n$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere her $A \in M_n(\mathbb{C})$ için

$$\alpha W_i(A) \subseteq W_j(A)$$

olacak şekilde bir bağıntı yoktur.

- **c-Sayısal Bölgesi**

1973 de Marcus klasik sayısal bölgenin başka bir genelleştirilmesini göz önüne aldı ve adına c-sayısal bölge dedi.

Tanım 3.1.3.3.1. Her $A \in M_n(\mathbb{C})$ matrisi ve $c = (c_1, \dots, c_n)^t \in \mathbb{C}^n$ vektörü için,

$$W_c(A) = \left\{ \sum_{i=1}^n c_i x_i^* A x_i : x_1, \dots, x_n, \mathbb{C}^n \text{ de ortonormal} \right\}$$

kümesi A matrisinin c- sayısal bölgesidir.

Örnek 3.1.3.3.3 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ve $c = (2, 1)^t \in \mathbb{C}^2$ ise $W_c(A)$ yı bulalım.

Çözüm. $x_1 = (x_{11}, x_{12})$ ve $x_2 = (x_{21}, x_{22}) \in \mathbb{C}^2$ de ortonormal olmak üzere

$$\begin{aligned} W_c(A) &= \left\{ \sum_{i=1}^2 c_i x_i^* A x_i : x_1, x_2, \mathbb{C}^2 \text{ de ortonormal} \right\} \\ &= \left\{ \left(2 \begin{bmatrix} \overline{x_{11}} & \overline{x_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} \overline{x_{21}} & \overline{x_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} : x_{11}^2 + x_{12}^2 = 1, x_{21}^2 + x_{22}^2 = 1 \right) \right\} \\ &= \left\{ 2.2.x_{11}\overline{x_{11}} + 1.2.x_{21}\overline{x_{21}} : x_{11}, x_{21} \in \mathbb{C} \right\} \\ &= \left\{ 2(2.x_{11}\overline{x_{11}} + x_{21}\overline{x_{21}}) : x_{11}, x_{21} \in \mathbb{C} \right\} \\ &= \left\{ z = 2(2|x_{11}|^2 + |x_{21}|^2) : x_{11}, x_{21} \in \mathbb{C} \right\} \end{aligned}$$

kümesidir.

$$x_{11}^2 + x_{12}^2 = 1, x_{21}^2 + x_{22}^2 = 1 \text{ ve } |x_{11}|^2 \leq 1 \text{ ve } |x_{21}|^2 \leq 1$$

olduğundan

$$0 \leq (|x_{11}|^2 + |x_{21}|^2) \leq 2 \Rightarrow 0 \leq z = 2(2|x_{11}|^2 + |x_{21}|^2) \leq 2.3 = 6$$

elde edilir. Yani verilen elemanlar için $W_c(A)$, $[0, 6]$ aralığıdır.

Eğer $c \in \mathbb{C}^n$ nin ilk k koordinatı $\frac{1}{k}$ ve diğerleri 0 ise $W_k(A) = W_c(A)$ olduğu görülebilir. Yani k - sayısal bölgesi, c - sayısal bölgesinin özel bir halidir. Eğer $[c]$ yi, köşe elemanları $c_1, \dots, c_n$ olan $\text{diag}(c_1, \dots, c_n)$ köşegen matrisi olarak gösterirsek ve $U(A) = \{U^*AU : U \in M_n \text{ üniter matris}\}$, A ' nın üniter orbiti olmak üzere c - sayısal bölgesi

$$W_c(A) = \{iz([c]Y) : Y \in U(A)\}$$

şeklinde tekrar yazılabilir. Böylece $W_c(\cdot)$ değişmez üniter benzerdir. Dikkat edilirse her $A \in M_n(\mathbb{C})$ için eğer $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ ise $W_c(A)$ her zaman

$$\left\{ \sum_{k=1}^n c_k \lambda_{\pi(k)} : \pi \in S_n \right\}$$

noktalarını içerir. Burada S_n , n . dereceden simetrik gruptur. $P_c(A)$ yı, bütün $n!$ $\left\{ \sum_{k=1}^n c_k \lambda_{\pi(k)} : \pi \in S_n \right\}$ noktalarının dışbükey örtüsü olarak gösterelim. Eğer $W_c(A)$ dışbükey ise $P_c(A) \subseteq W_c(A)$ dir. Ek olarak eğer $P_c(A) = W_c(A)$ ise A , c - dışbükeydir. Benzer olarak aynı tanım k - sayısal bölgesi için de yapılabilir.

c - sayısal bölgesi, k - sayısal bölgesi gibi her zaman konveks değildir. Bu durumu Westwick 3×3 normal matrisi için bir örnek vererek her zaman konveks olamayacağını göstermiştir. Şöyle ki;

Özdeğerleri $\{i, 1, 0\}$ olan A normal matrisini ve $c = (i, 1, 0)^t$ yi alalım. $W_c(A)$ konveks değildir çünkü $-1, 2i \in W_c(A)$ ama -1 ve $2i$ yi birleştiren doğru parçasında $W_c(A)$ da bulunan başka bir nokta yoktur.

$W_c(A)$ genelde konveks olmamasına rağmen, $W_c(A)$ nın konveksliğini garantileyecek bazı yeterli durumlar vardır. Örneğin, eğer $c_1, c_2, \dots, c_n$ kompleks

düzlemde kolineer ise Westwick (ve sonrasında Poon) $W_c(A)$ nin her $A \in M_n(\mathbb{C})$ için konveks olduğunu ispatlamıştır. Daha sonra Au-Yeung ve Tsing bunun tersinin de doğru olduğunu göstermişlerdir. Özellikle de eğer $c_1, c_2, \dots, c_n$ kolineer değilse $W_c([c])$ nin konveks olmadığını göstermişlerdir. Bununla beraber eğer $A \in M_2$ ise Goldberg ve Straus $W_c(A)$ nin daima konveks olduğunu ispatlamışlardır. Ayrıca T-Sing, $W_c(A)$ nin $\frac{1}{n} \text{iz} A \left(\sum_{k=1}^n c_k \right)$ noktasına gelince yıldız şeklinde olduğunu ispatlamıştır.

- **C-Sayısal Bölge**

Goldberg ve Strauss c-sayısal bölgesini, C-sayısal bölgesine daha da genelleştirdiler. $A, C \in M_n$ olsun. A kümesinin C-sayısal bölgesi; her n . mertebeden $U \in M_n$ üniter matrisler için tüm $\text{iz}(CU^*AU)$ kompleks sayılarının kümesidir. Herhangi bir $c \in \mathbb{C}^n$ için $C = [c]$ alırsak $W_c(A) = W_C(A)$ elde edilir ve buradan c-sayısal bölgesinin C-sayısal bölgesinin özel bir durumu olduğu görülebilir. Bu takdirde, klasik sayısal bölge de $W(A) = W_{E_{11}}(A)$ dir. Burada $E_{ij} \in M_n$ ve (i, j) -inci elemanı 1 ve diğerleri sıfır olan olan matristir.

Önerme 3.1.3.3.3. (C- Sayısal Bölgenin Temel Özellikleri)

$A, B, C \in M_n$, $U \in M_n$ üniter ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ olsun.

- (a) $W_C(U^*AU) = W_C(A)$ dir.
- (b) $W_C(A) = W_A(C)$ dir.
- (c) $W_C(A+B) \subseteq W_C(A) + W_C(B)$ dir.
- (d) $W_C(\alpha A + \beta I) = \alpha W_C(A) + \beta \text{iz}(C)$ dir.

Bu sonuçtan ; eğer C normal ise $c \in \mathbb{C}^n$, C ' nin öz değerlerinden birinin özvektörü olmak üzere $W_c(A) = W_C(A)$ dir. Eğer C, k - ranklı dik iz düşüm ise

$W_C(A) = kW_k(A)$ dır. Çünkü bazı üniter U matrisleri için $C = U(E_{11} + \dots + E_{kk})U^*$ dir.

Elbetteki (a) ve (b) maddelerinden her $A \in M_n$ için $W_{U^*CU}(A) = W_C(A)$ dır.

Teorem 3.1.3.3.3. $A \in M_n$ olsun. $W_D(A) = W_C(A)$ olması için gerek ve yeter şart C ile D nin üniter benzer olmasıdır.

Her $A \in M_n$ için klasik sayısal bölge yarıçapı gibi C - sayısal bölge yarıçapı

$$r_C(A) := \max\{|z| : z \in W_C(A)\}$$

şeklinde tanımlanır.

Her C için $r_C(A)$ bir seminormdur. Goldberg ve Straus; $r_C(A)$ nın, M_n üzerinde bir norm olması için gerek ve yeter şartın C nin sabit bir matris olmaması ve $izC \neq 0$ olması gerektiğini göstermişlerdir. Böylece, k -sayısal yarıçapı $r_k(A) := \max\{|z| : z \in W_k(A)\}$ bir normdur ancak ve ancak $k=1, 2, \dots, n-1$ dir. $r_C(\cdot)$ nin norm olduğu $C \in M_n$ matrisleri için Goldberg ve Straus, C nin değişik tipleri için katlı çarpan elde etmişlerdir ve sonra Li bu sonucu (daha küçük çarpanlar vererek) her $A \in M_n$ için $\alpha\|A\| \leq r_C(A) \leq \beta\|A\|$ olacak şekilde $\alpha, \beta > 0$ sayılarını bularak geliştirmişlerdir. Burada $\|\cdot\|$ spektral normdur ve böylece herhangi $\mu \geq \frac{\beta}{\alpha^2}$, $r_C(\cdot)$ için bir katlı çarpanıdır.

Şimdi de biraz $W_C(A)$ nin konveksliğinden bahsedeceğiz.

Tanım 3.1.3.3.3.2. Kolineer özdeğerlere sahip $E \in M_n$ normal matrisine *asıl hermitiyen* denir.

Her asıl hermitiyen matrisi, bazı $H \in M_n$ hermitiyen matrisi ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için $\alpha H + \beta I_n$ şeklinde ifade edilebilir. Önerme 3.1.3.3.2 ve c -sayısal bölgesinin özelliklerinden “Eğer C normal ise her $A \in M_n$ için $W_C(A)$ konvektir ancak ve ancak C asıl hermitiyendir.” sonucu çıkarılabilir. Daha sonra Tsing ve Li (1991); bazı

$\mu \in \mathbb{C}$ için $C - \mu I$ matrisi, $k \neq l+1$ iken $M_{kl} = 0$ ve bütün diağonal blokları kare matris olacak şekilde bloklara ayrılmış formda bir blok değişim matrisi olan $M = (M_{kl})_{1 \leq k, l \leq m}$ matrisine üniter benzer ise her $A \in M_n$ için $W_C(A)$ nin merkezi orjinde olan bir çembersel disk ve böylece konveks olduğunu ispatladılar. Bu sonuç $W_C(A)$ nin C nin normal olmadığı durumlarda konveks olabileceğini söylemektedir. Bazı $s \in \mathbb{C}$ için eğer $\text{rank}(C - sI) = 1$ ise, her $A \in M_n$ için $W_C(A)$ konvektir. C nin hangi durumlarında $W_C(A)$ nin konveks olacağı da çalışılabilir bir konu olabilir. 1996 da Tsing ve Cheung her $A, C \in M_n$ için $\frac{(izA)(izC)}{n}$ noktasında $W_C(A)$ nin her zaman yıldız biçimli olduğunu ispatlamışlardır.

C -sayısal bölgeyi anlatan bu bölümü, özel olarak seçilmiş $A = \begin{pmatrix} \alpha & a \\ b & \alpha \end{pmatrix}$ ve $C = \begin{pmatrix} \gamma & c \\ d & \gamma \end{pmatrix}$ matrisleri alındığında $W_C(A)$ kümesini belirleyen aşağıdaki teoremlerle bitiriyoruz.

Teorem 3.1.3.3.4. $\alpha, \gamma \in \mathbb{C}$, $0 \leq b \leq a$ ve $0 \leq d \leq c$ olmak üzere

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & a \\ b & \alpha \end{pmatrix} \text{ ve } C = \begin{pmatrix} \gamma & c \\ d & \gamma \end{pmatrix}$$

olması durumunda

$$\begin{aligned} W_C(A) &= W \left(2 \begin{pmatrix} \gamma\alpha & ac \\ bd & \gamma\alpha \end{pmatrix} \right) \\ &= \left\{ 2\gamma\alpha + r \left[(ac + bd) \cos t + i(ac - bd) \sin t \right] : r \in [0, 1], t \in [0, 2\pi) \right\} \end{aligned}$$

kümesidir (Hing-Sang LAU, 1999).

- **q -Sayısal Bölge**

Bu bölümde son yıllarda oldukça fazla çalışılan ve C -sayısal bölgenin özel bir çeşidi olan q -sayısal bölge ve özelliklerinden kısaca bahsedeceğiz.

$A \in M_n$, $q \in \mathbb{C}$ ve $|q| \leq 1$ olmak üzere $A \in M_n$ matrisinin q -sayısal bölgesi

$$W_q(A) := \{y^*Ax : x, y \in \mathbb{C}^n, x^*x = y^*y = 1, y^*x = q\}$$

dir. Ek olarak

$$w_q(A) := \max \{|z| : z \in W_q(A)\}$$

ise $A \in M_n$ matrisinin q -sayısal yarıçapıdır.

$C_q = qE_{11} + \sqrt{1-|q|^2}E_{22}$ olarak alınırsa $W_q(A)$ nın $W_{C_q}(A)$ olduğu görülebilir.

(Teorem 1.2.5 den E, C_q ya üniter benzer herhangi bir matris ise $W_q(A) = W_E(A)$ dır.). Bundan dolayı q -sayısal bölgesi bir çeşit C -sayısal bölgesidir.

1961 de Bush ve Olkin $A \in M_n$ reel simetrik matris, $q \in \mathbb{C}$ ve $|q| \leq 1$ olmak üzere

$$\{y^tAx : x, y \in \mathbb{C}^n, x^*x = y^*y = 1, y^t x = q\}$$

kümesi üzerinde çalışmışlar ve $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$, A 'nın özdeğerleri olmak üzere

$$\frac{(1+q)\lambda_n - (1-q)\lambda_1}{2} \leq y^tAx \leq \frac{(1+q)\lambda_1 - (1-q)\lambda_n}{2}$$

olduğunu göstermişlerdir.

Örnek 3.1.3.3.4. $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ matrisinden

$$\left\{ y^T Ax : x, y \in \mathbb{C}^n, x^*x = y^*y = 1, y^T x = \frac{1}{3} \right\}$$

kümesini elde edelim.

Çözüm: A matrisi reel simetrik matristir ve özdeğerleri $\lambda_1 = 2$, $\lambda_{2,3} = 1$, $\lambda_4 = -1$ ve $\lambda_5 = -2$ dir. Bush ve Olkin' nin yukarıda bulduğu sonucu kullanırsak

$$\begin{aligned} \frac{(1+q)\lambda_n - (1-q)\lambda_1}{2} &\leq y^T A x \leq \frac{(1+q)\lambda_1 - (1-q)\lambda_n}{2} \\ &= \frac{\left(1+\frac{1}{3}\right).(-2) - \left(1-\frac{1}{3}\right)2}{2} \leq y^T A x \leq \frac{\left(1+\frac{1}{3}\right)2 - \left(1-\frac{1}{3}\right).(-2)}{2} \\ &= -2 \leq y^T A x \leq 2 \end{aligned}$$

olduğundan istenilen küme $[-2, 2]$ aralığıdır.

Bush ve Olkin' nin yukarıda bulduğu sonuçtan sonra Marcus ve Andresen bu sonucu çeşitli yollarla genelleştirmişlerdir. Dahası $W_q(A)$ nın yol bağlantılılığını kullanarak, $W_q(A)$ nın orjin etrafında döndürülmesi ile oluşturulan şeklin kompleks düzlemde bir halka olduğunu göstermişlerdir.

$q=0$ olduğu zaman her $A \in M_n$ için $W_0(A)$ her zaman orjin merkezli çembersel disk'tir. Eğer A hermityen ise, $\omega_0(A) = \frac{\lambda_1 - \lambda_n}{2}$ dir. Ek olarak Stolov her $A \in M_n$ için $\omega_0(A) = \min \{\|A - \lambda I\| : \lambda \in \mathbb{C}\}$ olduğunu göstermiştir. Her $A \in M_n$ için $W_0(A)$, A ya üniter benzer olan matrislerin (1,2)-inci elemanlarının kümesi gibi görülebilir.

Önerme 3.1.3.3.4. (q -Sayısal Bölgenin Temel Özellikleri)

$A, B \in M_n$ ve $|q| \leq 1$ olacak şekilde $q \in \mathbb{C}$ alalım.

- 1) Her $r, s \in \mathbb{C}$ olmak üzere $W_q(rA + sI) = rW_q(A) + sq$ dur.
- 2) Her hangi bir U üniter matrisi için $W_q(U^*AU) = W_q(A)$ dir.
- 3) $X^*X = I_m$ olan herhangi bir $X \in M_{n,m}$ için $W_q(X^*AX) \subseteq W_q(A)$ dir.

4) $|z|=1$ ve $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere $W_{qz}(A) = zW_q(A)$ dır.

5) $W_q(A+B) \subseteq W_q(A) + W_q(B)$ dir.

6) $\sigma(A)$, A nın spektrumunu göstermek üzere $q\sigma(A) \subseteq W_q(A)$ dır.

7) Reel q sayıları için $W_q(A^*) = \overline{W_q(A)}$ dır.

Bir sonraki sonuç q nun farklı değerleri için $W_q(A)$ nın bir içerik ilişkisini verir.

Teorem 3.1.3.3.5. $q_1, q_2 \in \mathbb{R}$ nin $0 \leq |q_2| < |q_1| \leq 1$ i sağladığını varsayalım. Bu durumda her hangi bir $A \in M_n$ için

$$q_2 W_{q_1}(A) \subseteq q_1 W_{q_2}(A)$$

dır.

Bu bölümü, eğer $|q| < 1$ ise $W_q(A)$ nın bir doğru parçası veya bir konveks çokgen hiç bir zaman olamayacağına ama bir nokta olabileceğine dikkat çekerek bitireceğiz.

Teorem 3.1.3.3.6. A nın skaler bir matris olmadığını ve $|q| \neq 1$ olduğunu farzedelim. Bu durumda $W_q(A)$ nın sınırları bir düzgün eğridir. Özellikle $W_q(A)$ bozulmamış bir doğru parçası yada bir konveks çokgen olamaz.

Teorem 3.1.3.3.7. $A \in M_n$ olsun. $A = \mu I$ ve $q\mu = \alpha$ olması için gerek ve yeter koşul $W_q(A) = \{\alpha\}$ olmasıdır.

q nın ve A nın bazı durumlarında $W_q(A)$ nın kesin şekli belirlenebilmiştir. Şimdi bunlara biraz da değineceğiz.

1. $q=0$ ise her $A \in M_n$ için $W_q(A)$, yarıçapı $\min\{\|A - \lambda I\| : \lambda \in \mathbb{C}\}$ olan orjin merkezli dairesel disktr. $W_0(A)$ kapalı da açıkta olabilir.

2. $|q|=1$ ise $W_q(A)=qW(A)$ dir. Bundan dolayı $W_q(A)$, $W(A)$ ın döndürülmüş halidir.

3. A asıl hermityen ise, $r,s \in \mathbb{C}$ ve $|r|=1$ olmak üzere $rA+sI$ hermityendir ve her q için

$$W_q(rA+sI)=rW_q(A)+sq$$

dir. $W_q(rA+sI)$, odakları $q \min \sigma(rA+sI)$ ve $q \max \sigma(rA+sI)$ olan ve minor eksen uzunluğu $\sqrt{1-q^2} (\max \sigma(rA+sI) - \min \sigma(rA+sI))$ olan bir eliptik diskidir.

4. $\alpha, \beta, q \in \mathbb{C}$, $0 \leq \beta \leq \alpha$ ve $0 \leq q \leq 1$ olmak üzere

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \text{ ve } C = C_q = \begin{pmatrix} q & \sqrt{1-q^2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

olması durumunda

$$\begin{aligned} W_C(A) &= W_q(A) \\ &= \left\{ \frac{r}{2} \left[(\alpha + \beta) + \sqrt{1-q^2} (\alpha - \beta) \right] \cos \theta + \right. \\ &\quad \left. \sqrt{-1} \frac{r}{2} \left[(\alpha - \beta) + \sqrt{1-q^2} (\alpha + \beta) \right] \sin \theta : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\} \end{aligned}$$

dir.

5. $n \geq 3$ olmak üzere $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ alalım. Bu durumda,

$$W_q(A) = \bigcup \left\{ W_q \left(\text{diag}(\lambda_{j_1}, \lambda_{j_2}, \lambda_{j_3}) \right) : 1 \leq j_1 < j_2 < j_3 \leq n \right\}$$

dir.

Tanım 3.1.3.3.3. Eğer bir $m \times m$ P matrisi, bir $n \times n$ A matrisinin $n-m$ satırı ile aynı $n-m$ sütunun kaldırılması ile elde ediliyor ise P , A matrisinin bir $m \times m$ temel altmatrisidir.

7. $q \in (0,1)$ ve $n \geq 3$ olsun. $A \in M_n$ normal matris ve $k \geq 3$ olmak üzere $\mu_1, \dots, \mu_k$ 'nin $W(A) = \text{conv}\sigma(A)$ nin farklı köşeleri olduğunu varsayalım. $B = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$ matrisinin 3×3 lük $B_1, \dots, B_{k-2}$ temel matrisleri vardır öyleki

$$W_q(A) = \bigcup_{1 \leq j \leq k-2} W_q(B_j)$$

dir.

3.1.4. Hadamard Matrisleri

1893 te Hadamard Jacques Salomon' un $|a_{ij}| \leq 1$ olacak şekilde a_{ij} elemanları ile verilen herhangi bir $n \times n$ kare kompleks matrisin determinantının mutlak değerinin alabileceği en büyük değer nedir sorusuna bulduğu çözüm olan ve bu olaydan 26 yıl önce 1867 de Sylvester tarafından keşfedilmiş olan matrislerdir.

Tanım 3.1.4.1. Her girdisi 1 ya da -1 olan ve $HH^t = nI_n$ eşitliğini sağlayan $n \times n$ boyutlu bir H matrisine n ' lik *Hadamard matrisi* denir. Bu ifadede, I_n , $n \times n$ lik birim matris, H^t de, H matrisinin devriğidir (Selda Küçükçiftçi , 2004).

Aşağıdaki matrisler 1. mertebeden, 2. mertebeden ve 4. mertebeden Hadamard matrislerdir (Bozkurt B. ve arkadaşları).

$$[1], \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Hadamard matrisler başta iletişim (özellikle mobil iletişim), istatistik, projektif geometri, tamamlanamamış blok tasarımlar ve optimal kontrol uygulamasında, blok şifrelerde kullanılan doğrusal dönüşümlerin incelenmesinde, kodlar teorisinde hata düzelten kodlar yaratmada, bilgisayar mühendisliğinde ve kuantum kapılarında olmak üzere bir çok alanda kullanılmaktadır (Selda Küçükçiftçi, 2004, Bozkurt B. ve arkadaşları, Fikri Gökpınar , 2007).

Teorem 3.1.4.1. Her i, j için elemanları $|x_{ij}| \leq 1$ özelliğini sağlayan $X = (x_{ij})_{n \times n}$ tipindeki reel matrisi için $|\det(X)| \leq n^{n/2}$ dir. Eşitlik X ' in bir Hadamard matris olması durumunda sağlanır (Peter J. Cameron, 2006).

İspat. $x_1, x_2, \dots, x_n$ X in satırları olsun. Basit Öklit geometrisinden $|\det(X)|$ kenarları $x_1, x_2, \dots, x_n$ olan paralelyüzün hacmidir. Bundan dolayı $|x_i|$, x_i nin Öklit uzunluğu olmak üzere

$$|\det(X)| \leq |x_1| \cdot \dots \cdot |x_n|$$

dir. Eğer $x_1, x_2, \dots, x_n$ karşılıklı dik ise eşitlik sağlanır.

$$|x_i| = \left(x_{i1}^2 + \dots + x_{in}^2 \right)^{1/2} \leq n^{1/2}$$

olduğundan

$$|\det(X)| \leq |x_1| \cdot \dots \cdot |x_n| \leq n^{1/2} \dots n^{1/2} = n^{n/2}$$

dir. Tüm j ler için $|x_{ij}| = 1$ olması durumunda eşitlik sağlanır (Peter J. Cameron, 2006).

Teorem 3.1.4.2. Eğer H $n \times n$ tipinde bir Hadamard matris ise $\det(H) = \pm n^{n/2}$ dir (Bozkurt B. ve arkadaşları).

İspat. H , $n \times n$ Hadamard ise,

$$H.H^t = n.I_n$$

dir ve buradan determinant alınırsa

$$\det(H.H^t) = \det(n.I_n)$$

elde dilir. Determinant özelliğinden,

$$\det(H). \det(H^t) = n^n$$

ve böylece

$$\det(H)^2 = n^n$$

yazılır. Buradan,

$$\det(H) = \pm n^{\frac{n}{2}}$$

sonucuna ulaşılır (Bozkurt B. ve arkadaşları).

Teorem 3.1.4.3. Hadamard matrislerin satırları ikişerli ortogonaldır.

İspat. $n \times n$ 'lik bir H Hadamard matrisinin i -inci satırı ve j -inci sütunundaki (i, j) -inci girdisini h_{ij} ile gösterirsek H^t matrisinin (i, j) -inci girdisi h_{ji} dir ve buradan

$$H = \begin{bmatrix} h_{11} & \dots & h_{1j} & \dots & h_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ h_{i1} & \dots & h_{ij} & \dots & h_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ h_{n1} & \dots & h_{nj} & \dots & h_{nn} \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} HH^t &= \begin{bmatrix} h_{11} & \dots & h_{1j} & \dots & h_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ h_{i1} & \dots & h_{ij} & \dots & h_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ h_{n1} & \dots & h_{nj} & \dots & h_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} & \dots & h_{i1} & \dots & h_{n1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ h_{1j} & \dots & h_{ij} & \dots & h_{nj} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ h_{1n} & \dots & h_{in} & \dots & h_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} h_{11} & \dots & h_{1k} & \dots & h_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ h_{i1} & \dots & h_{ik} & \dots & h_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ h_{n1} & \dots & h_{nk} & \dots & h_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} & \dots & h_{j1} & \dots & h_{n1} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ h_{1k} & \dots & h_{jk} & \dots & h_{nk} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ h_{1n} & \dots & h_{jn} & \dots & h_{nn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_k h_{1k}^2 & \dots & \sum_k h_{1k} h_{ik} & \dots & \sum_k h_{1k} h_{jk} & \dots & \sum_k h_{1k} h_{nk} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \sum_k h_{ik} h_{1k} & \dots & \sum_k h_{ik}^2 & \dots & \sum_k h_{ik} h_{jk} & \dots & \sum_k h_{ik} h_{nk} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \sum_k h_{nk} h_{1k} & \dots & \sum_k h_{nk} h_{ik} & \dots & \sum_k h_{nk} h_{jk} & \dots & \sum_k h_{nk}^2 \end{bmatrix} \\ &= n I_n \end{aligned}$$

olur.

HH^t matrisinin (i, i) -inci girdisi hep $\sum_{k=1}^n h_{ik}^2 = n$ olur ve $1 \leq i < j \leq n$ olmak üzere

her (i, j) girdisi için $\sum_{k=1}^n h_{ik} h_{jk} = 0$ dır. Yani satırlar ikişer birbiriyle ortogonaldır (Selda Küçükçiftçi , 2004).

Hadamard matrisin tanımından H matrisinin tekil olmadığı ve tersinin $n^{-1}H^t$ olduğu görülür. Ek olarak, $H^t H = nI_n$ olup, bir hadamard matrisin devriği (transpozu) de bir Hadamard matristir. Yani herhangi bir hadamard matrisinin sütunları da ikişerli ortogonaldır (Ali Kemal Şehirlioğlu , Sevilay Çakır , 2006).

Tanım 3.1.4.2. Bir Hadamard matrisinin herhangi bir satırını ya da sütununu -1 ' le çarparsak yeni bir Hadamard matrisi elde ederiz. Bu işlemleri peşi sıra uygulayarak, herhangi bir Hadamard matrisinden, ilk satırı ve ilk sütunundaki tüm girdileri 1 olan bir Hadamard matrisi oluşturabiliriz. Bu özelliği taşıyan bir Hadamard matris, *standart (normalleştirilmiş) Hadamard matris* diye adlandırılır.

3.1.4.1. Hadamard Matrislerin Denklığı

Herhangi bir Hadamard matrisin,

- i) Herhangi iki satırı veya sütunu yer değiştirdiğinde
- ii) Hadamard matrisin herhangi bir satırı veya sütunu -1 ile çarpıldığında
- iii) i) ve ii) deki işlemlerin kombinasyonları uygulandığında yeni oluşan matris yine bir hadamard matristir ve bu iki matris de birbirleriyle denktir (Bozkurt B. ve arkadaşları).

Tanım 3.1.4.1.1. Her sütunda ya da satırda bir tane 1 olan kare matrislere *permütasyon (devrimsel) matrisler* denir (Murat Donduran, 2008).

Örnek 3.1.4.1.1. $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ bir permütasyon matrisidir.

$I_{n \times n}$ matrisinin 1. ve 2. satırlarının yer değiştirmiş hali olan P permütasyon matrisi A matrisi ile soldan çarpıldığında, PA matrisi A matrisinin 1. ve 2. satırını aynı şekilde yer değiştirir.

Örnek 3.1.4.1.2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$ matrisini ve $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ permütasyon

matrisini dikkate alalım. Buradan,

$$PA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$$

dır ve PA matrisi A matrisinin 1. ve 2. satırının yer değiştirmiş halidir.

Tanım 3.1.4.1.2. I birim matris ve U^* matrisi U matrisinin eşlenik devriği olmak üzere $U^*U = UU^* = I$ eşitliğini sağlayan kompleks kare matrise *üniter matris* denir.

Örnek 3.1.4.1.2. $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ bir köşegen üniter matristir.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$ matrisi D matrisi ile çarpılırsa,

$$DA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -9 & -10 & -11 & -12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir ki, D matrisi $I_{n \times n}$ matrisinin 3. Satırının -1 ile çarpılmış hali olup DA matrisi A matrisinin 3. satırının aynı şekilde -1 ile çarpılmış halidir.

Tanım 3.1.4.1.3. Eğer D_1 ve D_2 köşegen uniter matrisler, P_1 ve P_2 permütasyon (devrimsel) matrisler olmak üzere

$$H_1 = D_1 P_1 H_2 P_2 D_2$$

ise, H_1 ve H_2 Hadamard matrisleri birbirlerine denktir ve $H_1 \equiv H_2$ olarak gösterilir (Wojciech Tadejand ve Karol Zyczkowski , 2006).

Önerme 3.1.4.1.1. $H = \{H_n : H_n \text{ bir Hadamard matris}\}$ kümesi üzerindeki her H_1 , $H_2 \in H$ için $H_1 \equiv H_2 \Leftrightarrow H_1 = D_1 P_1 H_2 P_2 D_2$ şeklinde tanımlanan bağıntı bir denklik bağıntısıdır.

İspat. Bağıntının yansıma, simetri ve geçişme özelliklerine sahip olup olmadığına bakmalıyız.

Yansıma özelliği: $H = I_{n \times n} I_{n \times n} H I_{n \times n} I_{n \times n}$ olduğundan $H_1 \equiv H_1$ dir. Bu takdirde, yansıma özelliği vardır.

Simetri özelliği: $H_1 \equiv H_2$ ise $H_1 = D_1 P_1 H_2 P_2 D_2$ dir. D_1, D_2, P_1, P_2 tersinir matrisler olduğundan

$$P_1^{-1} D_1^{-1} H_1 D_2^{-1} P_2^{-1} = H_2$$

$$D_1^{-1} P_1^{-1} H_1 P_2^{-1} D_2^{-1} = H_2$$

oldüğundan $H_2 \equiv H_1$ dir. Bu takdirde, simetri özelliği vardır.

Geçişme özelliği: $H_1 \equiv H_2$ ve $H_2 \equiv H_3$ olsun. $H_1 \equiv H_2$ ise $H_1 = D_1 P_1 H_2 P_2 D_2$ dir ve $H_2 \equiv H_3$ ise $H_2 = D_3 P_3 H_3 P_4 D_4$ dir. H_2 yi H_1 de yerine yazılırsa,

$$H_1 = D_1 P_1 D_3 P_3 H_3 P_4 D_4 P_2 D_2$$

$$= D_1 D_3 P_1 P_3 H_3 P_2 P_4 D_2 D_4$$

dir. Bu takdirde, geçişme özelliği vardır.

1, 2, 4, 8 ve 12 mertebeli her Hadamard matrisin tek bir denklik sınıfı vardır. 16, 20, 24 ve 28 mertebeli Hadamard matrislerin ise sırasıyla 5, 3, 60 ve 487 tane denklik sınıfı vardır. Kai-Tai Fang ve Gennian Ge 382 tane denk olmayan 36 lık hadamard matrisi olduğunu bulmuştur (Selda Küçükçiftçi, 2004).

Teorem 3.1.4.1.1. $n \neq 1$ tek tamsayı ise n ' lik bir Hadamard matrisi olamaz (Selda Küçükçiftçi, 2004).

İspat. Bir Hadamard matrisi alalım. Sütunları gerektiğinde -1 ' le çarparak, ilk sıranın 1 ' lerden oluştuğunu varsayabiliriz. Şimdi, yukarda kanıtladığımız $\sum_{k=1}^n h_{ik} h_{jk} = 0$ eşitliğinde $i = 1, j = 2$ alalım: $\sum_{k=1}^n h_{2k} = 0$ buluruz. Her h_{2k} , 1 ya da -1 dir ve buradan 1 ' e eşit olan h_{2k} girdilerinin sayısının -1 ' e eşit olan h_{2k} girdilerinin sayısına eşit olduğu anlaşılır. Böylece n çift olmalı sonucuna ulaşılır (Selda Küçükçiftçi, 2004).

Teorem 3.1.4.1.2. n ' lik Hadamard matrisi için, $n = 1, n = 2$ veya $n, 4$ ' ün bir tam katıdır (Selda Küçükçiftçi, 2004).

İspat. $n, 2$ ' den büyük olsun ve H, n ' lik bir Hadamard matrisi olsun. H ' nin standard olduğunu varsayabiliriz. Satırların yerlerini değiştirerek, H ' nin ilk üç satırını

$$\begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 & -1 & \dots & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & \dots & 1 & -1 & \dots & -1 & 1 & \dots & 1 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{bmatrix}$$

biçimine getirelim. Üçüncü satırın ilk yarısındaki 1 ' lerin sayısına a , -1 ' lerin sayısına b , ikinci yarısındaki 1 ' lerin sayısına c , -1 ' lerin sayısına d dersek, birinci ve ikinci

satırların çarpımından, $a + b - c - d = 0$, birinci ve üçüncü satırların çarpımından, $a - b + c - d = 0$,

ikinci ve üçüncü satırların çarpımından, $a - b - c + d = 0$ eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler $a = b = c = d$ eşitliklerini verir. Öte yandan uzunlukların toplam n olduğundan $a + b + c + d = n$ dir. Dolayısıyla $n = 4a$ ve n , 4'ün tam katıdır (Selda Küçükçiftçi, 2004).

Sanı 3.1.4.1.1. 4' ün katı olan her pozitif n tamsayısı için n ' lik Hadamard matrisi vardır.

Hadamard matrislerinin varlığı hakkında birçok sonuç elde edilmesine karşın bu sanı henüz kanıtlanamamıştır (Selda Küçükçiftçi, 2004).

Teorem 3.1.4.1.2. n ve r ' lik Hadamard matrisleri varsa nr ' lik Hadamard matrisi de vardır (Selda Küçükçiftçi, 2004).

İspat. K ve L sırasıyla n ve r ' lik Hadamard matrisleri olsun. k_{ij} , K matrisinin (i, j) -ninci girdisi olsun. Aşağıdaki gibi $nr \times nr$ lik bir H matrisi tanımlayalım

$$H = \begin{bmatrix} k_{11}L & k_{12}L & \dots & k_{1n}L \\ k_{21}L & k_{22}L & \dots & k_{2n}L \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1}L & k_{n2}L & \dots & k_{nn}L \end{bmatrix}.$$

Matris çarpımı kuralından, HH^t matrisinin (i, j) pozisyonunda $r \times r$ boyutlu

$$\sum_{x=1}^n k_{ix}k_{jx}LL^t = \left(\sum_{x=1}^n k_{ix}k_{jx}\right)rI_r$$

alt matrislerin olduğu anlaşılır. $\sum_{x=1}^n k_{ix}k_{jx}$ sayısı $i = j$ ise n ve $i \neq j$ ise 0 olduğundan,

$i = j$ ise (i, j) altmatrisi nrI_r ' ye, diğer durumlarda 0 matrisine eşittir. Böylece

$H.H^t = nrI_{nr}$ eşitliği bulunur. H ' nin her girdisi 1 ya da -1 olduğundan, tanımlanan H bir Hadamard matrisidir (Selda Küçükçiftçi, 2004).

Sonuç 3.1.4.1.1. Her k pozitif tamsayısı için 2^k 'lık Hadamard matrisi vardır (Selda Küçükçiftçi, 2004).

İspat. 2^k 'lık Hadamard matrisleri varlığı bilgisi ve bir önceki sonucun kullanılması ile her k pozitif tamsayısı için 2^k 'lık Hadamard matrisleri bulunabilir (Selda Küçükçiftçi, 2004).

Tanım 3.1.4.1.4. Elemanları $1, -1, i, -i$ olan ve $CC^* = cI_c$ koşulunu sağlayan c mertebeden kare matrislere *kompleks Hadamard matrisler* denir.

Lemma 3.1.4.1. Kompleks Hadamard matrislerin mertebeleri 1 'dir yada 2 ile bölünebilir (Jennifer Wallis, 1973).

İspat. $1.$ ve $2.$ mertebeden reel Hadamard matrisler vardır. Farzedelim ki $m > 2$ olsun. Uygun olarak $-1, i, -i$ ile çarpılıp gerekli işlemler yapıldığında ilk iki satır

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 1 & . & . & . & . & . & . & 1 \\ i & i & . & . & i & . & . & . & -i \end{array} \quad \begin{array}{cccc} -i & . & . & -i \end{array} \quad \begin{array}{cccc} 1 & 1 & . & . & . & . & . & . & 1 \\ 1 & 1 & . & . & 1 & . & . & . & -1 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} -1 & . & . & -1 \end{array}$$

$x \qquad y \qquad z \qquad w$

şekline getirilebilir. x, y, z, w her tipin kolonlarındaki elemanların sayısını belirtmek üzere m mertebeli Hadamard matrisin satırlarının ikiyeşerli ortogonal olmasından kaynaklı $x=y, z=w$ ve $x+y+z+w=m$ olduğundan $2/m$ 'dir (Jennifer Wallis, 1973) .

Önerme 3.1.4.1.2. $n \times n$ 'lık A Hadamard matrisinin bütün özdeğerleri $\sqrt{n}$ mutlak değerine sahiptir (Laszlo Babai, 2002).

İspat. $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ olmak üzere $\lambda_i, n \times n$ 'lık A Hadamard matrisinin özdeğerleri olsun.

$$HH^* = nI_n \text{ ve } HH^* = (U^*DU)(U^*D^*U) = U^*(DD^*)U \text{ olduğundan}$$

$$|HH^* - nI_n| = 0 \text{ ve } |U^*(DD^*)U - nU^*I_nU| = 0$$

yazılır. Buradan

$$\begin{aligned}
0 &= |U^*| \begin{vmatrix} \|\lambda_1\|^2 - n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \|\lambda_n\|^2 - n \end{vmatrix} |U| \\
&= |U^*U| \begin{vmatrix} \|\lambda_1\|^2 - n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \|\lambda_n\|^2 - n \end{vmatrix} \\
&= |I_n| \cdot (\|\lambda_1\|^2 - n) \dots (\|\lambda_n\|^2 - n)
\end{aligned}$$

olur ki, özdeğerler $|\lambda_i| = \sqrt{n}$ şeklindedir.

Sonuç 3.1.4.1.2. A Hadamard matrisinin özdeğerleri $x^2 + y^2 = n$ merkezli çemberinin üzerindedir.

İspat. $\lambda = x + iy$, A Hadamard matrisinin herhangi bir özdeğeri olsun.

Önerme 3.1.4.1.2 den

$$\begin{aligned}
|\lambda| &= |x + iy| \\
&= \sqrt{x^2 + y^2} \\
&= \sqrt{n}
\end{aligned}$$

elde edilir ve $x^2 + y^2 = n$ yazılır.

Sonuç 3.1.4.1.3. Hermityen Hadamard matrislerinin özdeğerleri $-\sqrt{n}$ veya $\sqrt{n}$ dir.

İspat. Hermityen matrislerin özdeğerlerinin reel olması ve Önerme 4.1.2 den özdeğerlerin normlarının $\sqrt{n}$ olması bilgisi ile özdeğerler $-\sqrt{n}$ veya $\sqrt{n}$ dir.

Tanım 3.1.4.1.5. İlk satırı ve sütunu 1 olan kompleks Hadamard matrisler *dephase* olarak adlandırılır.

Hatırlanmalıdır ki; bu formda ki reel Hadamard matrislere normalize edilmiş yada standart hadamard matrisler denir.

n mertebeli dephase formdaki kompleks Hadamard matrisin aşağı sağında bulunan $n-1$ mertebeli alt matrise ise *çekirdek* denir.

Aynı dephase formdaki iki kompleks Hadamard matris birbirine denktir (Wojciech Tadejand ve Karol Zyczkowski , 2006).

3.1.4.2 Bazı Hadamard Matris Türetme Teknikleri

Hadamard matrisler modern iletişimde ve istatistikte oldukça geniş çeşitlilikte uygulamalara sahiptir. Bir uygulamada büyük önem taşıyan bir kurulum tekniği başka bir uygulamada daha az önem arz edebilmektedir.

Sylvester tekniği ve genellikle iletişim sistemleri ve dijital görüntü işlemlerini içeren mühendislik uygulamalarında kullanılmakta olan Walsh fonksiyonlarıyla hadamard matrisleri arasında yakın bir ilişki vardır.

Sylvester 'ın kurulumları dışında bu tür matrislerin kurulum yollarının bir çok sistematik yolları vardır. Bu tekniklerin iyi bir listesine Geramita ve Seberry (1979), Hedayat et al (1999) ulaşılabilir (Jennifer Seberry, B. J. Wysocki, T. A. Wysocki, 2005).

Tanım 3.1.4.2.1. (Konferans Matris) n . mertebeden bir konferans matrisi, köşegen elemanları 0' lardan, diğer tüm elemanları +1 ve -1' lerden oluşan $n \times n$ boyutunda bir matristir.

Konferans matrisleri $C. C^t = (n-1)I_n$ eşitliğini sağlar (Ömer Faruk GÖZÜKIZIL, 2008)

Tanım 3.1.4.2.2. (Kronecker Çarpımı) $m \times n$ tipinde $A = [a_{ij}]$, ve $p \times q$ tipinde $B = [b_{ij}]$ matrisleri için $mp \times nq$ tipindeki $A \otimes B = [Ab_{ij}]$ matrisine A ve B nin Kronecker Çarpımı denir (Ömer Faruk GÖZÜKIZIL, 2008).

- **Kronecker Çarpımı (Sylvester) Yöntemi**

H_m ve H_n sırasıyla m . ve n . mertebeden iki Hadamard matris olmak üzere, bu iki matrisin çarpımı $m.n$ tipinde yeni bir Hadamard matris oluşturur (Ömer Faruk GÖZÜKIZIL, 2008).

$H_m \otimes H_n$ formunda H_n 'in her (+1) ini H_m ile H_n 'in her (-1) ini $-H_m$ ile değiştirilerek oluşturulan matris Hadamard matristir. Bunu doğrudan hesaplayarak kontrol etmek çok kolaydır (Ömer Faruk GÖZÜKIZIL, 2008).

Örnek 3.1.4.2.1. $H_1 = \begin{bmatrix} - & + \\ + & + \end{bmatrix}$ ve $H_2 = \begin{bmatrix} + & + \\ + & - \end{bmatrix}$ Hadamard matrislerini alırsak,

$$H_1 \otimes H_2 = H = \begin{bmatrix} - & + & - & + \\ + & + & + & + \\ - & + & + & - \\ + & + & - & - \end{bmatrix}$$

olur (Ömer Faruk GÖZÜKIZIL, 2008).

Ayrıca Sylvester matrisi S_1 üzerinde Sylvester kuruluşunu kullanarak oluşturulur.

Tanım 3.1.4.2.3. $S_0 = [1]$ matrisi ve $S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ olsun. *Sylvester matrisi* S_n

$$S_n = S_1 \otimes S_{n-1}$$

şeklinde tanımlanan $2^n \times 2^n$ boyutlu matristir (Tresstler, 2004; Fikri Gökpınar, 2007).

Bu şekilde tanımlanan S_n matrislerinin 2^n tane olan özdeğerleri aşağıdaki gibidir.

2^{n-1} tane özdeğeri $+2^{n/2}$ ve 2^{n-1} tane özdeğeri $-2^{n/2}$ dir (R. Yarlagadda ve J. Hershey, 1982). Sylvester matrisleri simetriktir ve izleri sıfırdır.

- **Konferans Matris Yöntemi**

Eğer C ters simetrik bir konferans matris ise, ($C^t = -C$), o zaman $I_n + C$, n . mertebeden bir Hadamard matristir (Ömer Faruk GÖZÜKIZIL, 2008).

İspat. $H = I_n + C$ olmak üzere, $(I_n + C)(I_n + C)^t$ doğrudan hesaplanır.

$(I_n + C)^t = I_n + C^t$ ise, $HH^t = nI_n$ olduğu gösterilir.

$$\begin{aligned}
 HH^t &= (I_n + C)(I_n + C)^t \\
 &= I_n + C^t + C + C \cdot C^t \\
 &= I_n - C + C + C \cdot C^t \quad (\text{ters simetriklik: } C^t = -C) \\
 &= I_n + (n-1)I_n \quad (C \cdot C^t = (n-1)I_n) \\
 &= I_n + nI_n - I_n \\
 &= nI_n
 \end{aligned}$$

Lemma 3.1.4.2.1. Eğer C $n \times n$ tipinde simetrik bir konferans matrisi ise

$$H = \begin{bmatrix} I + C & -I + C \\ -I + C & -I - C \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlanan H matrisi $2n \times 2n$ tipinde simetrik Hadamard matrisi olur (Ömer Faruk GÖZÜKIZIL, 2008).

İspat. Tanımlanan H simetrik olduğundan $H^t = H$ dir.

$$\begin{aligned}
 HH^t &= \begin{bmatrix} I_n + C & -I_n + C \\ -I_n + C & -I_n - C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_n + C & -I_n + C \\ -I_n + C & -I_n - C \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (I_n + C) \cdot (I_n + C) + (-I_n + C) \cdot (-I_n + C) & (I_n + C) \cdot (-I_n + C) + (-I_n + C) \cdot (-I_n - C) \\ (-I_n + C) \cdot (I_n + C) + (-I_n - C) \cdot (-I_n + C) & (-I_n + C) \cdot (-I_n + C) + (-I_n - C) \cdot (-I_n - C) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2C^2 + 2I_n & 0 \\ 0 & 2C^2 + 2I_n \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 2(n-1)I_n + 2I_n & 0 \\ 0 & 2(n-1)I_n + 2I_n \end{bmatrix} (C^t = C \text{ ve } C^2 = C. C^t = (n-1)I_n \text{ dir.}) \\
&= \begin{bmatrix} 2nI_n & 0 \\ 0 & 2nI_n \end{bmatrix} \\
&= 2n \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = 2nI_{2n}
\end{aligned}$$

Bu genelleştirme $n=2$ için doğrudur ancak $n=4, 6, 8$ için doğruluğu geçerli değildir. Çünkü 4×4 , 6×6 ve 8×8 lik simetrik konferans matris yazılmaz dolayısıyla 8×8 , 12×12 ve 16×16 tipinde simetrik Hadamard matrisler, konferans matris yöntemiyle türetilemez (Ömer Faruk GÖZÜKIZIL, 2008).

- **Paley Kuruluşu**

Tanım 3.1.4.2.4. F_q , q üzerinde cisim ve q tek ve asal olsun. *Kuadratik artık kümesi* $QR(q)$ aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$QR(q) = \{z^2 : z \in F_q, z \neq 0\} \text{ ve}$$

$$QNR(q) = F_q - \{QR(q) \cup 0\}$$

Buradan F_q üzerinde tanımlı kuadratik karakter fonksiyonu;

$$\chi_q(x) = \begin{cases} 0 & ; x = 0 \\ 1 & ; x \in QR(q) \\ -1 & ; x \in QNR(q) \end{cases}$$

şeklinde verilir (Fikri Gökpınar, 2007).

Yardımcı Teorem 3.1.4.2.1. $q \equiv 3 \pmod{4}$ olacak şekilde q asal sayı olsun, bu durumda $q+1$ mertebeli Hadamard matrisi vardır (Tressler, 2004; Fikri Gökpınar, 2007).

Ayrıca bu matris,

$$h_{ij} = \begin{cases} 1 & ; i = \infty \quad yada \quad j = \infty \\ \chi_q(j-i) & ; i, j \in F_q \quad i \neq j \\ -1 & ; i = j \quad i \neq \infty \end{cases}$$

biçimindedir. Burada ∞ ilk satır ve sütun indisleridir.

Örnek 3.1.4.2.2. 7 asal bir sayıdır ve $7 \equiv 3 \pmod{4}$ olduğundan 8.mertebeden bir Hadamard matrisi vardır. F_7 cismindeki kuadratik artıklar $QR(7)=\{1,4\}$ dir. Dolayısıyla H_p matrisi;

$$H_p = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Yardımcı Teorem 3.1.4.2.2. $q \equiv 1 \pmod{4}$ olacak şekilde q asal sayı olsun, bu durumda $2(q+1)$ mertebeden Hadamard matrisi vardır (Tressler,2004;13).

B matrisi,

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & ; i = \infty \quad yada \quad j = \infty \quad i \neq j \\ \chi_q(j-i) & ; i, j \in F_q \quad i \neq j \\ 0 & ; i = j \end{cases}$$

alınsın. C matrisi, B matrisinin elemanlarından $+1$, -1 , 0 ' ın yerine sırasıyla

$$\begin{pmatrix} + & + \\ + & - \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} - & - \\ - & + \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

elemanlarının konmasıyla elde edilir. D matrisi ise B matrisinin elemanlarından $+1$, -1 , 0 ' ın yerini sırasıyla

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} + & - \\ - & - \end{pmatrix}$$

elemanlarının konmasıyla elde edilir. $A=C+D$ olarak elde edilen matris $(2q+2)$ mertebeli Hadamard matrisidir (Fikri Gökpınar, 2007).

Örnek 3.1.4.2.3. F_5 cismindeki kuadratik artıklar $QR(q)=\{1,4\}$ ' dir. Dolayısıyla B matrisi;

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Buradan C matrisi

[illegible]

dır. Benzer şekilde;

[illegible]

elde edilir. Böylece A matrisi,

$$A = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} + & - \\ - & - \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} + & + \\ + & - \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} + & + \\ + & - \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} + & + \\ + & - \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} + & + \\ + & - \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} + & + \\ + & - \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} + & + \\ + & - \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} + & - \\ - & - \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} + & + \\ + & - \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} - & - \\ - & + \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} - & - \\ - & + \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} + & + \\ + & - \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} + & + \\ + & - \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} + & + \\ + & - \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} + & - \\ - & - \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} + & + \\ + & - \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} - & - \\ - & + \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} - & - \\ - & + \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} + & + \\ + & - \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} - & - \\ - & + \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} + & + \\ + & - \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} + & - \\ - & - \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} + & + \\ + & - \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} - & - \\ - & + \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} + & + \\ + & - \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} - & - \\ - & + \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} - & - \\ - & + \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} + & + \\ + & - \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} + & - \\ - & - \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} + & + \\ + & - \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} + & + \\ + & - \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} + & + \\ + & - \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} - & - \\ - & + \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} - & - \\ - & + \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} + & + \\ + & - \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} + & - \\ - & - \end{pmatrix} \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. (Fikri Gökpınar, 2007)

Marrero (2002) adlı matematikçi bir hadamard matrisinden üç yeni Hadamard matrisi türetmeyi başarmıştır. Marrero'nun yöntemi şöyle; herhangi bir $2m'$ lik H Hadamard matrisi ele alalım (m çift olmalı). Eğer $J=J_{m \times 1}$, her girdisi 1 olan $m \times 1$ ' lik sütun vektörse, H' yi aşağıdaki gibi bir Hadamard matrisine dönüştürebiliriz.

$$H = \begin{pmatrix} J & J & A \\ J & -J & B \end{pmatrix}$$

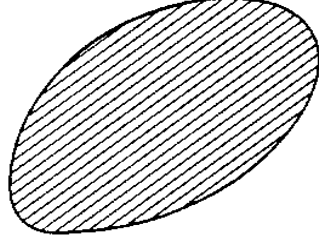
Şimdi A ve B yerine $-A$ ve/yada $-B$ alarak, aşağıdaki gibi üç yeni Hadamard matrisi elde edebiliriz:

$$\begin{pmatrix} J & J & -A \\ J & -J & B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} J & J & A \\ J & -J & -B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} J & J & -A \\ J & -J & -B \end{pmatrix}$$

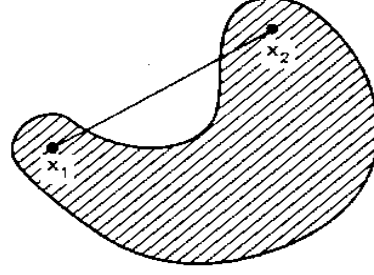
(Selda Küçükçiftçi, 2004)

Tanım 3.1.4.2.5. S kümesi verilmiş olsun. S kümesinin E^n 'de bir *dış bükey küme* olması için her $x_1, x_2 \in S$ ve $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ şeklindeki bir doğru parçasının S kümesine dahil olması gerekmektedir. $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, $\lambda \in [0,1]$ şeklindeki x noktaları, x_1 ve x_2 noktalarının *dış bükey kombinasyonu* olarak ifade edilirler.

Basit bir anlatımla bir küme üzerinde alınan herhangi iki nokta arasında çizilen doğru parçasının herhangi bir bölümü bu küme dışında kalmıyorsa bu küme *dışbükey* (*konveks*) küme olarak adlandırılır.



Şekil 3.14 Dışbükey küme



Şekil 3.15 Dışbükey olmayan küme

Tanım 3.1.4.2.6. Kompleks düzlemdeki S alt kümesinin *konveks örtüsü*, S kümesini içeren en küçük konveks kümedir diğer bir deyişle S kümesini içeren tüm konveks kümelerin kesişimidir ve $\hat{S}$ ile gösterilir (Hwa-Long Gau, 2006; H.L Gau and Y.H. Lu , 2003).

3.2. Yöntem

Çalışmamızın bu bölümü, bazı Hadamard matrislerin klasik sayısal bölgeleri ve klasik sayısal bölge kavramının bazı genelleştirilmeleri olarak bilinen k -sayısal bölge ve q -sayısal bölgelerini belirlemeye yönelik bilgiler içermektedir.

3.2.1. Hadamard Matrislerin Sayısal Bölgesi

Çalışmanın bu kısmı, herhangi bir karesel matris için tanımlanan sayısal bölge kavramlarının Hadamard matrisler üzerine uygulamaları niteliği taşımakta olup, elde edilen teoremler ve sonuçlar, verilen örnekler ve örneklerin Maple 14 bilgisayar programı ile görselleştirilmeleri şeklinde biçimlenmiştir.

Şimdi, 2×2 tipindeki Hadamard matrislerin sayısal bölgesinin belirlenmesi üzerine değinelim.

Herhangi $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ kompleks matrisinin sayısal bölgesi hakkında

bilgi veren aşağıdaki teorem, 2×2 lik Hadamard matrislerin sayısal bölgesini belirlemede kullanılabilir.

Teorem 3.2.1.1. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ matrisinin sayısal bölgesi odakları λ ve μ

özdeğerleri olan yatay eksen uzunluğu $(\|A\|^2 - 2 \operatorname{Re} \lambda \bar{\mu})^{1/2}$, dikey eksen uzunluğu $(\|A\|^2 - |\lambda|^2 - |\mu|^2)^{1/2}$ olan bir eliptik disk (F. Feyza Gündüz, 2011)

Örnek 3.2.1.1. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ Hadamard matrisinin $W(A)$ sınını bulalım.

Çözüm. $W(A)$ kümesi

$$\begin{aligned} W(A) &= \left\{ z = x * \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x : x \in \mathbb{C}^2, x * x = 1 \right\} \\ &= \left\{ z = \bar{x}_1 x_1 - \bar{x}_1 x_2 - \bar{x}_2 x_1 - \bar{x}_2 x_2 : x_1, x_2 \in \mathbb{C}, |x_1|^2 + |x_2|^2 = 1 \right\} \\ &= \left\{ z = |x_1|^2 - \bar{x}_1 x_2 - \bar{x}_2 x_1 - |x_2|^2 : x_1, x_2 \in \mathbb{C}, |x_1|^2 + |x_2|^2 = 1 \right\} \end{aligned}$$

şeklindedir. Bu kümenin geometriksel olarak ne belirttiğini Teorem 3.2.1.1' i kullanarak bulalım.

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2$$

elde edilir. Bu durumda A matrisinin özdeğerleri, $\lambda = \sqrt{2}$ ve $\mu = -\sqrt{2}$ dir. Böylece,

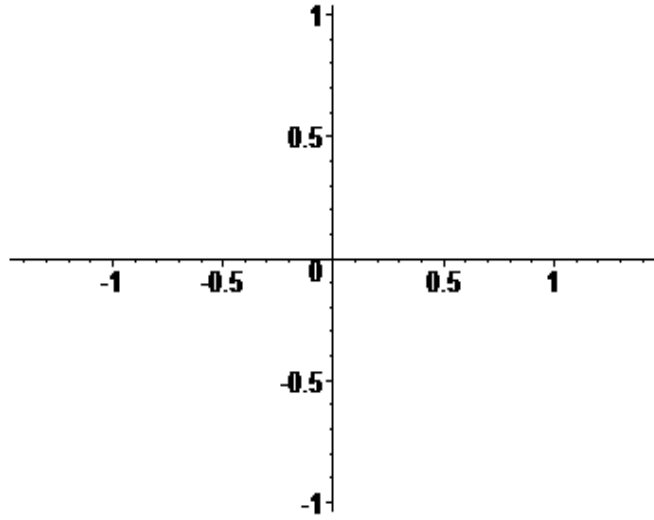
$$\lambda \cdot \bar{\mu} = \sqrt{2} \cdot (-\sqrt{2}) = -2,$$

$$-2 \operatorname{Re} \lambda_{\bar{\mu}} = (-2) \cdot (-2) = 4$$

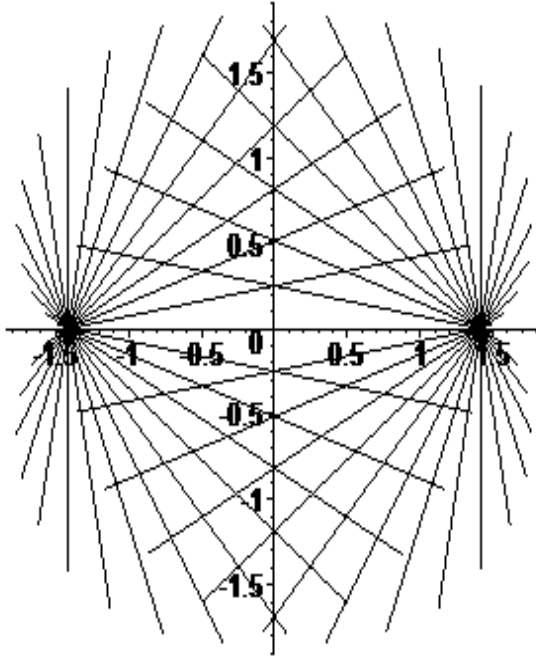
ve

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} = \sqrt{\operatorname{tr}(A^* A)} = \sqrt{\operatorname{tr} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} = 2$$

elde edilir. Bu durumda matrisin sayısal bölgesi; yatay eksen uzunluğu $\sqrt{2^2 + 4} = 2\sqrt{2}$, dikey eksen uzunluğu $\sqrt{2^2 - |\sqrt{2}|^2 - |-\sqrt{2}|^2} = 0$ ve odakları $-\sqrt{2}$ ve $\sqrt{2}$ olan yozlaşmış elipstir. O halde matrisin sayısal bölgesi, $-\sqrt{2}$ ile $\sqrt{2}$ yi birleştiren doğru parçası olup Şekil 3.16. ve Şekil 3.17. de resmedilmiştir.



Şekil 3.16 A matrisinin sayısal görüntüsünün Maple ekran çıktısı



Şekil 3.17. A matrisinin sayısal görüntüsünün farklı bir yöntemle çizilmiş Maple ekran çıktısı

Hadamard matrislerin normal matrisler olduğu bilgisi ve önerme 3.1.3.1.1' in ix. maddesinde verilen özellik ile herhangi bir $n \times n$ tipindeki Hadamard matrisin sayısal bölgesi, Hadamard matrisin özdeğerler kümesinin dış bükey örtüsüdür. Bu durumda A Hadamard matrisinin sayısal bölgesi,

$$W(A) = W(\text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})) = \text{Co}\{a_{11}, \dots, a_{nn}\}$$

dır.

Köşegen matrisin özdeğerlerinin esas köşegen elemanları olması ve böylece $W(A)$ nın A matrisinin özdeğerlerinin kümesinin konveks örtüsü olması ile,

$$W(A) = \text{Co}(\sigma(A))$$

yazılacağı açıktır. $n \times n$ tipindeki A Hermityen matrisinin özdeğerleri reel olduğundan $W(A)$, en küçük ve en büyük özdeğerlerini birleştiren doğru parçasıdır (Roger A. Horn; C. R Johnson, 1991).

Bu durumda $n \times n$ tipindeki A Hermityen Hadamard matrisinin sayısal bölgesi

$$\begin{aligned} W(A) &= W(\text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})) \\ &= Co\{a_{11}, \dots, a_{nn}\} \\ &= Co(\sigma(A)) \\ &= [\min_i a_{ii}, \max_i a_{ii}] \\ &= [-\sqrt{n}, \sqrt{n}] \end{aligned}$$

şeklindedir.

Önerme 3.1.3.1.1' in ix. maddesinden ve herhangi bir $n \times n$ lik Hadamard matrisin özdeğerlerinin $x^2 + y^2 = n$ çemberinin elemanı olmasından dolayı $x^2 + y^2 = n$ çemberi, $W(A)$ nın çevrel çemberidir.

Örnek 3.2.1.2. $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ Hadamard matrisinin $W(B)$ ' sini bulalım.

Çözüm. B matrisinin $\lambda_{1,2} = 2$ ve $\lambda_{3,4} = -2$ olmak üzere 4 tane özdeğeri vardır.

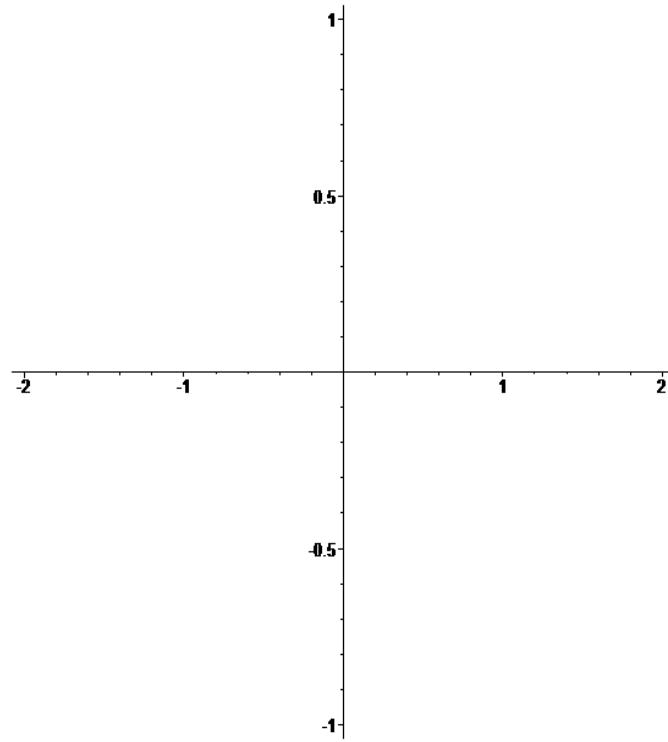
Hadamard matrisleri normal olduğundan, B Hadamard matrisi

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

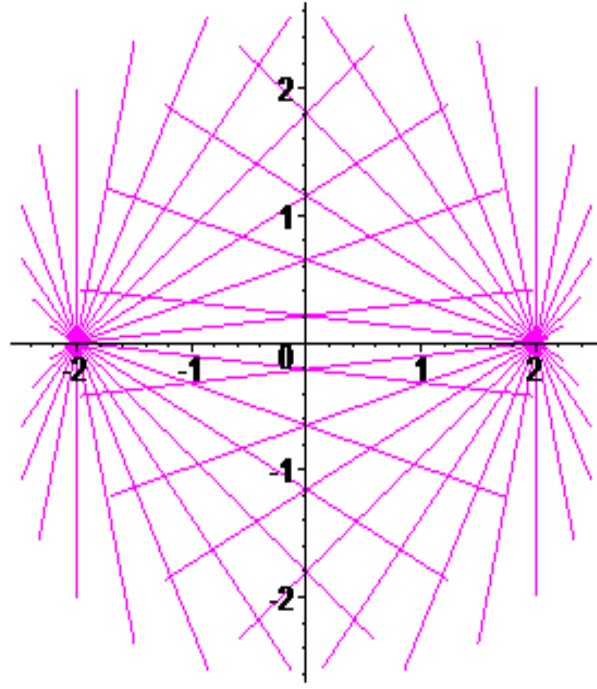
matrisine üniter benzerdir. Buradan,

$$\begin{aligned}
W(B) &= W(\text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})) \\
&= Co\{a_{11}, \dots, a_{nn}\} \\
&= Co(\sigma(B)) \\
&= [\min_i a_{ii}, \max_i a_{ii}] \\
&= [-2, 2]
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde geometrik olarak sayısal bölge, $(-2,0)$ ile $(2,0)$ yi birleştiren doğru parçası olup Şekil 3.18. ve Şekil 3.19 de resmedilmiştir.



Şekil 3.18. B matrisinin sayısal görüntüsünün Maple ekran çıktısı



Şekil 3.19. B matrisinin sayısal görüntüsünün farklı bir yöntemle çizilmiş Maple ekran çıktısı

Örnek 3.2.1.3. $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ Hadamard matrisinin $W(C)$ ' sini bulalım.

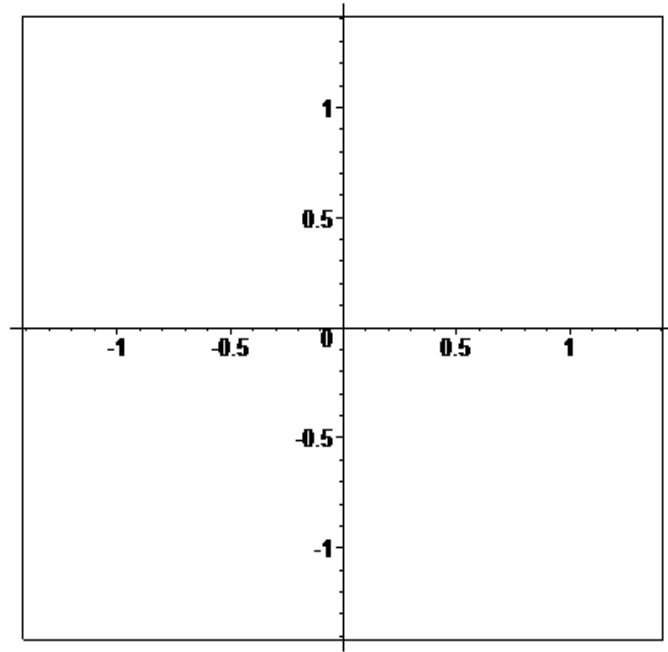
Çözüm. C matrisinin $\lambda_1 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$, $\lambda_2 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $\lambda_3 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$, $\lambda_4 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ olmak üzere 4 tane özdeğeri vardır. Hadamard matrisleri normal olduğundan, C Hadamard matrisi

$$D = \begin{bmatrix} \sqrt{2} - \sqrt{2}i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} + \sqrt{2}i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} - \sqrt{2}i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} + \sqrt{2}i \end{bmatrix}$$

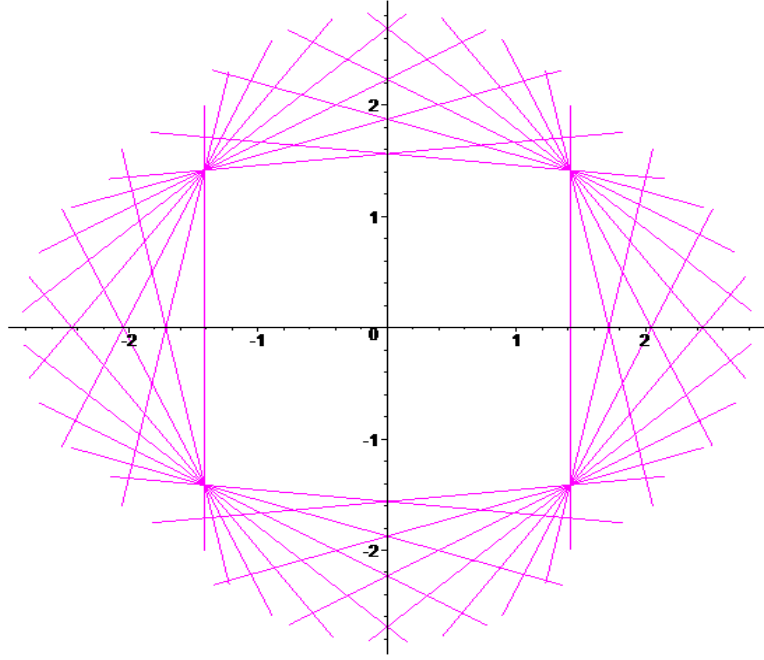
matrisine üniter benzerdir. Buradan,

$$\begin{aligned}
W(C) &= W(\text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})) \\
&= \text{Co}\{a_{11}, \dots, a_{nn}\} \\
&= \text{Co}(\sigma(C)) \\
&= \text{Co}\left(\left\{\sqrt{2} - \sqrt{2}i, \sqrt{2} + \sqrt{2}i, -\sqrt{2} - \sqrt{2}i, -\sqrt{2} + \sqrt{2}i\right\}\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu küme ise köşeleri $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ olan bir kare olup Şekil 3.20. ve Şekil 3.21. de resmedilmiştir.



Şekil 3.20. C matrisinin sayısal görüntüsünün Maple ekran çıktısı



Şekil 3.21. C matrisinin sayısal görüntüsünün farklı bir yöntemle çizilmiş Maple ekran çıktısı

.

Örnek 3.2.1.4.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Hadamard matrisinin $W(E)$ ' sini bulalım.

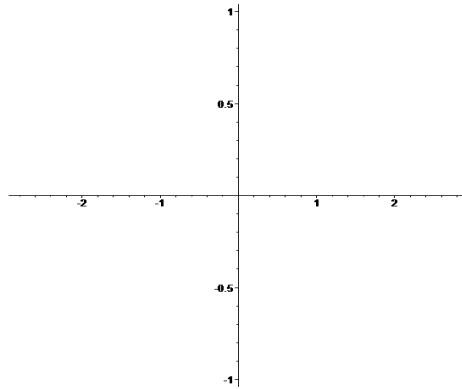
Çözüm. E matrisinin $\lambda_{1,2,3,4} = 2\sqrt{2}$ ve $\lambda_{5,6,7,8} = -2\sqrt{2}$ olmak üzere 8 tane özdeğeri vardır. Hadamard matrisleri normal olduğundan, E Hadamard matrisi

$$F = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

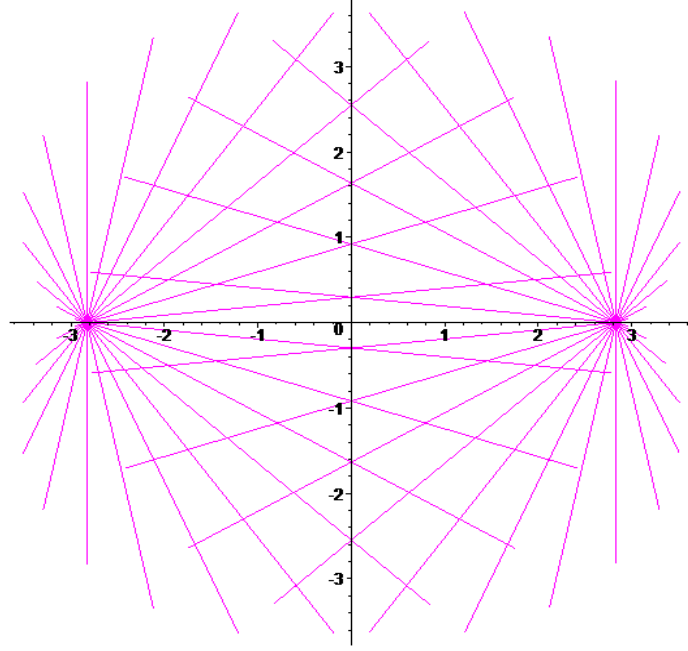
matrisine üniter benzerdir. Buradan,

$$\begin{aligned} W(E) &= W(\text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})) \\ &= Co\{a_{11}, \dots, a_{nn}\} \\ &= Co(\sigma(E)) \\ &= [\min_i a_{ii}, \max_i a_{ii}] \\ &= [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}] \end{aligned}$$

elde edilir. O halde geometrik olarak sayısal bölge, $(-2\sqrt{2}, 0)$ ile $(2\sqrt{2}, 0)$ yi birleştiren doğru parçası olup Şekil 3.22. ve Şekil 3.23. de resmedilmiştir.



Şekil 3.22. E matrisinin sayısal görüntüsünün Maple ekran çıktısı



Şekil 3.23. E matrisinin sayısal görüntüsünün farklı bir yöntemle çizilmiş Maple ekran çıktısı

Örnek 3.2.1.5.

$$G = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Hadamard matrisinin $W(G)$ ' sini bulalım.

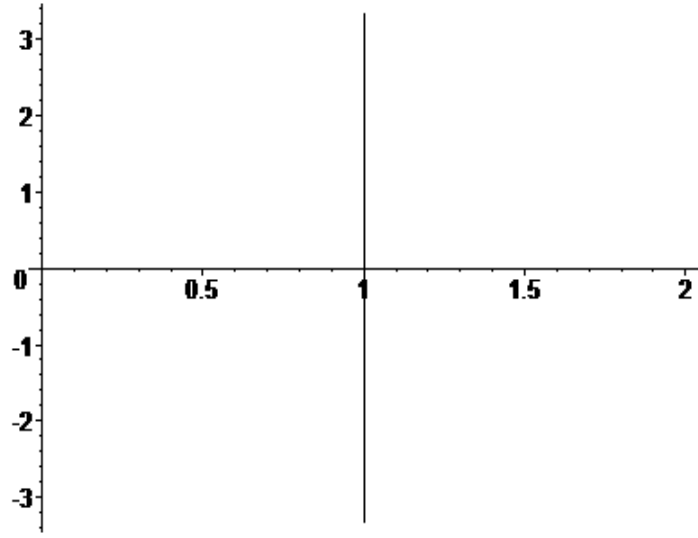
Çözüm. G matrisinin $\lambda_{1,2,3,4,5,6} = 1 - \sqrt{11}i$ ve $\lambda_{7,8,9,10,11,12} = 1 + \sqrt{11}i$ olmak üzere 8 tane özdeğeri vardır. Hadamard matrisleri normal olduğundan, G Hadamard matrisi ,

$$H = \begin{bmatrix} 1-\sqrt{11}i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{11}i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\sqrt{11}i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\sqrt{11}i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\sqrt{11}i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-\sqrt{11}i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\sqrt{11}i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\sqrt{11}i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\sqrt{11}i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\sqrt{11}i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\sqrt{11}i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1+\sqrt{11}i \end{bmatrix}$$

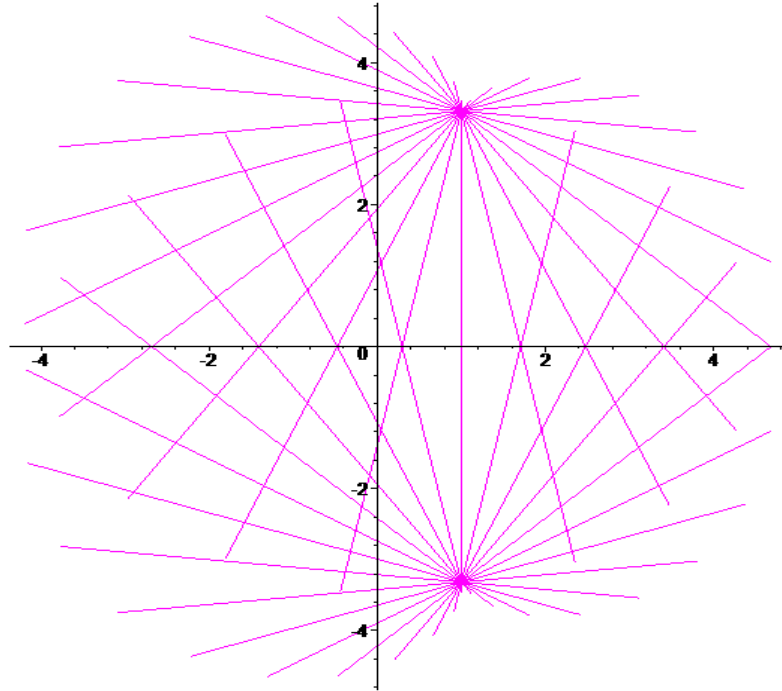
matrisine üniter benzerdir. Buradan,

$$\begin{aligned} W(G) &= W(\text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})) \\ &= Co\{a_{11}, \dots, a_{nn}\} \\ &= Co(\sigma(G)) \\ &= Co\left(\{1 - \sqrt{11}i, 1 + \sqrt{11}i\}\right) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde geometrik olarak sayısal bölge, $(1, -\sqrt{11})$ ile $(1, \sqrt{11})$ yi birleştiren doğru parçası olup Şekil 3.24 ve Şekil 3.25. da resmedilmiştir.



Şekil 3.24. G matrisinin sayısal görüntüsünün Maple ekran çıktısı



Şekil 3.25. G matrisinin sayısal görüntüsünün farklı bir yöntemle çizilmiş Maple ekran çıktısı

Örnek 3.2.1.6. $J = \begin{bmatrix} i & -1 & -i & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -i & -1 & i & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ Hadamard matrisinin $W(J)$ ' sini bulalım.

Çözüm. J matrisinin $\lambda_{1,2} = 2$, $\lambda_3 = -2$ ve $\lambda_4 = 2i$ olmak üzere 4 tane özdeğeri vardır.

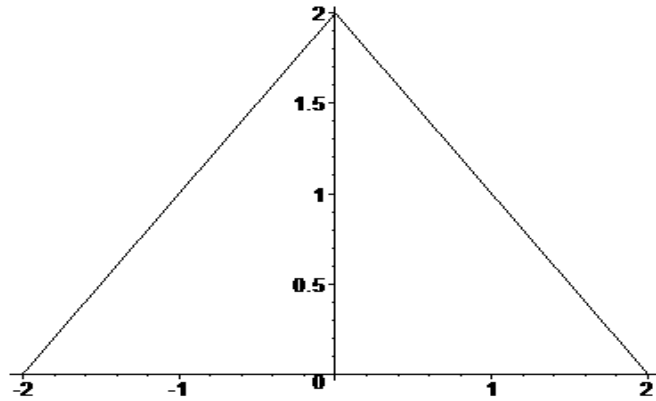
Hadamard matrisleri normal olduğundan, J Hadamard matrisi,

$$K = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2i \end{bmatrix}$$

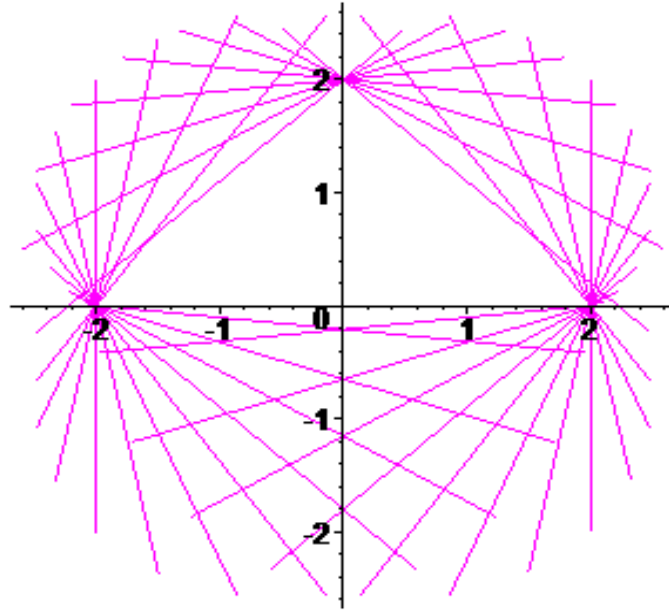
matrisine üniter benzerdir. Buradan,

$$\begin{aligned} W(J) &= W(\text{diag}(a_1, \dots, a_n)) \\ &= Co\{a_1, \dots, a_n\} \\ &= Co(\sigma(J)) \end{aligned}$$

idi. Buradan J matrisinin özdeğerlerinin dış bükey örtüsü, J matrisinin sayısal bölgesini verir. O halde geometrik olarak J matrisinin sayısal bölgesi, $(2,0)$, $(-2,0)$ ve $(0,2)$ noktalarının köşe kabul eden üçgen olup Şekil 3.26. ve Şekil 3.27. da resmedilmiştir



Şekil 3.26. J matrisinin sayısal görüntüsünün Maple ekran çıktısı



Şekil 3.27. J matrisinin sayısal görüntüsünün farklı bir yöntemle çizilmiş Maple ekran çıktısı

3.2.2. Kompleks Hadamard Matrislerin k -Sayısal Bölgesi

Daha önceki bölümlerden, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ özdeğerlere sahip $A \in M_n(\mathbb{C})$ normal matrisinin k -sayısal bölgesinin,

$$W_k(A) = \text{conv} \left\{ \frac{1}{k} (\lambda_{i_1} + \lambda_{i_2} + \dots + \lambda_{i_k}) : 1 \leq i_1 < \dots < i_k < n \right\}$$

olduğu bilinmektedir (Williams ve Fillmore 1963). Hadamard matrislerin normal matris olduğu bilgisi ile, herhangi bir $n \times n$ lik kompleks Hadamard matrisinin k -sayısal bölgesi bu bağıntı ile bulunabilir.

Örnek 3.2.2.1. $J = \begin{bmatrix} i & -1 & -i & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -i & -1 & i & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ Hadamard matrisinin $W_2(J)$ ' sınını bulalım.

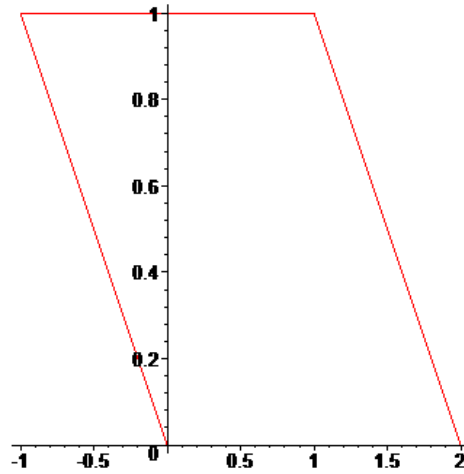
Çözüm. J matrisinin özdeğerlerinin iki tanesi 2 ve diğer özdeğerleri -2 ve $2i$ dir.

$$W_k(J) = \text{conv} \left\{ \frac{1}{k} (\lambda_{i_1} + \lambda_{i_2} + \dots + \lambda_{i_k}) : 1 \leq i_1 < \dots < i_k < n \right\}$$

idi. Bu durumda

$$\begin{aligned} W_2(J) &= \text{conv} \left\{ \frac{1}{2}(-2+2), \frac{1}{2}(2+2i), \frac{1}{2}(-2+2i), \frac{1}{2}(2+2) \right\} \\ &= \text{conv} \{0, 1+i, -1+i, 2\} \end{aligned}$$

kümesidir. Buradan $W_2(J)$; köşeleri $A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(-1,1)$, $D(2,0)$ olan bir dörtgen olup, Şekil 3.28. de resmedilmiştir.



Şekil 3.28. J matrisi için $W_2(J)$ 'nin Maple ekran çıktısı

Örnek 3.2.2.2. $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ Hadamard matrisinin $W_3(C)$ 'sini bulalım.

Çözüm: C matrisinin özdeğerleri $\lambda_1 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$, $\lambda_2 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $\lambda_3 = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$, $\lambda_4 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ dir.

$$W_k(H) = \text{conv} \left\{ \frac{1}{k} (\lambda_{i_1} + \lambda_{i_2} + \dots + \lambda_{i_k}) : 1 \leq i_1 < \dots < i_k < n \right\}$$

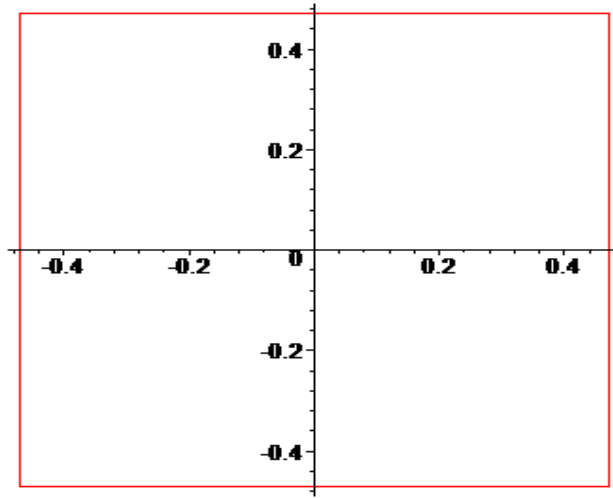
olduğundan

$$W_3(H) = \text{conv} \left\{ \frac{1}{3}(\sqrt{2} - \sqrt{2}i), \frac{1}{3}(-\sqrt{2} + \sqrt{2}i), \frac{1}{3}(-\sqrt{2} - \sqrt{2}i), \frac{1}{3}(\sqrt{2} + \sqrt{2}i) \right\}$$

kümesidir.

Yani köşeleri $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{3}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ olan

karedir.



Şekil 3.29. C matrisi için $W_3(C)$ 'nin Maple ekran çıktısı

3.2.3. Kompleks Hadamard Matrislerin q -Sayısal Bölgesi

q -Sayısal Bölgenin Temel Özelliklerindeki 7. Madde de normal matrislerin $W_q(A)$ sunu vermiştik. Hadamard matrislerde normal matris olduğu için bu özellik hadamard matrislerinde q -sayısal bölgesini vermiş oluyor. Bu özelliği tekrardan yazarak hatırlatalım.

Teorem 3.2.3.1. $q \in (0,1)$ ve $n \geq 3$ olsun. $A \in M_n$ normal matris öyleki,

$W(A) = \text{conv} \sigma(A)$ 'nin $k \geq 3$ ve $\mu_1, \dots, \mu_k$ farklı köşeleri olduğunu varsayalım.

$B = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$ matrisinin 3×3 lük $B_1, \dots, B_{k-2}$ temel alt matrisleri vardır öyleki

$$W_q(A) = \bigcup_{1 \leq j \leq k-2} W_q(B_j) \text{ dir.}$$

Örnek 3.2.3.1. $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin $W_{1/4}(B)$ kümesini elde edelim.

Çözüm. B matrisi reel simetrik matristir ve özdeğerleri $\lambda_{1,2} = 2$, $\lambda_{3,4} = -2$ dir. Bölüm 3.3.4 de bahsettiğimiz 1961 de Bush ve Olkin' nin bulduğu

$$\frac{(1+q)\lambda_n - (1-q)\lambda_1}{2} \leq y^t Bx \leq \frac{(1+q)\lambda_1 - (1-q)\lambda_n}{2}$$

kuralından

$$W_{1/4}(B) = \left\{ y^t Bx : x, y \in \square^n, x^* x = y^* y = 1, y^t x = \frac{1}{4} \right\}$$

kümesi

$$\begin{aligned} \frac{\left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot (-2) - \left(1 - \frac{1}{4}\right) 2}{2} &\leq y^t Bx \leq \frac{\left(1 + \frac{1}{4}\right) 2 - \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot (-2)}{2} \\ &= -2 \leq y^t Bx \leq 2 \end{aligned}$$

dir. Bu durumda $W_{1/4}(B) \subseteq [-2, 2]$ dir. Bölüm 3.3.4 ten eğer $|q| < 1$ ise q -sayısal

bölgenin bir doğru parçası veya bir konveks çokgen hiç bir zaman olamayacağını ama bir nokta olabileceğini biliyoruz. O halde $W_{1/4}(B); [-2, 2]$ aralığındaki bir noktadır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Bu çalışma, Hadamard matrislerin sayısal bölgelerinin belirlenmesine yönelik bir çalışmadır. Bu sebepten, sayısal bölge ve Hadamard matrisleri üzerine temel bilgilerin verildiği kısım ve gerçel ve kompleks Hadamard matrislerin sayısal bölgelerinin belirlenmesi üzerine yeni bilgilerin verildiği kısım olmak üzere çalışmamızı iki bölüme ayırabiliriz.

Çalışmamızın ilk bölümünde, karesel matrislerin özdeğerleri için temel bilgiler verilmekte, bir karesel matrisin özdeğerler kümesi (spektrumu) ile bir karesel matrisin özdeğerlerini kapsayan bir bölge olarak tanımlanabilen klasik sayısal bölge arasındaki bazı bağıntılar sunulmakta, karesel matrislerin klasik sayısal bölgesi ve bazı genelleştirilmeleri (k -sayısal bölge, c - sayısal bölge, C -sayısal bölge ve q - sayısal bölge) cebirsel ve geometrik olarak incelenmekte, ulaşılan sonuçlar somut örneklerle doğrulanmakta ve verilen somut örnekler için elde edilen sayısal bölgeler Maple 14 bilgisayar programı yardımı ile görselleştirilmektedir. Ayrıca, gerçel ve kompleks Hadamard matris kavramları tanımlanmakta, bazı temel özellikleri verilmekte ve bu özellikler örneklerle pekiştirilmektedir. Böylece bu bölüm, “sayısal bölge” ve “Hadamard matris” kavramlarını tanımlamaya ve anlamaya yönelik bilgiler içermektedir.

Çalışmamızın ikinci bölümü, bazı Hadamard matrislerin klasik sayısal bölgeleri ve klasik sayısal bölge kavramının bazı genelleştirilmeleri olarak bilinen k -sayısal bölge ve q -sayısal bölgelerini belirlemeye yönelik bilgiler içermektedir. Bu durumda çalışmanın bu kısmı, herhangi bir karesel matris için tanımlanan sayısal bölge kavramlarının Hadamard matrisler üzerine uygulamaları niteliği taşımakta olup, elde edilen teoremler ve sonuçlar, verilen örnekler ve örneklerin Maple 14 bilgisayar programı ile görselleştirilmeleri araştırma bulgularımızdır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Çalışmada, Hadamard matrislerin sayısal bölgelerinin belirlenmesi hedef olarak belirlenmiş, bu hedef doğrultusunda bazı gerçel ve kompleks Hadamard matrislerin sayısal bölgelerini belirleyen sonuçlar verilmiş, bu sonuçlar örnekler üzerinde doğrulanmış ve görselleştirilmiştir.

Hadamard matrislerin sayısal bölgesinin ve genelleştirilmiş sayısal bölgelerinin belirlenmesi üzerine pratiklikler yada kolaylaştırıcı teoremler üzerine çalışma yapılması önerilebilir.

KAYNAKLAR

- Babai, L., 2002. **Hadamard Matrices**
- Cameron, P. J., 2006. Hadamard matrices, **The Encyclopaedia Of Design Theory**
- Donduran M., 2008. **Matrisler**, Ekonomi Bölümü, Y. T. Ü İstanbul.
- Fang K. T. ve Ge G., 2003. **A Sensitive Algorithm for Detecting The Inequivalence Of Hadamard Matrices**, **Mathematics Of Computation** 2, cilt 73, Sayı 246, sayfa 843-851, s 0025-5718(03)01539-4, Makale.
- Gökpinar, F., 2007. **Kombinatorik Tasarımlardan Elde Edilen Kodlar Üzerine Bir Çalışma**, Doktora tezi , Gazi üniversitesi
- Gözükızıl, Ö. F, 2008. Bazı hadamard matris türetme teknikleri, **SAÜ Fen Edebiyat Dergisi**, sayfa: 31-41.
- Gündüz, F. Feyza, 2011. **Bazı Özel Tanımlı Matrislerin Değerler Cismi**, master tezi, M. K. Ü Antakya
- H.L. Gau, Haziran 2006. Elliptic numerical ranges of 4x4 matrices, **Taiwanese Jornal Of Mathematics**, cilt: 10, No: 1, sn: 117-128
- H.L. Gau and Y.H. Lu , 2003. **Elliptic Numerical Ranges of 4x4 Matrices** , Master Tezi, National Central University
- Horn, R. A. and Johnson, C. R., 1991. **Topics in matrix analysis**, Cambridge University Press, NewYork.
- Kişisel, Bozkurt B., Erbay D., Yılmaz G., **Hadamard Matris**.
www.yarbis.yildiz.edu.tr...vsiap_dcbce0945811dcc0bd0948e392ee
- Kişisel, Küçükçiftçi S., 2004. Hadamard matrisleri, **Matematik Dünyası Dergisi**, 13(4): 51-54.
- Kişisel, Stensby J., **Hermitian Matrices**, www.ece.uah.edu/courses/ee448/appen4_2.pdf
- Kişisel, Şehirlioğlu A. K., Çakır S., 2006. Asimetrik faktoriyel deneylerin ortogonal ana etki planlarının elde edilmesi üzerine bir not, **E. Ü. İ. İ. B. F. Dergisi**, 21(2): 151-173.
- Lau, H. S., Haziran 1999. **On The q Numerical Range**, Master Tezi, Hong Kong Üniversitesi.
- Leon, S. J., 1990. **Linear Algebra With Applications**, Macmillan Publishing Company, New York.
- Öztürk F. web sayfası 4. ders **Özdeğer-Özvektör Hesaplamaları** (80.251.40.59/science.ankara.edu.tr/ozturk/Dersler/.../Ders4/Matris2.).
- Psarrakos P. J. ve Tsatsomeros, M. J., 2012. **Numerical range: (in) a matrix nutshell**
- Seberry J., Wysocki B. J., Wysocki T. A., 2005. **On Some Applications Of Hadamard Matrices**, Research Online.
- Tadejand W. ve Zyczkowski K., 2006. **A Concise Guide To Complex Hadamard Matrices**
- Wallis, J., 1973. Complex hadamard matrices, **Linear and Multilinear Algebra**, 1: 257-272, Gordon and Breach Science Publishers Ltd., basım: Great Britain, Queen's University, Kingston, Ontario, Canada
- www.wikipedia.com (Vikipedi, özgür ansiklopedi)
- www.sci.ege.edu.tr/~istatistik/personal/mert/optimizasyon/hafta1.ppt.
- Yarlagadda, R. ve Hershey, J., 1982. Linear algebra ve uygulamaları, **A Note On The Eigenvectors of Hadamard Matrices of Order 2^n** , Elsevier Science Publishing Co. Inc.

Yıldızdu, **Özdeğerler ve Özvektörler**

Yurtçu, H. H. , 2006. **Matris Özdeğer ve Özvektörlerinin Bazı Uygulamaları**, master tezi, Y. T. Ü İstanbul.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim boyunca değerli görüş ve fikirleriyle bana ışık tutan, yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyerek tezimde oldukça emeği olan sayın danışmanım Doç. Dr. Ahmet İPEK' e sonsuz teşekkürler ederim.

Desteklerini esirgemeyen sayın bölüm başkanım Prof. Dr. Bünyamin YILDIZ' a, bu süreçteki olumlu yaklaşımlarından ve teşviklerinden dolayı Yrd. Doç. Dr. Turgut YELOĞLU' na, Yrd. Doç. Dr. Hakan YETİŞKİN' e, Yrd. Doç. Dr. Oğuz KILIÇOĞLU' na ve bölümümüzün diğer tüm öğretim elemanlarına teşekkür ederim.

Son olarak her zaman yanımda olan ve beni destekleyen aileme teşekkürlerimi sunarım.

ÖZGEÇMİŞ

1982 yılında İskenderun-Hatay'da doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimimi İskenderun'da tamamladım. 2000-2004 yılları arasında Hacettepe Üniversitesi Matematik Bölümünde lisans eğitimimi, 2005-2006 yılları arasında Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Ortaöğretim Fen ve Matematik Öğretmenliği Anabilim Dalında Tezsiz Yüksek Lisans eğitimimi tamamladım. 2011 yılında M.K.Ü Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans programında eğitim görmeye başladım. 2004-2007 yılları arasında M.E.B bünyesindeki bazı dersanelerde matematik öğretmenliği yaptıktan sonra 2008 de MEB'e matematik öğretmeni olarak atanarak Silopi lisesinde çalışmaya başladım. Halen MEB İskenderun İbn-i Sina Anadolu Lisesi'nde matematik öğretmeni olarak görev yapmaktayım.