



**T.C.
MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**DÜZLEMSEL ÇUBUKLARIN
TAŞIMA ve RİJİTLİK MATRİSİ METODU ile
STATİK ve DİNAMİK ANALİZİ**

Nurullah KARACA

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**HATAY
ARALIK-2014**



T.C.
MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**DÜZLEMSEL ÇUBUKLARIN
TAŞIMA ve RİJİTLİK MATRİSİ METODU ile
STATİK ve DİNAMİK ANALİZİ**

Nurullah KARACA

İNŞAAT MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**HATAY
ARALIK-2014**

31.12.2014

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını ve tez üzerinde Yükseköğretim Kurulu tarafından hiçbir değişiklik yapılamayacağı için tezin bilgisayar ekranında görüntülendiğinde asıl nüsha ile aynı olması sorumluluğunun tarafıma ait olduğunu beyan ederim.

Nurullah KARACA

ÖZET

DÜZLEMSEL ÇUBUKLARIN TAŞIMA ve RİJİTLİK MATRİSİ METODU ile STATİK ve DİNAMİK ANALİZİ

Bu çalışmada, daire eksenli çubukların statik ve dinamik analizleri teorik olarak incelenmiştir. Tabii burulmuş ve eğilmiş uzaysal çubukları idare eden denklemler Timoshenko çubuk teorisi kullanarak elde edilmiş ve daire eksenli çubuklar için tekrar yazılmıştır. Formülasyonda, eksenel ve kayma deformasyonu etkileri göz önüne alınmıştır. Çubuk malzemesi homojen, lineer elastik ve izotropik kabul edilmiştir. Skaler formdaki birinci mertebe adi diferansiyel denklemler, taşıma ve rijitlik matrisi yöntemi yardımı ile çözülmüştür. Düzleminde ve düzlemine dik yüklü daire eksenli çubukların statik ve dinamik analizleri ayrı ayrı olarak incelenmiş ve genel amaçlı MATHEMATICA dilinde bilgisayar programı hazırlanmıştır. Doğru eksenli çubuğa ait tutarlı kütle matrisi kullanılarak daire eksenli çubukların kütle matrisi oluşturulmuştur. Özdeğer problemi çözülerek serbest titreşim frekansları elde edilmiştir. Daire eksenli çubukların statik ve serbest titreşim analizleri için literatürdeki örnekler ele alınmıştır. Elde edilen sonuçların, ANSYS ve literatürdeki mevcut sonuçlar ile uyum içinde olduğu görülmüştür.

2014, 67 sayfa

Anahtar Kelimler: Daire Eksenli Çubuklar, Taşıma Matrisi, Statik Analiz, Dinamik Analiz

ABSTRACT

STATIC and DYNAMIC ANALYSIS of PLANAR RODS by THE TRANSFER and STIFFNESS MATRIX METHODS

In this study, static and dynamic analysis of circular rods is investigated theoretically. The governing equations, for naturally twisted and curved spatial rods, obtained using Timoshenko beam theory and rewritten for circular rods. Effects of the axial and shear deformations are considered in the formulations. The material of the rod is assumed to be homogeneous, linear elastic and isotropic. Ordinary differential equations in scalar form are solved by using transfer matrix and stiffness matrix method. Static and dynamic analysis of circular rods which are loaded in-plane and out-of-plane is separately investigated and general purpose computer programs are prepared by using the computer algebra system MATHEMATICA. The mass matrix of circular rods is created by using straight rod of consistent mass matrix. The free vibration frequencies are obtained by solving eigenvalue problem. Examples in the literature are handled For static and free vibration analysis of circular rods. The results obtained are found to be in good agreement with those available results in the literature and ANSYS.

2014, 67 pages

Key Words: Circular Rods, Transfer Matrix, Static Analysis, Dynamic Analysis

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez konusunun belirlenmesinde, araştırılması ve yazımı sırasında sahip olduğu bilgi birikimi ve tecrübesi ile çalışmayı yönlendiren ve her türlü yardımı esirgemeyen saygıdeğer danışman hocam Doç. Dr. Faruk Fırat ÇALIM'a sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım sırasında desteklerini esirgemeyen Yrd. Doç. Dr. Hakan Tacettin TÜRKER'e ve sabırlarını, maddi manevi desteklerini hiçbir zaman esirgememiş olan mesai arkadaşlarım Arş. Gör. Müzeyyen BALÇIKANLI, Arş. Gör. Yakup TÜREDİ, Arş. Gör. M. Musab ERDEM, Arş. Gör. Olcay GENÇ, Arş. Gör. Bestami TAŞAR'e, isimlerini burada zikredemediğim ama yardımlarını esirgememiş herkese içten teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca beni bugüne kadar yetiştirmiş ve desteklerini bir an olsun eksik etmeyen anneme, babama ve kardeşlerime en içten saygı ve şükranlarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	I
ABSTRACT	II
TEŞEKKÜR.....	III
İÇİNDEKİLER	IV
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	VI
ÇİZELGELER DİZİNİ	VII
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	VIII
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....	2
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	5
3.1. Uzaysal Çubuklar.....	6
3.1.1. Çubuğun Geometrisi	6
3.1.2. Çubuk Ekseni	6
3.1.3. Çubuk Dik Kesiti.....	7
3.1.4. Yapılan Kabuller	8
3.1.5. Denge Denklemleri	8
3.1.6. Uygunluk Denklemleri.....	10
3.1.7. Kesit Tesirleri ile Şekil Değiştirme Arasındaki İlişki	12
3.1.8. Vektörel Denklemlerin t , n , b Takımına Dönüştürülmesi	13
3.2. Düzlemsel Çubuklar	17
3.2.1. Düzleminde Yüklü Eğri Eksenli Çubuklar.....	20
3.2.2. Düzlemine Dik Yüklü Eğri Eksenli Çubuklar.....	20
3.3. Daire Eksenli Çubuklar.....	21
3.3.1. Düzleminde Yüklü Daire Eksenli Çubuklar.....	21
3.3.2. Düzlemine Dik Yüklü Daire Eksenli Çubuklar.....	21
3.4. Taşıma Matrisi Yöntemi	22
3.4.1. Başlangıç Değerler Metodu.....	22
3.4.2. Durum Vektörü	23
3.4.3. Diferansiyel Denklemlerin Çözümü.....	24
3.4.4. Düzleminde Yüklü Daire Eksenli Çubuklarda Taşıma Matrisi	25
3.4.5. Düzleminde Yüklü Halde Tekil Yük ve Moment Durumu.....	29
3.4.6. Düzleminde Yüklü Halde Yayılı Yük Durumu.....	30
3.4.7. Düzlemine Dik Yüklü Daire Eksenli Çubuklarda Taşıma Matrisi	31
3.4.8. Düzlemine Dik Yüklü Halde Tekil Yük ve Moment Durumu.....	35
3.4.9. Düzlemine Dik Yüklü Halde Yayılı Yük Durumu.....	36
3.5. Taşıma Matrisi Metoduna Dayalı Rijitlik Matrisi Yöntemi	37
3.5.1. İşaret Kabulü	37
3.5.2. Eleman Rijitlik Matrisinin Oluşturulması	37
3.5.3. Düzleminde Yüklü Daire Eksenli Çubuklar.....	38
3.5.4. Düzlemine Dik Yüklü Daire Eksenli Çubuklar.....	39
3.5.5. Eleman Yük Vektörünün Bulunması	40
3.5.6. Sistem Rijitlik Matrisi	42
3.6. Daire Eksenli Çubukların Serbest Titreşim Analizi	42
3.6.1. Kütle Matrisi	43
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA	46
4.1. Statik Analiz	46

4.1.1. Örnek 1	46
4.1.2. Örnek 2	48
4.1.3. Örnek 3	50
4.1.4. Örnek 4	51
4.2. Serbest Titreşim Analizi	53
4.2.1. Örnek 5	53
4.2.2. Örnek 6	54
4.2.3. Örnek 7	55
4.2.4. Örnek 8	57
5. SONUÇ ve ÖNERİLER	59
Ek 1	60
Ek 2	61
Ek 3	62
Ek 4	63
KAYNAKLAR	64
ÖZGEÇMİŞ	67

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1.	Çubuk eksenli.....	6
Şekil 3.2.	Çubuk dik kesiti	7
Şekil 3.3.	Çubuk elemanın denge durumu	9
Şekil 3.4.	Çubuk ekseninde yer değiştirme	10
Şekil 3.5.	Çubuktaki yer değiştirme ve dönmeler	11
Şekil 3.6.	Daire eksenli çubuk elemanı	14
Şekil 3.7.	Düzleminde yüklü hal için arada tekil yük ve moment olması durumu.	29
Şekil 3.8.	Düzleminde yüklü hal için arada yayılı yük ve moment olması durumu.	30
Şekil 3.9.	Düzlemine dik yüklü hal için arada tekil yük ve moment olması durumu	35
Şekil 3.10.	Düzlemine dik yüklü hal için arada yayılı yük ve moment olması durumu.	36
Şekil 3.11.	Çubuk elemanlar için işaret kabulü	37
Şekil 3.12. a.	Eleman koordinatında eleman uç deplasmanları birim yükleme	38
Şekil 3.12. b.	Eleman koordinatında eleman uç deplasmanları birim yükleme	38
Şekil 3.12. c.	Eleman koordinatında eleman uç deplasmanları birim yükleme	39
Şekil 3.13.	Çubuk elemanın yük vektörünün bulunması	40
Şekil 3.14.	Daire eksenli çubuk geometrisi.....	44
Şekil 4.1.	İki ucu ankastre daire eksenli giriş ve kodlama durumu.	47
Şekil 4.2.	İki yarım daireden oluşan daire eksenli giriş ve kodlama durumu	49
Şekil 4.3.	Yarım daireden oluşan daire eksenli giriş ve kodlama durumu.....	50
Şekil 4.4.	İki yarım daireden oluşan daire eksenli giriş ve kodlama durumu.	52
Şekil 4.5.	İki ucu ankastre daire eksenli çubuk.....	53

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 1.	Örnek 1 için sayısal sonuçlar.....	47
Çizelge 2.	Örnek 2 için sayısal sonuçlar.....	49
Çizelge 3.	Örnek 3 için sayısal sonuçlar.....	50
Çizelge 4.	Örnek 4 için sayısal sonuçlar.....	52
Çizelge 5.	İki ucu ankastre daire eksenli çubuğun boyutsuz serbest titreşim frekansları.....	53
Çizelge 6.	İki ucu sabit mesnetli daire eksenli çubuğun boyutsuz serbest titreşim frekansları.....	55
Çizelge 7.	Boyutsuz serbest titreşim frekansları (Düzlemi içinde)	56
Çizelge 8.	Boyutsuz serbest titreşim frekansları (Düzlemine dik)	57
Çizelge 9.	Serbest titreşim frekansları (rad/s).....	58

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

r	: Durum vektörü
s	: Eğrisel koordinatlarda eksenel uzunluk
t	: Teğet birim vektör
n	: Normal birim vektör
b	: Binormal birim vektör
χ	: Eğrilik
τ	: Tabii burulma
γ	: Rölatif birim uzama
ω	: Rölatif birim dönme
U	: Yer değiştirme vektörü
Ω	: Dönme vektörü
T	: İç kuvvet vektörü
M	: Moment vektörü
[C]	: Uzama ve kayma rijitliği
[D]	: Burulma ve eğilme rijitliği
A	: Kesit alanı
I_n, I_b	: Atalet momenti
E	: Elastisite modülü
G	: Kayma modülü
v	: Poisson oranı
m	: Dış kuvvetlerin eksene aktarılmasıyla oluşan kuvvet çifti
p	: Yayılı dış kuvvetler
Δs	: Sonsuz küçük çubuk elemanı
ρ	: Eğrilik yarıçapı
L	: Çubuk elemanın boyu
J	: Burulma atalet momenti
ϕ	: Çubuk elemanın başlangıç ve bitiş noktası arasındaki açı
$\{S(\phi)\}$	: ϕ' ye bağlı durum vektörü
[F]	: Taşıma matrisi
D	: Geçiş matrisi
$K(\alpha)$	: Süreksizlik kolon matrisi
[k]	: Eleman rijitlik matrisi
$\{f\}$	: Eleman yük vektörü
[m]	: Eleman kütle matrisi
[K]	: Sistem rijitlik matrisi
[T]	: Dönüşüm matrisi
[M]	: Sistem kütle matrisi
λ	: Serbest titreşim frekansının karesi
ρ	: Kütleli yoğunluk
ω	: Serbest titreşim frekansı
[C]	: Sistem sönüm matrisi
α_n, α_b	: Kayma düzeltme faktörü
$\{X\}$	: Deplasmanları içeren kolon matrisi

1. GİRİŞ

Şekil değiştiren cisimlerin ve mühendislik yapılarının önemli bir bölümünü çubuklar oluşturmaktadır. Çubuk teorisi ve eğri eksenli çubukların davranışları, mühendislik problemleri içinde önemli bir yer tutmaktadır. Çubuklar, günümüzde, birçok mühendislik alanında ve inşaat, makina, otomotiv gibi önemli endüstri kollarında yapısal eleman olarak kullanılmaktadır.

Çubuklar uygulanan yapı tipine göre farklı geometrik şekillere sahip olabilirler. Pratikte en çok karşılaşılan daire ve doğru eksenli çubuklardır. Konut yapılarındaki döşemeler ve yatay kuvvete maruz düşey kazıklar doğru eksenli çubuklara örnek gösterilebilir. Ayrıca su tankı, siloların betonarme temelleri, kemer ve köprüler ise eğri-daire eksenli çubuklara örnek teşkil etmektedir.

Araştırmacılar, daire eksenli çubukların statik ve dinamik analizleri için farklı yöntemler kullanarak incelemişlerdir. Bu çalışmada, düzlemsel çubukların statik ve dinamik analizi taşıma ve rijitlik matrisi metodu kullanarak incelenecektir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

İnan (1964), elastomekanikte Başlangıç Değerleri Metodu ve Taşıma Matrisini incelemiş, doğru, düzlemsel ve daire eksenli çubukların diferansiyel geçiş matrisi kullanarak taşıma matrisini elde etmiştir.

İnan (1966), elastik çubukların genel teorisini incelemiş, buradan doğru, düzlemsel ve daire eksenli çubukların taşıma matrisini elde ederek Taşıma Matrisi yöntemini uygulamıştır.

Haktanır ve Kırıl (1989), helisel çubukların statik davranışının rijitlik matrisi metodu ile incelemişlerdir. Taşıma matrisi yöntemi ile eleman rijitlik matrisini sayısal olarak elde etmişlerdir. Sonrasında ise rijitlik matrisi metoduna uygun olarak Fortran-77 dilinde bir bilgisayar programı geliştirmişlerdir.

Haktanır (1990), doktora çalışmasında silindirik ince helisel çubukların en kapsamlı denge, uygunluk ve bünye denklemleri, lineer ve açısal momentum ilkeleri kullanarak sistematik bir şekilde elde etmiştir. Bu hareket denklemlerinde eksenel ön yük, dönme ataleti, eksenel ve kayma deformasyonu etkileri, kesit geometrik ve kayma merkezlerinin çakışmaması halleri bir bütün olarak göz önüne almıştır. Skaler halde 12 adet yere göre birinci, zamana göre ikinci dereceden bağımlı bu denklemler, helis eksenli çubuğun yapı ve makina elemanı olarak işlevi ayrılmadan genel olarak mütalaa etmiştir; helisel çubuğun statik, serbest titreşim ve zorlanmış titreşim problemleri çözmüştür. Ayrıca, eksenel yük altındaki helisel yayların burkulma problemine değinmiştir. Elde edilen denklemlerin çözümünde, temel olarak Taşıma Matrisi Metodunu benimsemiştir.

Laman (1990), Zeiss-Dywidag olarak bilinen silindirik tonoz çatı sistemi, statik yükler altında davranışını Taşıma Matrisi yöntemi ile incelemiş ve farklı yükleme durumları için Fortran-77 dilinde bilgisayar programları hazırlamıştır.

Haktanır ve Kırıl (1990), helisel yaylarda rijitlik matrisine dayalı serbest titreşim frekansını elde etmişlerdir. Çalışmalarında eleman rijitlik matrisini, silindirik helisel çubuklara ait statik taşıma matrisinin kapalı ifadesinden sayısal olarak elde etmişlerdir. Özdeğer problemi çözümünde Jacobi ve Inverse Iteration sayısal yöntemlerini kullanmışlardır.

Bayhan (1993), daire eksenli düzlem çerçevelerin statik yükler altındaki davranışları Taşıma ve Rijitlik Matrisi yöntemi ile çözmüştür. Daire eksenli elemanların eleman rijitlik matrisi ve eleman yük vektörleri Taşıma Matrisi yöntemiyle elde etmiştir.

Haktanır ve Kıral (1993), helisel çubukların statik analizini taşıma ve rijitlik matrisine dayalı olarak yapmışlardır. Timoshenko kiriş teorisini kullanmışlar ve kayma deformasyon etkisini göz önünde bulundurmuşlardır.

Fang (1995), taşıma matrisi yöntemi ile belirsiz parametreler ile yapıların dinamik analizini incelemişlerdir.

Kang ve ark. (1995), dairesel çubukların düzleminde ve düzlemine dik yüklü durumlar için diferansiyel kareleştirme metodunu kullanarak hesaplamışlardır.

Çalım (1996), eğri eksenli çubuk sistemler ve silindirik tonoz yapıların statik yükler altındaki davranışlarını idare eden denklemleri kanonik halde elde etmiştir. Bu denklemleri Tamamlayıcı Fonksiyonlar Metoduna dayalı rijitlik matrisi yöntemi ile çözmüştür. Bu metotları kullanarak Fortran-77 dilinde bilgisayar programları hazırlamıştır.

Tseng ve ark. (1997), çeşitli eğrilikli kemerlerin düzlemi içinde dinamik rijitlik matrislerini incelemişlerdir. Hesaplarında eksenel ve kayma deformasyon etkilerini de dikkate almışlardır.

Yıldırım ve ark. (1997), doğru ve daire eksenli elemanlardan oluşan bileşik düzlem çerçevelerin statik analizini rijitlik matrisi metodu ile incelemişlerdir. Dairesel elemanları düzleminde ve düzlemine dik yüklenmesi halleri için ayrı ayrı olmak üzere eleman rijitlik ve ankastrelik uç kuvvetlerini taşıma matrisi metodu ile kesin olarak elde etmişlerdir.

Şahin (1998), birbirine eksenel normal kuvvet alan çubuklar ile bağlı düzlemsel iki çubuğu Taşıma Matrisi yöntemiyle incelemiştir. Taşıma matrisini sayısal hesabı için bir algoritma kullanmıştır.

Howson ve Jemah (1999), düzlemine dik eğri Timoshenko kirişi frekansları için kesin bir metod bulmuştur. Çözümlerinde eksenel ve kayma etkilerini dikkate almışlardır.

Liu ve Wu (2001), genelleştirilmiş kareleştirme kuralını kullanarak düzleminde yüklü dairesel kemerler için titreşim analizi yapmışlardır.

Tüfekçi ve Doğruer (2006), sabit kesitli dairesel kemerlerin düzlem dışı serbest titreşimini incelemişlerdir. Başlangıç değerler metodunu kullanarak kesin çözüm elde etmişlerdir. Frekans değerlerini farklı merkez açısına ve farklı narinlik oranına sahip kemerlerin ilk beş serbest titreşim frekansını elde etmişlerdir.

Doğruer (2006), eğri eksenli düzlemsel çubukların düzlem dışı statik ve dinamik problemlerini, başlangıç değerleri yöntemi ile kayma deformasyonu ve hem eğilme hem de burulma dönme eylemsizliği etkilerini de dikkate alarak, analitik olarak çözmüştür. Çözüm yaparken ise; Mathcad, Mathematica ve Matlab programları yardımıyla yapmıştır.

Aktan (2008), daire eksenli çubukların düzlem içi serbest titreşim frekanslarının elde edilmesini incelemiştir. Timoshenko kiriş teorisinden yararlanmış ve dönme ataleti etkisini göz önüne almıştır.

Arici ve Granata (2011), taşıma matrisi metodunu kullanarak Winkler tipi elastik zemine oturan genelleştirilmiş eğri eksenli kirişleri çözmüşlerdir. Düzleminde veya düzlemine dik yüklü durumlar için dairesel kirişler ve ringler için analitik ve sayısal gerçek çözümlerini vermişlerdir.

Eroğlu (2014), eksen eğrisi herhangi bir düzlemsel eğri olan çubuğun kesiti de değişken kabul edilerek, çubuk statığının düzlem içi ve düzlem dışı genel denklemleri vermişlerdir ve statik problemlerinin kesin çözümü başlangıç değerleri yöntemi ile yapmışlardır. Sabit kesitli ve çember eksenli çubuk için asal matrisin ifadeleri elde edilmişlerdir. Elde edilen çözüm kullanılarak bir sonlu eleman formülasyonu geliştirilmiş, düzlemsel eğri eksenli çubukların düzlem içi ve düzlem dışı statik ve serbest titreşim problemleri çözülmüştür.

3. METARYAL ve YÖNTEM

Daire eksenli çubukların statik davranışını idare eden kanonik formda birinci mertebe adi diferansiyel denklem takımları elde edilmektedir. Denklem takımları, Taşıma matrisi yöntemi ile çözülmektedir. Ara mesnet ve yüklerin bulunduğu durumda taşıma matrisi yöntemi ile eleman rijitlik matrisi ve eleman yük vektörü bulunarak rijitlik matrisi yöntemi ile çözülmektedir.

Çubuk malzemesi homojen, lineer elastik ve izotropik kabul edilmiştir. Formülasyonda, eksenel ve kayma deformasyon etkileri göz önüne alınmaktadır. Uzaysal eğri eksenli çubuklarda denge, uygunluk ve bünye denklemleri ile dört vektörel denklem elde edilmektedir. Bu vektörel denklemleri $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ hareketli takımdaki bileşenlerine ayrıldığında on iki adet birinci mertebeden adi diferansiyel denklemler elde edilmektedir. Bu on iki diferansiyel denklemin altısı düzleminde, altısı düzlemine dik yükleme haline ayrılmaktadır. Kanonik halde elde edilen diferansiyel denklemler, deplasmana karşılık kuvvetler şeklinde sıralanmaktadır. Taşıma matrisi yöntemi ile eleman rijitlik matrisi ve eleman yük vektörü oluşturularak çözüm yapılmaktadır.

Ayrıca, daire eksenli çubukların dinamik analizleri de incelenmektedir. Daire eksenli çubukların eleman rijitlik matrisleri taşıma matrisi yöntemi kullanılarak elde edilmektedir. Kütle matrisi için, çok fazla sayıda doğru eksenli çubuk kullanılarak daire eksenli çubuklar oluşturulmuştur. Doğru eksenli çubukların eleman kütle matrisi kullanılarak, daire eksenli çubukların kütle matrisi elde edilmektedir. Eleman koordinatlarında elde edilen rijitlik ve kütle matrisleri dönüşüm matrisi yardımı ile genel takıma dönüştürülmektedir. Genel koordinatlarda elde edilen sistem rijitlik matrisi ve sistem kütle matrisi yardımıyla öz değer problemi çözülerek, daire eksenli çubukların serbest titreşim frekansları elde edilmektedir.

Daire eksenli çubukların statik ve dinamik analizleri için MATHEMATICA dilinde genel amaçlı bilgisayar programları hazırlanmıştır. Hazırlanan bilgisayar programı ile literatürdeki örnekler çözülerek kıyaslamalar yapılacaktır.

3.1. Uzaysal Çubuklar

3.1.1. Çubuğun Geometrisi

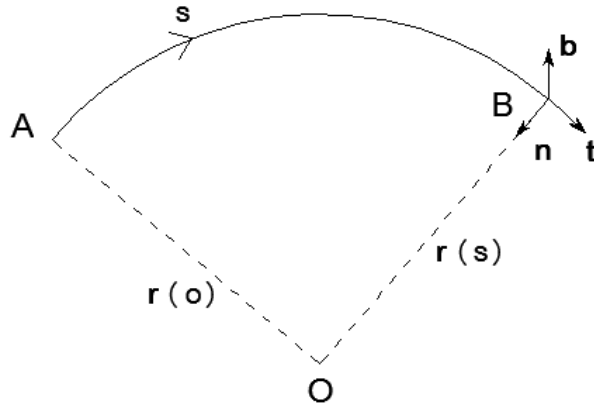
Çubuk, uzunluğu yanında diğer iki boyutu çok küçük olan taşıyıcı cisimlerdir. Bir çubukta biri eksenini diğeri dik kesiti ola üzere iki başlıca eleman vardır. Dik kesit olarak adlandırılan kesit, kendi ağırlık merkezinde çubuk eksenini olan bir uzay eğrisine devamlı dik kalacak şekilde hareket ederse çubuk meydana gelir.

3.1.2. Çubuk Eksenini

Çubuk eksenini olarak herhangi bir eğri düşünülecek olursa; böyle bir eğri:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(s) \quad (3.1)$$

yer vektörü ile tarif edilir.



Şekil 3.1. Çubuk eksenini

Burada s eğri üzerinde başlangıç olarak seçilen bir A noktası ile B noktası arasındaki mesafeyi ifade eder, s seçilen doğrultuda pozitifdir.

Eğri eksenli çubuklarda, eksene bağlı hareketli bir koordinat takımının $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ seçilmesi problemin tanımlanmasında kolaylık sağlamaktadır. Ayrıca her üç birim vektörde yer vektörüne bağlıdır.

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} \quad (3.2)$$

Burada $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$ ve $\mathbf{b}$ sırasıyla teğet, normal ve binormal birim vektörleri olarak tarif edilmektedir. $\mathbf{t}$ artan s yönünde, $\mathbf{n}$ teğet birim vektöre dik olup yönü eğrilik merkezine doğrudur. Binormal birim vektör $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ olup, $\mathbf{t}$ ve $\mathbf{n}$ birim vektörlerinin oluşturdukları düzleme diktir.

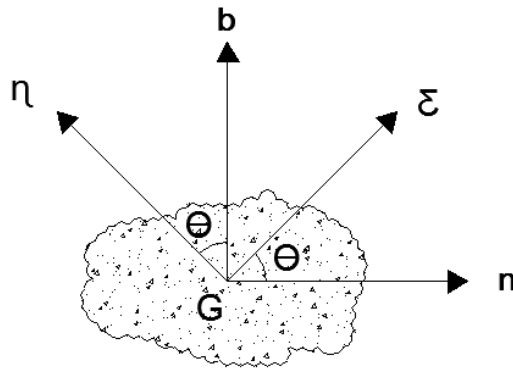
Bu şekilde tarif edilen, $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ birim vektörlerinin teşkil ettiği takım sağ el kuralına göre teşkil edilir ve aralarında Frenet formülleri denilen türevsel bağıntılar vardır.

$$\frac{d\mathbf{t}}{ds} = \chi \mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = \tau \mathbf{b} - \chi \mathbf{t}, \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tau \mathbf{n} \quad (3.3)$$

Burada χ eğrilik olup daima pozitifdir. τ tabi burulmayı ifade eder ve uzay eğrilerinde sıfırdan farklı, düzlemsel eğriler için sıfırdır. χ ve τ değeri sabit olan eğrilere helis, sıfır olan eğrilere doğru denilmektedir.

3.1.3. Çubuk Dik Kesiti

Dik kesit, kapalı bir eğri ile sınırlanmış ve $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ düzleminde yer alan bir düzlem parçasıdır. G şeklin ağırlık merkezini ξ ve η eksenleri ise kesitin asal atalet moment eksenlerini göstermektedir (Şekil 3.2.).



Şekil 3.2. Çubuk dik kesiti

Eksene bağlı olan $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ takımı ile dik kesite bağlı olan ξ ve η takımları birbirine Θ açısı ile bağlıdır.

$$\Theta = \Theta(s) \quad (3.4)$$

Dış normali $\mathbf{t}$ ile aynı yönde olan kesit pozitif kesit, aksi halde negatif kesittir.

3.1.4. Yapılan Kabuller

- Çubuk malzemesi elastik, homojen ve izotroptur.
- Yer ve şekil değiştirmeler çok küçük olduğundan birinci mertebe teorisi kullanılacaktır.
- Deforme olmuş dik kesitin düzlemden olan sapmaları ihmal edilerek düzlem kaldığı kabulü yapılacaktır.
- Çubuk kesiti göz önüne alındığı bölgede eksen boyunca sabittir.
- Bünye denklemleri için Hooke Kanunu kullanılacaktır.

3.1.5. Denge Denklemleri

Çubuğa tesir eden dış kuvvetler ve çubuk parçaları arasındaki etki tepkiyi ifade eden iç kuvvetler ele alınacaktır. Dış kuvvetler ele alınırsa, doğrultuları çubuk ekseninden geçen s boyunca yayılı olan dış kuvvetler $\mathbf{p}$ vektörü ile gösterilirse,

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta s} \right) = \mathbf{p} \quad (3.5)$$

olur. Burada $\Delta \mathbf{p}$ kuvveti Δs eksen parçasına isabet eden dış kuvvetlerin vektörel toplamıdır.

Dış kuvvetler doğrultuları itibariyle eksenden geçmezler ise bunları eksene aktarmak mümkündür. Bu durumda bir kuvvet çiftini hesaba katmak gerekir. $\Delta \mathbf{M}$ çubuğun Δs kısmına etki eden dış kuvvetlerin eksene aktarılmasıyla oluşan kuvvet çiftidir.

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \mathbf{M}}{\Delta s} \right) = \mathbf{m} \quad (3.6)$$

Burada $\mathbf{m}$ vektörü yayılı dış kuvvet çiftlerini gösterir. Kesit tesirleri adı verilen iç kuvvetler olarak kesit pozitif yönüne tesir eden kuvvetler alınmıştır. Ayrıca yayılı iç kuvvetler ise kesitin ağırlık merkezine aktarılan değeridir.

$\mathbf{T}$ vektörü, kesite tesir eden iç kuvvetlerin vektörel toplamını, $\mathbf{M}$ vektörü ise bunların ağırlık merkezine aktarıldıkları zaman eklenmesi gereken kuvvet çiftini gösterir.

Elastik çubuk teorisinin hedeflerinden biri kesit tesirlerini s 'e göre değişen $\mathbf{T}(s)$ ve $\mathbf{M}(s)$ fonksiyonlarını hesaplamaktır.

$\mathbf{T} \cdot \mathbf{t} = T_t$ Eksenel Normal Kuvvet

$\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = T_n$ Kesme Kuvveti

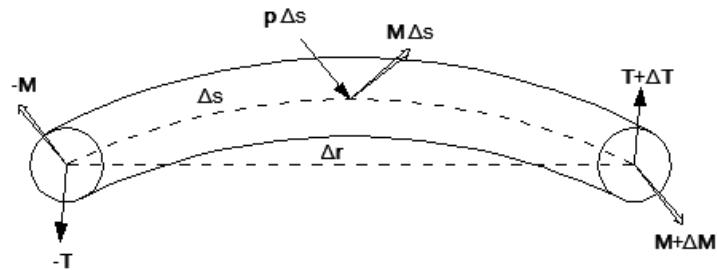
$\mathbf{T} \cdot \mathbf{b} = T_b$ Kesme Kuvveti

$\mathbf{M} \cdot \mathbf{t} = M_t$ Burulma Momenti

$\mathbf{M} \cdot \mathbf{n} = M_n$ Eğilme Momenti

$\mathbf{M} \cdot \mathbf{b} = M_b$ Eğilme Momenti

$\mathbf{T}(s)$ ve $\mathbf{M}(s)$ fonksiyonları ile dış kuvvetler arasında türevsel bir bağıntı mevcuttur. Bu diferansiyel bağıntı Δs uzunluğunda bir çubuk elemanın üzerine (Şekil 3.3.) ve kesit yüzlerine tesir eden kuvvetlerle dengede olması şartı ile bulunur.



Şekil 3.3. Çubuk elemanın denge durumu

Denge şartı kullanılarak A noktasına göre moment alınırsa,

$$- \mathbf{T} + \mathbf{T} + \Delta \mathbf{T} + \mathbf{p} \Delta s = 0 \quad (3.7)$$

$$- \mathbf{M} + \mathbf{M} + \Delta \mathbf{M} + \mathbf{m} \Delta s + \Delta \mathbf{r} \times (\mathbf{T} + \Delta \mathbf{T}) = 0 \quad (3.8)$$

denklemleri elde edilir ve sadeleştirme yapıp limite geçilirse,

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} + \mathbf{p} = 0 \quad (3.9)$$

$$\frac{d\mathbf{M}}{ds} + \mathbf{t} \times \mathbf{T} + \mathbf{m} = 0 \quad (3.10)$$

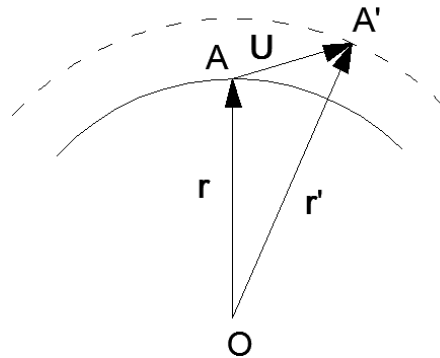
diferansiyel denge denklemleri elde edilir.

3.1.6. Uygunluk denklemleri

Çubuk şekil değiştirdikten sonra çubuk ekseninde herhangi bir A noktası yer değiştirerek A' noktasına geçecektir (Şekil 3.4). Burada $\overrightarrow{AA'}$ vektörüne yer değiştirme vektörü denir ve

$$\overrightarrow{AA'} = \mathbf{U}(s) \quad (3.11)$$

ile gösterilir.



Şekil 3.4. Çubuk ekseninde yer değiştirme

$\mathbf{U}(s)$ fonksiyonunun bilinmesi ile çubuk ekseninin deformasyondan sonraki durumu belli olur.

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{U} \quad (3.12)$$

Çubuk şekil değiştirdikten sonra deforme olmuş kesitin düzlemden olan sapmaları ihmal edilmiştir. $\mathbf{U}(s)$ vektörü, dik kesitin ağırlık merkezine ait ötelenmesini ve $\mathbf{\Omega}(s)$ vektörü ise ağırlık merkezinden geçen eksen etrafındaki dönmeyi gösterir. Bu iki vektör aynı cisme ait dik kesite etki ettiğinden dolayı aralarında diferansiyel bir bağıntı vardır.

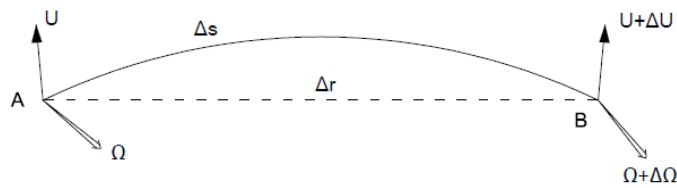
Çubuk şekil değiştirmesi için önemli iki vektör daha vardır. Bunlar birim uzunluklu bir çubuk elemanı için tarif edilmiş rölatif birim değerlerdir. Birisi rölatif birim kayma $\boldsymbol{\gamma}$ vektörü, diğeri ise rölatif birim dönme $\boldsymbol{\omega}$ vektörüdür.

$$\left(\frac{d\mathbf{U}}{ds}\right)_{\Omega=0} = \boldsymbol{\gamma} \quad (3.13)$$

$\boldsymbol{\gamma}$ vektörü birim çubuk elemanının şekil değiştirmesini göstermektedir. $\boldsymbol{\omega}$ vektörü ise,

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{ds} \quad (3.14)$$

birim boyun dönmesi olarak tarif edilir. $\boldsymbol{\gamma}$ ve $\boldsymbol{\omega}$ vektörlerinin de $\mathbf{U}$ ve $\mathbf{\Omega}$ vektörleri gibi şiddetleri çok küçük olduğu hesaplarda kabul edilmektedir.



Şekil 3.5. Çubuktaki yer değiştirme ve dönmeler

Çubuk eksenini üzerinde birbirine çok yakın A ve B noktaları ele alalım (Şekil 3.5). B noktasındaki yer değiştirmenin A'dan olan farkı $\Delta\mathbf{U}$ ile gösterilmiştir. Bu farkın iki nedeni vardır. Birincisi, AB çubuk elemanının şekil değiştirmesi dolayısıyla B noktası A'ya göre $\boldsymbol{\gamma} \cdot \Delta s$ kadar farklı hareket eder. İkincisi, A'dan geçen kesit $\boldsymbol{\Omega}$ ile gösterilen bir dönme yapınca B noktası da $\boldsymbol{\Omega} \times \Delta\mathbf{r}$ ile gösterilen bir hareket yapacaktır. Buna göre,

$$\Delta\mathbf{U} = \boldsymbol{\gamma} \cdot \Delta s + \boldsymbol{\Omega} \times \Delta\mathbf{r} \quad (3.15)$$

denklemleri elde edilir ve her iki taraf Δs değerine bölünüp limite geçilirse,

$$\frac{d\mathbf{U}}{ds} = \boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{t} \quad (3.16)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklem $\mathbf{U}$ vektörü ile $\boldsymbol{\Omega}$ arasında gösterilen ifadeye Uygunluk Şartı denilmektedir.

$\boldsymbol{\gamma}$ ve $\boldsymbol{\omega}$ vektörlerinin $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ takımındaki bileşenleri, γ_t birim uzamayı, γ_n ve γ_b değeri $\mathbf{n}$ ve $\mathbf{b}$ doğrultularındaki kaymaları gösterir. Aynı zamanda ω_t değeri burulmadaki birim dönme açısıdır. Ayrıca ω_n ve ω_b ise $\mathbf{n}$ ve $\mathbf{b}$ eksenleri etrafındaki eğilme dolayısıyla meydana gelen rölatif birim dönmelerdir.

3.1.7. Kesit Tesirleri İle Şekil Değiştirme Arasındaki İlişki

$\boldsymbol{\gamma}$ ile $\mathbf{T}$ ve $\boldsymbol{\omega}$ ile $\mathbf{M}$ vektörleri arasındaki ilişki malzeme bünyesini belirtmektedir.

$$\mathbf{T} = f_1(\boldsymbol{\gamma}) \quad (3.17)$$

$$\mathbf{M} = f_2(\boldsymbol{\omega}) \quad (3.18)$$

Burada f_1 ve f_2 ilgili vektörler arasındaki ilişkiyi gösterir ve vektörlerin koordinatları T_1 , T_2 , T_3 'e karşılık γ_1 , γ_2 , γ_3 ve M_1 , M_2 , M_3 'e karşılık ω_1 , ω_2 , ω_3 olsun. Kapalı formda aşağıdaki şekilde yazılır.

$$T_i = \sum C_{ij} \cdot \gamma_j \quad (3.19)$$

$$M_i = \sum D_{ij} \cdot \omega_j \quad (3.20)$$

Burada C_{ij} ve D_{ij} ile gösterilen katsayılar yalnız çubuk malzemesine ve kesit geometrisine bağlı olup $\boldsymbol{\gamma}$ ve $\boldsymbol{\omega}$ değişkenlerinden bağımsızdır. Ayrıca malzeme homojen ve izotrop, kesitin de üniform olduğu kabul edilirse, bu katsayıların 6 değişkeninden bağımsız olur. C_{ij} ve D_{ij} katsayılarına çubuğun kaymaya ve dönmeye karşı rijitlikleri olup simetriktir.

Yapılan kabullerde ise **n** ve **b** takımı asal eksen olan ξ ve η ile çakışmaktadır. Bundan dolayı rijitlik matrisleri aşağıdaki yazılır. Matris bileşenleri **t**, **n**, **b** takımında incelendiğinde,

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} C_{tt} & 0 & 0 \\ 0 & C_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & C_{bb} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} D_{tt} & 0 & 0 \\ 0 & D_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & D_{bb} \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

şeklinde gösterilebilir. Rijitlik matrisleri $|C_{ij}| \neq 0$ ve $|D_{ij}| \neq 0$ olduğundan bu matrislerin tersleri alınabilir.

$$\boldsymbol{\gamma} = [\mathbf{C}]^{-1} \cdot \mathbf{T} \quad (3.23)$$

$$\boldsymbol{\omega} = [\mathbf{D}]^{-1} \cdot \mathbf{M} \quad (3.24)$$

3.1.8. Vektörel Denklemlerin **t**, **n**, **b** Takımına Dönüştürülmesi

Elastik çubuk teorisi kurulurken bilinmeyenler altı vektörden meydana gelmektedir. Bunlar, kesit tesirleri **T** ve **M**, şekil değiştirme elemanları **γ** ve **ω**, yer değiştirme ve dönme **U** ve **Ω** vektörleridir. Bu denklemler daha önceki bölümlerde elde edilmişti.

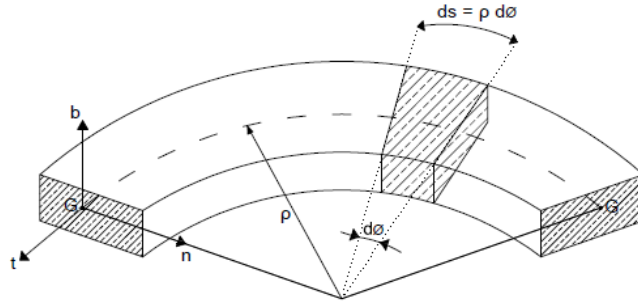
Çubuk elemanında dengeyi ifade eden denklemler (3.9-3.10), uygunluk denklemleri (3.14, 3.16), bünye denklemleri (3.23, 3.24) elde etmişti. Burada (3.23) ve (3.24) denklemleri (3.14) ve (3.16) denklemlerinde yerine konursa,

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{ds} - [\mathbf{D}]^{-1} \cdot \mathbf{M} = 0 \quad (3.25)$$

$$\frac{d\mathbf{U}}{ds} + \mathbf{t} \times \boldsymbol{\Omega} - [\mathbf{C}]^{-1} \cdot \mathbf{T} = 0 \quad (3.26)$$

ifadeleri elde edilmiş olur. Böylece dört adet diferansiyel denkleme indirgenmiş olunur.

Burada hesaplanması gereken iç kuvvetler $\mathbf{T}$, $\mathbf{M}$ ve yer değiştirme ve dönme olan $\mathbf{U}$, $\mathbf{\Omega}$ olmak üzere dört vektörel büyüklük vardır. Hesaplarda kolaylık sağlamak için skaler denklemlerle işlem yapılması uygun olmaktadır. Eksen takımı olarak $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ hareketli takımı alınmış olup bu vektörel ifadeler bu hareketli takıma aktarılmıştır. Hesaplarda serbest değişken s yerine ϕ ifadesi kullanılmıştır. Aralarında,



Şekil 3.6. Daire eksenli çubuk elemanı

$$ds = \rho d\phi \quad (3.27)$$

bağıntısı vardır. Eğrilik ise,

$$\chi = \frac{1}{\rho} \quad (3.28)$$

şeklinde tarif edilir.

Frenet formülleri dikkate alınarak vektörel denklemlerin hareketli $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ takımına aktarılması aşağıdaki gibi yapılır ve (3.9) denklemindeki ifadeler $\mathbf{t}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ takımındaki bileşenlere ayrılırsa,

$$\mathbf{T} = T_t \cdot \mathbf{t} + T_n \cdot \mathbf{n} + T_b \cdot \mathbf{b} \quad (3.29)$$

$$\mathbf{p} = p_t \cdot \mathbf{t} + p_n \cdot \mathbf{n} + p_b \cdot \mathbf{b}$$

elde edilir. (3.3) ve (3.29) denklemleri (3.9) denklemlerinde yerine konursa,

$$\frac{dT_t}{d\phi} - T_n + \rho p_t = 0 \quad (3.30a)$$

$$\frac{dT_n}{d\phi} + T_t - \rho \tau T_b + \rho p_n = 0 \quad (3.30b)$$

$$\frac{dT_b}{d\phi} + \rho \tau T_n + \rho p_b = 0 \quad (3.30c)$$

denklemleri elde edilir. Aynı şekilde (3.10) denkleminde ifadeler hareketli **t**, **n**, **b** takımındaki bileşenlere ayrılırsa,

$$\mathbf{M} = M_t \cdot \mathbf{t} + M_n \cdot \mathbf{n} + M_b \cdot \mathbf{b}$$

$$\mathbf{m} = m_t \cdot \mathbf{t} + m_n \cdot \mathbf{n} + m_b \cdot \mathbf{b} \quad (3.31)$$

$$\mathbf{T} = T_t \cdot \mathbf{t} + T_n \cdot \mathbf{n} + T_b \cdot \mathbf{b}$$

elde edilir. (3.3) ve (3.31) denklemleri (3.10) denklemlerinde yerine konursa,

$$\frac{dM_t}{d\phi} - M_n + \rho m_t = 0 \quad (3.32a)$$

$$\frac{dM_n}{d\phi} + M_t - \rho \tau M_b - \rho T_b + \rho m_n = 0 \quad (3.32b)$$

$$\frac{dM_b}{d\phi} + \rho \tau M_n + \rho T_n + \rho m_b = 0 \quad (3.32c)$$

denklemleri elde edilir.

(3.15) denkleminde ifadeler hareketli **t**, **n**, **b** takımındaki bileşenlere ayrılır ise,

$$\mathbf{\Omega} = \Omega_t \cdot \mathbf{t} + \Omega_n \cdot \mathbf{n} + \Omega_b \cdot \mathbf{b} \quad (3.33)$$

$$\mathbf{\omega} = \omega_t \cdot \mathbf{t} + \omega_n \cdot \mathbf{n} + \omega_b \cdot \mathbf{b}$$

elde edilir. (3.3) ve (3.33) denklemleri (3.14) denklemlerinde yerine konursa,

$$\frac{d\Omega_t}{d\phi} - \Omega_n + \rho \omega_t = 0 \quad (3.34a)$$

$$\frac{d\Omega_n}{d\phi} + \Omega_t - \rho \tau \Omega_b + \rho \omega_n = 0 \quad (3.34b)$$

$$\frac{d\Omega_b}{d\phi} + \rho \tau \Omega_n + \rho \omega_b = 0 \quad (3.34c)$$

Aynı şekilde (3.16) denkleminde ifadeler hareketli **t**, **n**, **b** takımındaki bileşenlere ayrılırsa,

$$\mathbf{U} = U_t \cdot \mathbf{t} + U_n \cdot \mathbf{n} + U_b \cdot \mathbf{b} \quad (3.35)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \gamma_t \cdot \mathbf{t} + \gamma_n \cdot \mathbf{n} + \gamma_b \cdot \mathbf{b}$$

elde edilir. (3.3) ve (3.35) denklemleri (3.16) denklemlerinde yerine konursa,

$$\frac{dU_t}{d\phi} - U_n + \rho \gamma_t = 0 \quad (3.36a)$$

$$\frac{dU_n}{d\phi} + U_t - \rho \tau U_b - \rho \Omega_b + \rho \gamma_n = 0 \quad (3.36b)$$

$$\frac{dU_b}{d\phi} + \rho \tau U_n + \rho \Omega_n + \rho \gamma_b = 0 \quad (3.36c)$$

denklemleri elde edilir.

Böylece uzaysal çubuklarda, statik yükler altında davranışı idare eden genel denklemler önce vektörel formda elde edilmiş ve daha sonra hareketli **t**, **n**, **b** takımına aktarılmıştır.

Bu on iki adet birinci dereceden diferansiyel denklemler deplasman ve dönmeye karşılık kuvvet ve kuvvet çifti olarak sıralanırsa,

$$\frac{dU_t}{d\phi} - U_n + \rho \gamma_t = 0 \quad (3.37a)$$

$$\frac{dU_n}{d\phi} + U_t - \rho \tau U_b - \rho \Omega_b + \rho \gamma_n = 0 \quad (3.37b)$$

$$\frac{dU_b}{d\phi} + \rho \tau U_n + \rho \Omega_n + \rho \gamma_b = 0 \quad (3.37c)$$

$$\frac{d\Omega_t}{d\phi} - \Omega_n + \rho \omega_t = 0 \quad (3.37d)$$

$$\frac{d\Omega_n}{d\phi} + \Omega_t - \rho \tau \Omega_b + \rho \omega_n = 0 \quad (3.37e)$$

$$\frac{d\Omega_b}{d\phi} + \rho \tau \Omega_n + \rho \omega_b = 0 \quad (3.37f)$$

$$\frac{dT_t}{d\phi} - T_n + \rho p_t = 0 \quad (3.37g)$$

$$\frac{dT_n}{d\phi} + T_t - \rho \tau T_b + \rho p_n = 0 \quad (3.37h)$$

$$\frac{dT_b}{d\phi} + \rho \tau T_n + \rho p_b = 0 \quad (3.37i)$$

$$\frac{dM_t}{d\phi} - M_n + \rho m_t = 0 \quad (3.37j)$$

$$\frac{dM_n}{d\phi} + M_t - \rho \tau M_b - \rho T_b + \rho m_n = 0 \quad (3.37j)$$

$$\frac{dM_b}{d\phi} + \rho \tau M_n + \rho T_n + \rho m_b = 0 \quad (3.37k)$$

şeklinde elde edilir.

3.2. Düzlemsel Çubuklar

Düzlemsel hal, eksen eğrisi bir düzlem içinde olan çubuklardır. Düzlemsel çubuklarda, tabi burulma, $\tau = 0$ ve binormal birim vektör, $\mathbf{b} = \text{sabit}$ olur.

Düzlemsel çubukların statik denklemleri oluşturulurken, çubuk malzemesinin elastik ve izotrop olduğu, kesitin kayma ve geometrik merkezlerinin çakıştığı, birinci mertebe teorisinin geçerli olduğu, kesit düzleminde bulunan $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ birim vektörleri ile kesit asal eksenlerinin çakıştığı kabulü yapılacaktır.

Bu durumda,

$$[\mathbf{C}] = \begin{bmatrix} C_{tt} & 0 & 0 \\ 0 & C_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & C_{bb} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} D_{tt} & 0 & 0 \\ 0 & D_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & D_{bb} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

olmaktadır. Diferansiyel denklemlerde,

$$\gamma_t = \frac{T_t}{C_{tt}}, \gamma_n = \frac{T_n}{C_{nn}}, \gamma_b = \frac{T_b}{C_{bb}} \quad (3.40)$$

$$\omega_t = \frac{M_t}{D_{tt}}, \omega_n = \frac{M_n}{D_{nn}}, \omega_b = \frac{M_b}{D_{bb}} \quad (3.41)$$

ifadeleri yerine konulacak ve rijitliklerin açık ifadeleri

$$C_{tt} = EA, C_{nn} = GA/\alpha_n, C_{bb} = GA/\alpha_b \quad (3.42)$$

$$D_{tt} = GJ_t, D_{nn} = EI_n, D_{bb} = EI_b \quad (3.43)$$

şeklindedir. Burada E elastisite modülü, A kesit alanı, G kayma modülü, J_t burulma atalet momenti, α_n ve α_b kayma düzeltme faktörlerini, I_n ve I_b ise **n**, **b** eksenlerine göre atalet momentlerini ifade etmektedir.

Bu ifadeler on iki adet birinci dereceden diferansiyel denklemlerde yerlerine yazılırsa,

$$\frac{dU_t}{d\phi} - U_n + \rho \frac{T_t}{EA} = 0 \quad (3.44a)$$

$$\frac{dU_n}{d\phi} + U_t - \rho \Omega_b + \rho \frac{\alpha_n T_n}{GA} = 0 \quad (3.44b)$$

$$\frac{dU_b}{d\phi} + \rho \Omega_n + \rho \frac{\alpha_b T_b}{GA} = 0 \quad (3.44c)$$

$$\frac{d\Omega_t}{d\phi} - \Omega_n + \rho \frac{M_t}{GJ_t} = 0 \quad (3.44d)$$

$$\frac{d\Omega_n}{d\phi} + \Omega_t + \rho \frac{M_n}{EI_n} = 0 \quad (3.44e)$$

$$\frac{d\Omega_b}{d\phi} + \rho \frac{M_b}{EI_b} = 0 \quad (3.44f)$$

$$\frac{dT_t}{d\phi} - T_n + \rho p_t = 0 \quad (3.44g)$$

$$\frac{dT_n}{d\phi} + T_t + \rho p_n = 0 \quad (3.44h)$$

$$\frac{dT_b}{d\phi} + \rho p_b = 0 \quad (3.44i)$$

$$\frac{dM_t}{d\phi} - M_n + \rho m_t = 0 \quad (3.44i)$$

$$\frac{dM_n}{d\phi} + M_t - \rho T_b + \rho m_n = 0 \quad (3.44j)$$

$$\frac{dM_b}{d\phi} + \rho T_n + \rho m_b = 0 \quad (3.44k)$$

şeklinde elde edilmektedir.

Elde edilen yukarıdaki on iki adet birinci dereceden diferansiyel denklemler dikkatle incelendiğinde iki grup dikkat çekmektedir. Birinci grup $U_t, U_n, \Omega_b, T_t, T_n, M_b$ gibi altı büyüklük sadece (3.44a), (3.44b), (3.44f), (3.44g), (3.44h) ve (3.44k) denklemlerinde bulunmakta ve ikinci grup ise $U_b, \Omega_t, \Omega_n, T_b, M_t, M_n$ gibi altı büyüklük ise (3.44c), (3.44d), (3.44e), (3.44ı), (3.44i) ve (3.44j) denklemlerinde bulunmaktadır. Böylece hem bilinmeyenler hem de denklemler altışar adet olarak iki gruba ayrılarak hesaplamalar için büyük kolaylık sağlamaktadır.

I. Grup $U_t, U_n, \Omega_b, T_t, T_n, M_b$

II. Grup $U_b, \Omega_t, \Omega_n, T_b, M_t, M_n$

Birinci grupta bilinmeyen kuvvet ve kuvvet çifti T_t, T_n, M_b gibi iç kuvvetler **t, n** düzleminde ve çubuk ekseninin bulunduğu düzlemdedir. Bu gruptaki diğer U_t, U_n, Ω_b gibi yer değiştirme ve dönmeler ise düzlem içinde bulunan değerlerdir. Ayrıca dış kuvvet bileşenleri olan p_t, p_n ve m_b değerleri de aynı düzlemde etkimektedir. O halde birinci grup problemde etkiler ve sonuçlar çubuk düzlemi içinde bulunmaktadır.

İkinci grupta yer alan T_b, M_t, M_n iç kuvvet ve kuvvet çiftine ait tesirler düzlemine dik doğrultuda olmaktadır ve aynı zamanda U_b, Ω_t, Ω_n gibi yer değiştirme ve dönmeler de düzlemine dik doğrultudadır. Ayrıca dış kuvvet bileşenleri olan p_b, m_t, m_n değerleri düzlemine dik etki etmektedir. O halde ikinci gruptaki etki ve sonuçlar düzlemine dik olmaktadır.

Bu durumda düzlemsel elde ettiğimiz on iki adet diferansiyel denklemi altısı düzlemi içinde altısı düzlemine dik olarak ifade edebiliriz.

3.2.1. Düzleminde Yüklü Eğri Eksenli Çubuklar

Düzleminde yüklü eğri eksenli çubukların davranışını idare eden birinci derece adi diferansiyel denklemler kanonik halde aşağıdaki şekilde elde edilmektedir.

$$\frac{dU_t}{d\phi} - U_n + \rho \frac{T_t}{C_{tt}} = 0 \quad (3.45a)$$

$$\frac{dU_n}{d\phi} + U_t - \rho \Omega_b + \rho \frac{T_n}{C_{nn}} = 0 \quad (3.45b)$$

$$\frac{d\Omega_b}{d\phi} + \rho \frac{M_b}{D_{bb}} = 0 \quad (3.45c)$$

$$\frac{dT_t}{d\phi} - T_n + \rho p_t = 0 \quad (3.45d)$$

$$\frac{dT_n}{d\phi} + T_t + \rho p_n = 0 \quad (3.45e)$$

$$\frac{dM_b}{d\phi} + \rho T_n + \rho m_b = 0 \quad (3.45f)$$

3.2.2. Düzlemine Dik Yüklü Eğri Eksenli Çubuklar

Düzleminde yüklü eğri eksenli çubukların davranışını idare eden birinci derece adi diferansiyel denklemler kanonik halde aşağıdaki şekilde elde edilmektedir.

$$\frac{dU_b}{d\phi} + \rho \Omega_n + \rho \frac{T_b}{C_{bb}} = 0 \quad (3.46a)$$

$$\frac{d\Omega_t}{d\phi} - \Omega_n + \rho \frac{M_t}{D_{tt}} = 0 \quad (3.46b)$$

$$\frac{d\Omega_b}{d\phi} + \rho \frac{M_b}{D_{bb}} = 0 \quad (3.46c)$$

$$\frac{dT_b}{d\phi} + \rho p_b = 0 \quad (3.46d)$$

$$\frac{dM_t}{d\phi} - M_n + \rho m_t = 0 \quad (3.46e)$$

$$\frac{dM_n}{d\phi} + M_t - \rho T_b + \rho m_n = 0 \quad (3.46f)$$

3.3. Daire Eksenli Çubuklar

Daire eksenli çubuklarda eğrilik yarıçapı $\rho = R = \text{sabit}$ 'tir. Daire eksenli çubuklar için bu bölümde düzlemi içinde ve düzlemine dik yüklü çubuklar ayrı ayrı incelenecektir.

3.3.1. Düzleminde Yüklü Daire Eksenli Çubuklar

Daire eksenli çubuklar için daha önceden eğri eksenli çubuklar için düzleminde yüklü durumda elde edilmiş olan diferansiyel denklemler düzenlenirse aşağıdaki denklemler elde edilecektir.

$$\frac{dU_t}{d\phi} - U_n + R \frac{T_t}{C_{tt}} = 0 \quad (3.47a)$$

$$\frac{dU_n}{d\phi} + U_t - R \Omega_b + R \frac{T_n}{C_{nn}} = 0 \quad (3.47b)$$

$$\frac{d\Omega_b}{d\phi} + R \frac{M_b}{D_{bb}} = 0 \quad (3.47c)$$

$$\frac{dT_t}{d\phi} - T_n + R p_t = 0 \quad (3.47d)$$

$$\frac{dT_n}{d\phi} + T_t + R p_n = 0 \quad (3.47e)$$

$$\frac{dM_b}{d\phi} + R T_n + R m_b = 0 \quad (3.47f)$$

3.3.2. Düzlemine Dik Yüklü Daire Eksenli Çubuklar

Daire eksenli çubuklar için daha önceden eğri eksenli çubuklar için düzlemine dik yüklü durumda elde edilmiş olan diferansiyel denklemler düzenlenirse aşağıdaki denklemler elde edilecektir.

$$\frac{dU_b}{d\phi} + R \Omega_n + R \frac{T_b}{C_{bb}} = 0 \quad (3.48a)$$

$$\frac{d\Omega_t}{d\phi} - \Omega_n + R \frac{M_t}{D_{tt}} = 0 \quad (3.48b)$$

$$\frac{d\Omega_b}{d\phi} + R \frac{M_b}{D_{bb}} = 0 \quad (3.48c)$$

$$\frac{dT_b}{d\phi} + R p_b = 0 \quad (3.48d)$$

$$\frac{dM_t}{d\phi} - M_n + R m_t = 0 \quad (3.48e)$$

$$\frac{dM_n}{d\phi} + M_t - R T_b + R m_n = 0 \quad (3.48f)$$

3.4. Taşıma Matrisi Yöntemi

3.4.1. Başlangıç Değerler Metodu

Mühendislikte çeşitli problemlerde, sınır şartları yardımıyla ifade edilmesi gereken, sabit değerlerin sayısı çok olursa, hesap yorucu olmakla beraber hata yapma riski de oldukça fazla olur. Bundan dolayıdır ki sabit değerlerin sayısını minimumda tutmanın yolları aranır. Bu yüzden sınır değer problemlerinin hepsini başlangıç değerleri problemine dönüştüren Başlangıç Değerleri Metodu geliştirilmiştir. Bu yöntemin amacı sınır değer problemlerini başlangıç değer problemine dönüştürmek, böylece ara şartlardan dolayı girebilecek yeni sabitlerin önüne geçmek ve problemlerin denklemlerini hep aynı başlangıç sabitlerle ifade etmektir. Buna göre elastomekanikte izostatik ve hiperstatik problemleri arasında fark gözetmemektedir ve tek değişkenli problemlere uygulanmaktadır.

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

şeklinde yazılabilir. D kare matrisinin elemanları ϕ ye bağımlı da olabilir. Sistemin yakın durumları arasındaki geçiş, D kare matrisi ile ifade edildiğinden bu matrise Diferansiyel Geçiş Matrisi adı verilmektedir. Türevin tanım ifadesi kullanır ise,

$$\{S(\phi + d\phi)\} = \{S(\phi)\} + [D \cdot S(\phi)]d\phi \quad (3.53)$$

ifadesi elde edilmiş olunur. Bu ifade sistemin yakın durumları arasındaki geçişi temsil etmektedir. $\phi = 0$ dan başlamak suretiyle istenilen herhangi bir ϕ durumuna geçmek için geçiş matrisi kullanılmaktadır. Kullanılan bu geçiş matrisine, Taşıma Matrisi adı kullanılmaktadır (İnan, 1964).

3.4.3. Diferansiyel Denklemlerin Çözümü

Başlangıç Değerleri Metodu da denilen bu yöntem başlangıçta verilen değerlerden, herhangi bir noktadaki değere geçişi sağlayan matrise Taşıma Matrisi denir. Diğer bir ifade ile taşıma matrisi, $\phi = 0$ başlangıç noktası ile $\phi = \phi$ noktası arasındaki geçişi sağlayan [F] matrisidir ve şu şekilde ifade edilmektedir;

$$\{S(\phi)\} = [F(\phi)] \cdot \{S(0)\} \quad (3.54)$$

burada $\{S(\phi)\}$ kolon vektörü, $\phi = \phi$ deki durum vektörünü, $\{S(0)\}$ kolon vektörü ise $\phi = 0$ daki durum vektörünü ifade etmektedir.

$F(\phi)$ taşıma matrisini hesaplamak için sağlaması gereken diferansiyel denklem araştırılacak olunursa; (3.53) ifadesinin her iki tarafının türevi alınarak aşağıdaki ifade bulunur.

$$S'(\phi) = [F'(\phi)] \cdot S(0) \quad (3.55)$$

Yukarıdaki eşitlikte, $S'(\phi)$ yerine, (3.50) değeri konulduğunda, aşağıdaki ifadeler bulunur.

$$D.S(\phi) = [F'(\phi)].S(0)$$

$$D.[F(\phi)].S(0) = [F'(\phi)].S(0) \quad (3.56)$$

$$[D.F(\phi) - F'(\phi)].S(0) = 0$$

Yukarıdaki eşitlik sonucu,

$$F'(\phi) = D.F(\phi) \quad (3.57)$$

denklemini bulunmuş olunur.

Taşıma Matrisi uzaysal bir çubukta düzleminde (6x6) ve düzlemine dik yüklü haller için (6x6) boyutlarında matris olmak üzere toplam (12x12) boyutlarında bir kare matristir (Haktanır, 1990). Taşıma Matrisi Yöntemi, düzleminde ve düzlemine dik yüklü daire eksenli çubuklarda ayrı ayrı seçilen tek değişkenli fonksiyona bağlı olarak ele alınacak ve analitik çözümleri yapılacaktır.

3.4.4. Düzleminde Yüklü Daire Eksenli Çubuklarda Taşıma Matrisi

Herhangi bir sıfır başlangıcından itibaren bir kesiti ϕ açısı ile ifade edilsin. Kesit büyüklükleri olan yer değiştirme, dönme açısı, momenti ve kuvveti **t**, **n**, **b** takımında sırasıyla U_t , U_n , Ω_b , T_t , T_n , M_b den oluşmak üzere 6 adet adi diferansiyel denklem elde edilmiş olunur. Bu altı diferansiyel denklem bir kolon matriste toplarsak $\{S(\phi)\}$ durum matrisini elde etmiş oluruz.

$$\{S(\phi)\} = \begin{bmatrix} U_t(\phi) \\ U_n(\phi) \\ \Omega_b(\phi) \\ T_t(\phi) \\ T_n(\phi) \\ M_b(\phi) \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

$\{S(\phi)\}$ 'yi çözmek için gerekli diferansiyel denklemler çubuk başlangıç noktasından son noktaya kadar, herhangi bir ara sıçramanın (yayılı veya tekil yükler, ara mesnet ve mafsallar) olmadığı sistemin statik hali için homojen denklemleri kanonik formda yazılır.

Kayma etkisinin ihmal edildiği durumda,

$$\frac{dU_t}{d\phi} = U_n \quad (3.59a)$$

$$\frac{dU_n}{d\phi} = -U_t + R \Omega_n \quad (3.59b)$$

$$\frac{d\Omega_b}{d\phi} = R \frac{M_b}{D_{bb}} \quad (3.59c)$$

$$\frac{dT_t}{d\phi} = T_n \quad (3.59d)$$

$$\frac{dT_n}{d\phi} = -T_t \quad (3.59e)$$

$$\frac{dM_b}{d\phi} = -R T_n \quad (3.59f)$$

Kayma etkisinin dâhil edildiği durumda,

$$\frac{dU_t}{d\phi} = U_n + R \frac{T_t}{C_{tt}} \quad (3.60a)$$

$$\frac{dU_n}{d\phi} = -U_t + R \Omega_n + R \frac{T_n}{C_{nn}} \quad (3.60b)$$

$$\frac{d\Omega_b}{d\phi} = R \frac{M_b}{D_{bb}} \quad (3.60c)$$

$$\frac{dT_t}{d\phi} = T_n \quad (3.60d)$$

$$\frac{dT_n}{d\phi} = -T_t \quad (3.60e)$$

$$\frac{dM_b}{d\phi} = -R T_n \quad (3.60f)$$

oluşmaktadır. Buradan U_t deplasmanı esas değişken olarak kabul edilir ve diğer 5 adet diferansiyel denklemi U_t fonksiyonuna bağlı yazılıp denklemleri tekrar düzenlenir.

Kayma etkisinin ihmal edildiği durumda,

$$U_n = \frac{dU_t}{d\phi} \quad (3.61a)$$

$$\Omega_b = \frac{1}{R} \left[U_t + \frac{d^2 U_t}{d\phi^2} \right] \quad (3.61b)$$

$$T_t = \frac{1}{R^3} \frac{d}{d\phi^2} \left[D_{bb} \left[\frac{dU_t}{d\phi} + \frac{d^3 U_t}{d\phi^3} \right] \right] \quad (3.61c)$$

$$T_n = -\frac{1}{R^3} \frac{d}{d\phi} \left[D_{bb} \left[\frac{dU_t}{d\phi} + \frac{d^3 U_t}{d\phi^2} \right] \right] \quad (3.61d)$$

$$M_b = \frac{D_{bb}}{R^2} \left[\frac{dU_t}{d\phi} + \frac{d^2 U_t}{d\phi^2} \right] \quad (3.61e)$$

Kayma etkisinin dâhil olduğu durumda,

$$U_n = \frac{dU_t}{d\phi} - \left[\frac{D_{bb} C_{nn}}{D_{bb} C_{nn} + D_{bb} C_{tt} + R^2 C_{tt} C_{nn}} \right] \left[\frac{d^3 U_t}{d\phi^3} + \frac{d^5 U_t}{d\phi^5} \right] \quad (3.62a)$$

$$\Omega_b = \frac{1}{R} \left[U_t + \frac{d^2 U_t}{d\phi^2} + \frac{D_{bb} C_{tt} C_{nn}}{D_{bb} C_{nn} + D_{bb} C_{tt} + R^2 C_{tt} C_{nn}} \left[-\frac{1}{C_{nn}} \frac{d^2 U_t}{d\phi^2} + \left(\frac{1}{C_{nn}} - \frac{1}{C_{tt}} \right) \frac{d^4 U_t}{d\phi^4} - \frac{1}{C_{tt}} \frac{d^6 U_t}{d\phi^6} \right] \right] \quad (3.62b)$$

$$T_t = \left[\frac{D_{bb} C_{nn} C_{tt}}{D_{bb} C_{nn} + D_{bb} C_{tt} + R^2 C_{tt} C_{nn}} \right] \left[\frac{d^3 U_t}{d\phi^3} + \frac{d^5 U_t}{d\phi^5} \right] \quad (3.62c)$$

$$T_n = \left[-\frac{D_{bb} C_{nn} C_{tt}}{D_{bb} C_{nn} + D_{bb} C_{tt} + R^2 C_{tt} C_{nn}} \right] \left[\frac{d^2 U_t}{d\phi^2} + \frac{d^4 U_t}{d\phi^4} \right] \quad (3.62d)$$

$$M_b = \frac{D_{bb}}{R^2} \left[\frac{dU_t}{d\phi} + \frac{d^3 U_t}{d\phi^3} + \frac{D_{bb} C_{tt} C_{nn}}{D_{bb} C_{nn} + D_{bb} C_{tt} + R^2 C_{tt} C_{nn}} \left[-\frac{1}{C_{nn}} \frac{d^3 U_t}{d\phi^3} + \left(\frac{1}{C_{nn}} - \frac{1}{C_{tt}} \right) \frac{d^5 U_t}{d\phi^5} - \frac{1}{C_{tt}} \frac{d^7 U_t}{d\phi^7} \right] \right] \quad (3.62e)$$

denklemleri bulunur. Aynı denklemleri yok etmeye devam edersek U_t nin sağlaması gereken diferansiyel denklemin homojen hali için,

$$\frac{d^6 U_t}{d\phi^6} + 2 \frac{d^4 U_t}{d\phi^4} + \frac{d^2 U_t}{d\phi^2} = 0 \quad (3.63)$$

elde edilerek problemin her iki yoldan da çözümü için gerekli denklemler elde edilmiş olur. Bu sabit katsayılı adi diferansiyel denklemi karakterize edersek;

$$m^6 + 2m^4 + m^2 = 0 \quad (3.64a)$$

olur ve,

$$m^2 (m^4 + 2m^2 + 1) = 0 \quad (3.64b)$$

şeklinde çarpanlara ayrılıp ilk iki kökü;

$$m_{1,2} = 0 \quad (3.64c)$$

Bulunur. Daha sonra diğer kökler için,

$$m^4 + 2m^2 + 1 = 0 \quad (3.64d)$$

Denkleminde

$$m^2 = t \quad (3.64e)$$

Dönüşümü yapılırsa,

$$t^2 + 2t + 1 = 0 \quad (3.64f)$$

ifadesi elde edilip çözülür ise;

$$t_{1,2} = -1 \quad (3.64g)$$

dir. Bu durumda ise;

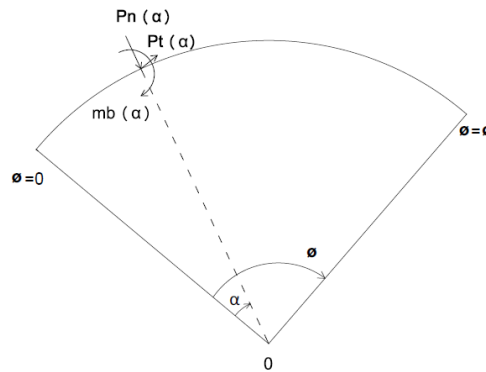
$$m_{3,4,5,6} = \pm i \text{ (2 katlı kök)} \quad (3.64h)$$

elde edilmiş olunur. Böylece diferansiyel denklemin çözümü aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$U_t = C_1 + C_2 \phi + C_3 \sin \phi + C_4 \cos \phi + C_5 \phi \sin \phi + C_6 \phi \cos \phi \quad (3.65)$$

Daha önce diğer 5 adet kesit büyüklükleri (3.61a-e, 3.62a-e) U_t cinsinden yazılmıştı. Bu durumda (3.54) denkleminde $\phi = 0$ başlangıç kesitinden $\phi = \phi$ kesitindeki büyüklüklere geçişi sağlayan taşıma matrisi Ek 1, Ek 2'deki gibi elde edilir. Taşıma matrisinin bulunması MATHEMATICA programlama diliyle hazırlanan program yardımıyla analitik olarak elde edilmiştir. Program dosyası Ek 1, Ek 2'de verilmiştir.

3.4.5. Düzleminde Yüklü Halde Tekil Yük ve Moment Durumu



Şekil 3.7. Düzleminde yüklü hal için arada tekil yük ve moment olması durumu

$\phi = \alpha$ gibi noktalarda dış tekil kuvvet veya moment olduğu durumda (Şekil 3.7) geçiş hesabı $\phi > \alpha$ için

$$\{S(\phi)\} = [F(\phi)] \{S(0)\} + [F(\phi - \alpha)] K(\alpha) \quad (3.66)$$

şeklinde olmaktadır.

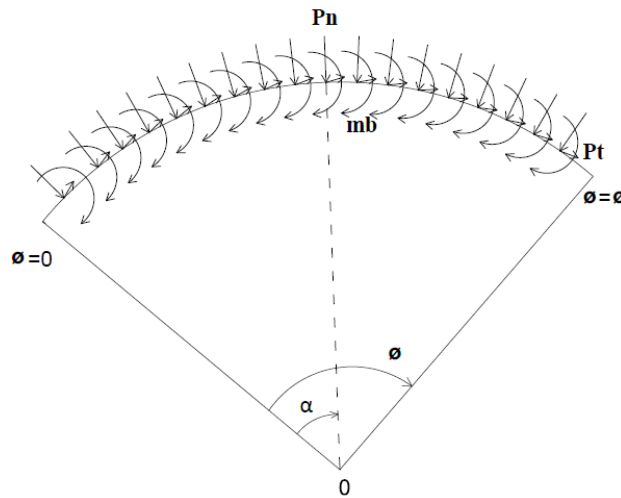
Bu durumda $K(\alpha)$ ile gösterilen süreksizlik kolon matrisi,

$$K(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P_t(\alpha) \\ -P_n(\alpha) \\ -M_b(\alpha) \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca dış kuvvetler birden fazla n kadar olması halinde denklem şu şekilde yazılır.

$$\{S(\phi)\} = [F(\phi)] \{S(0)\} + \sum_{i=1}^{i=n} [F(\phi - \alpha_i)] K(\alpha_i) \quad (3.68)$$

3.4.6. Düzleminde Yüklü Halde Yayılı Yük Durumu



Şekil 3.8. Düzleminde yüklü hal için arada yayılı yük ve moment olması durumu

Eğer dış yükler sürekli yani yayılı olması (Şekil 3.8) durumu için (3.68) ifadesinde ikinci terimde toplam ifadesi yerine bir integral şeklini alır.

$$\{S(\phi)\} = [F(\phi)] \{S(0)\} + \int_0^\phi [F(\phi - \alpha)] k(\alpha) d\alpha \quad (3.69)$$

Bu durumda $k(\alpha)$ ile gösterilen süreksizlik kolon matrisi,

$$k(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -p_t(\alpha) r \\ -p_n(\alpha) r \\ -m_b(\alpha) r \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

şeklinde ifadesi elde edilmiş olur.

Her iki süreksizlik kolon matrisi ilk üç satırın sıfır olması $\phi = \alpha$ için U_t , U_n ve Ω_b değerlerinde süreksizlik olmadığı, diğer satırlar ise $\phi = \alpha$ başlangıç sayıldığı takdirde var olan değerleri ifade etmektedir.

3.4.7. Düzlemine Dik Yüklü Daire Eksenli Çubuklarda Taşıma Matrisi

Herhangi bir sıfır başlangıcından itibaren bir kesiti ϕ açısı ile ifade edilsin. Kesit büyüklükleri olan yer değiştirme, dönme açısı, momenti ve kuvveti **t**, **n**, **b** takımında sırasıyla U_b , Ω_n , Ω_t , T_b , M_n , M_t den oluşmak üzere 6 adet adi diferansiyel denklem elde edilmiş olunur. Bu altı diferansiyel denklem bir kolon matriste toplarsak $\{S(\phi)\}$ durum matrisini elde etmiş oluruz.

$$\{S(\phi)\} = \begin{bmatrix} U_b(\phi) \\ \Omega_n(\phi) \\ \Omega_t(\phi) \\ T_b(\phi) \\ M_n(\phi) \\ M_t(\phi) \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

$\{S(\phi)\}$ 'yi çözmek için gerekli diferansiyel denklemler çubuk başlangıç noktasından son noktaya kadar, herhangi bir ara sıçramanın (yayılı veya tekil yükler, ara

mesnet ve mafsallar) olmadığı sistemin statik hali için homojen denklemleri kanonik formda,

Kayma etkisinin ihmal edildiği durumda,

$$\frac{dU_b}{d\phi} = -R \Omega_n \quad (3.72a)$$

$$\frac{d\Omega_n}{d\phi} = -\Omega_t + \frac{R}{D_{nn}} M_n \quad (3.72b)$$

$$\frac{d\Omega_t}{d\phi} = \Omega_n + \frac{R}{D_{tt}} M_t \quad (3.72c)$$

$$\frac{dT_b}{d\phi} = 0 \quad (3.72d)$$

$$\frac{dM_n}{d\phi} = -M_t + R T_b \quad (3.72e)$$

$$\frac{dM_t}{d\phi} = M_n \quad (3.72f)$$

Kayma etkisinin dâhil edildiği durumda,

$$\frac{dU_b}{d\phi} = -R \Omega_n + R \frac{T_b}{C_{bb}} \quad (3.73a)$$

$$\frac{d\Omega_n}{d\phi} = -\Omega_t + \frac{R}{D_{nn}} M_n \quad (3.73b)$$

$$\frac{d\Omega_t}{d\phi} = \Omega_n + \frac{R}{D_{tt}} M_t \quad (3.73c)$$

$$\frac{dT_b}{d\phi} = 0 \quad (3.73d)$$

$$\frac{dM_n}{d\phi} = -M_t + R T_b \quad (3.73e)$$

$$\frac{dM_t}{d\phi} = M_n \quad (3.73f)$$

şeklindedir. Buradan U_b deplasmanı esas değişken olarak kabul edilir ve diğer 5 adet diferansiyel denklemi U_b fonksiyonuna bağlı yazılıp denklemleri tekrar düzenlenir.

$$D = \frac{D_{tt}}{D_{nn}} \quad (3.74)$$

Kayma etkisinin ihmal edildiği durumda,

$$\Omega_n = -\frac{1}{R} \frac{dU_b}{d\phi} \quad (3.75a)$$

$$\Omega_t = \frac{1}{R} \left[\frac{D}{1+D} \frac{d^4 U_b}{d\phi^4} + \frac{2D+1}{1+D} \frac{d^2 U_b}{d\phi^2} \right] \quad (3.75b)$$

$$T_b = \frac{D_{tt}}{R^3} \left[\frac{d^5 U_b}{d\phi^5} + 2 \frac{d^3 U_b}{d\phi^3} + \frac{dU_b}{d\phi} \right] \quad (3.75c)$$

$$M_n = \frac{D}{1+D} \frac{D_{nn}}{R^2} \left[\frac{d^4 U_b}{d\phi^4} + \frac{d^2 U_b}{d\phi^2} \right] \quad (3.75d)$$

$$M_t = \frac{D_{tt}}{R^2} \left[\frac{D}{1+D} \frac{d^5 U_b}{d\phi^5} + \frac{2D+1}{1+D} \frac{d^3 U_b}{d\phi^3} + \frac{dU_b}{d\phi} \right] \quad (3.75e)$$

Kayma etkisinin dâhil edildiği durumda,

$$\begin{aligned} \Omega_n = & \frac{1}{R} \left[\frac{D}{1+D} \frac{d^5 U_b}{d\phi^5} + \frac{2D+1}{1+D} \frac{d^3 U_b}{d\phi^3} \right] \\ & - \frac{R C_{bb}}{R^2 C_{bb} + D_{tt}} \left[\left(\frac{D}{1+D} - \frac{D_{tt} D_{nn}}{R^2 C_{bb} (D_{nn} + D_{tt})} \right) \frac{d^5 U_b}{d\phi^5} + \left(\frac{2D+1}{1+D} - \frac{D_{tt} D_{nn}}{R^2 C_{bb} (D_{nn} + D_{tt})} \right) \frac{d^3 U_b}{d\phi^3} + \frac{dU_b}{d\phi} \right] \end{aligned} \quad (3.76a)$$

$$\Omega_t = \frac{1}{R} \left[\frac{D}{1+D} \frac{d^4 U_b}{d\phi^4} + \frac{2D+1}{1+D} \frac{d^2 U_b}{d\phi^2} \right] \quad (3.76b)$$

$$T_b = \frac{D_{nn}}{R^3} \frac{D}{1+D} \left[\frac{d^5 U_b}{d\phi^5} + \frac{d^3 U_b}{d\phi^3} \right] + \frac{D_{tt} C_{bb}}{R^3 C_{bb} + R D_{tt}} \left[\left(\frac{D}{1+D} - \frac{D_{tt} D_{nn}}{R^2 C_{bb} (D_{nn} + D_{tt})} \right) \frac{d^5 U_b}{d\phi^5} + \left(\frac{2D+1}{1+D} - \frac{D_{tt} D_{nn}}{R^2 C_{bb} (D_{nn} + D_{tt})} \right) \frac{d^3 U_b}{d\phi^3} + \frac{dU_b}{d\phi} \right] \quad (3.76c)$$

$$M_n = \frac{D}{1+D} \frac{D_{nn}}{R^2} \left[\frac{d^4 U_b}{d\phi^4} + \frac{d^2 U_b}{d\phi^2} \right] \quad (3.76d)$$

$$M_t = \frac{D_{tt} C_{bb}}{R^2 C_{bb} + D_{tt}} \frac{dU_b}{d\phi} + \frac{D_{tt} C_{bb}}{R^2 C_{bb} + D_{tt}} \left[\left(\frac{D}{1+D} - \frac{D_{tt} D_{nn}}{R^2 C_{bb} (D_{nn} + D_{tt})} \right) \frac{d^5 U_b}{d\phi^5} + \left(\frac{2D+1}{1+D} - \frac{D_{tt} D_{nn}}{R^2 C_{bb} (D_{nn} + D_{tt})} \right) \frac{d^3 U_b}{d\phi^3} \right] \quad (3.76e)$$

olarak kayma deformasyon etkisi ihmal (3.75a – 3.75e) ve kayma deformasyon etkisi dâhil (3.76a – 3.76e) denklemleri bulunur. Aynı denklemleri yok etmeye devam edersek U_b nin sağlaması gereken diferansiyel denklemin homojen hali için,

$$\frac{d^6 U_b}{d\phi^6} + 2 \frac{d^4 U_b}{d\phi^4} + \frac{d^2 U_b}{d\phi^2} = 0 \quad (3.77)$$

elde edilerek problemin her iki yoldan da çözümü için gerekli denklemler elde edilmiş olur. Bu sabit katsayılı adi diferansiyel denklemi düzleminde yüklü durum için yapılan çözüm ile aynı elde edilir.

Böylece diferansiyel denklemin çözümü aşağıdaki gibi yazılabilir;

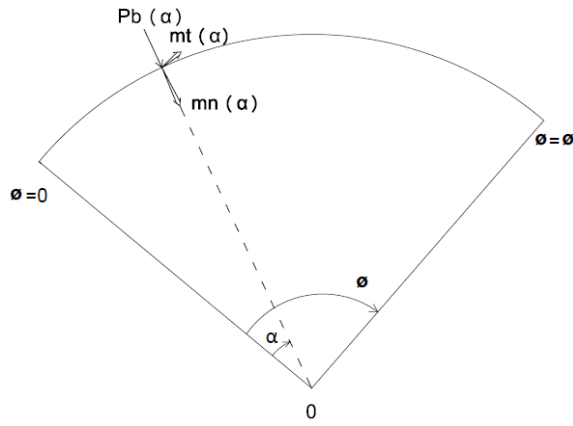
$$U_b = C_1 + C_2 \phi + C_3 \sin \phi + C_4 \cos \phi + C_5 \phi \sin \phi + C_6 \phi \cos \phi \quad (3.78)$$

Daha önce diğer 5 adet kesit büyüklükleri (3.75a-e – 3.76a-e) U_b cinsinden yazılmıştı. Yukarıda elde edilen U_b fonksiyonu denklemlerde (3.75a-e – 3.76a-e) yerine konarak diğer kesit büyüklükleri de elde edilmiş olunur.

Bu durumda (3.54) denkleminde $\phi = 0$ başlangıç kesitinden $\phi = \phi$ kesitindeki büyüklüklere geçişi sağlayan taşıma matrisi Ek 3, Ek 4’de verilmektedir. Taşıma matrisinin bulunması MATHEMATICA programlama diliyle hazırlanan program yardımıyla analitik olarak elde edilmiştir.

3.4.8. Düzlemine Dik Yüklü Halde Tekil Yük ve Moment Durumu

$\phi = \alpha$ gibi noktalarda dış tekil kuvvet veya moment olduğu durumda (Şekil 3.9) geçiş hesabı $\phi > \alpha$ için denklem (3.66) de verilmiştir.



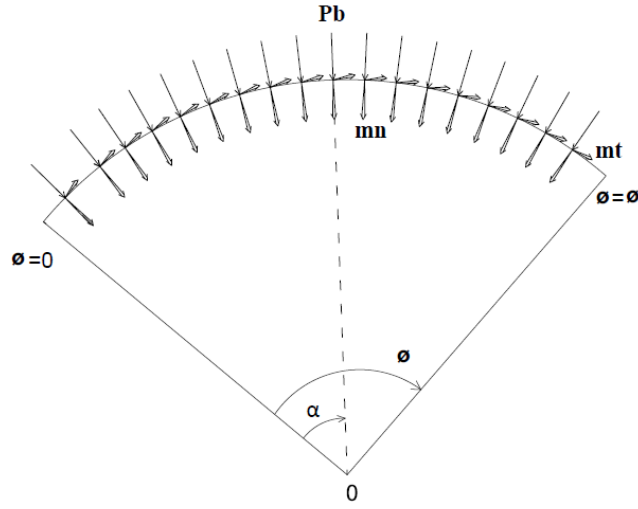
Şekil 3.9. Düzlemine dik yüklü hal için arada tekil yük ve moment olması durumu

Bu durumda $K(\alpha)$ ile gösterilen süreksizlik kolon matrisi,

$$K(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -P_b(\alpha) \\ -M_n(\alpha) \\ -M_t(\alpha) \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca dış kuvvetler birden fazla n kadar olması halinde denklem (3.68) şeklinde yazılır.

3.4.9. Düzlemine Dik Yüklü Halde Yayılı Yük Durumu



Şekil 3.10. Düzlemine dik yüklü hal için arada yayılı yük ve moment olması durumu

Eğer dış yükler sürekli yani yayılı olması durumu (Şekil 3.10) için (3.68) ifadesinde ikinci terimde toplam ifadesi yerine bir integral şeklini aldığı denklem (3.69) de ifade edilmişti.

Bu durumda $k(\alpha)$ ile gösterilen süreksizlik kolon matrisi,

$$k(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -p_b(\alpha) r \\ -m_n(\alpha) r \\ -m_t(\alpha) r \end{bmatrix} \quad (3.80)$$

şeklinde ifadesi elde edilmiş olur.

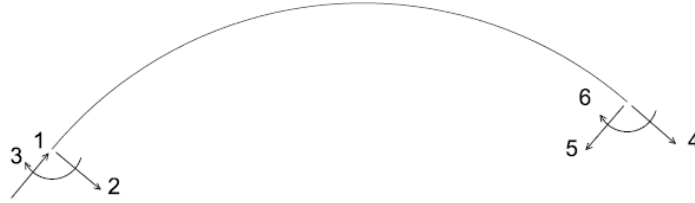
Her iki süreksizlik kolon matrisi ilk üç satırın sıfır olması $\phi = \alpha$ için U_b , Ω_n ve Ω_t değerlerinde süreksizlik olmadığı, diğer satırlar ise $\phi = \alpha$ başlangıç sayıldığı takdirde var olan değerleri ifade etmektedir. Bunların yönü Şekil 3.9' da görüldüğü gibi takımı yönü esas **t**, **n**, **b** alınmıştır.

3.5. Taşıma Matrisi Metoduna Dayalı Rijitlik Matrisi Yöntemi

Rijitlik matrisi yöntemi, deplasmanları bilinmeyen olarak çözüm için matris formülasyonu kullanır ve bu yöntemin matris notasyonu ile geliştirilmiş şeklidir. Bu tezde eğri eksenli çubukların eleman rijitlik matrisi elde etmek için Taşıma Matrisi Yöntemi kullanılacaktır. Taşıma Matrisi Yöntemi incelenirken kayma deformasyon etkileri dikkate alınacaktır. Ayrıca eleman rijitlik matrisi daire eksenli çubuklar için düzleminde ve düzlemine dik durumlar için ayrı ayrı ele alınacaktır.

3.5.1. İşaret Kabulü

Bunun için, söz konusu taşıyıcı elemanın, kabul edilen bütün serbestlik dereceleri birer okla ve okun başı, kabul edilen işaret kabulüne göre Şekil 3.11’de pozitif yönü göstermek üzere aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil 3.11. Çubuk elemanlar için işaret kabulü

3.5.2. Eleman Rijitlik Matrisinin Oluşturulması

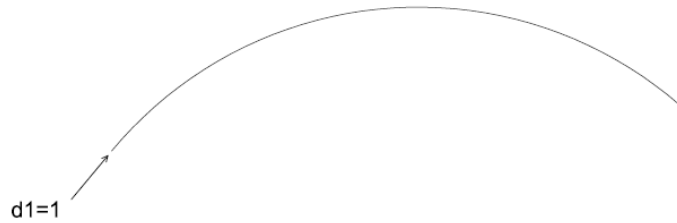
Elemana ait uç kuvvet, deplasman ilişkileri eleman üzerinde yerel koordinat takımında yazılır. Sistem deplasmanları ve kuvvetleri için taşıyıcı sistem için ortak bir koordinat takımının seçilmesi, her bir çubuk elemanı için elde edilmiş olan uç kuvvet, deplasman ilişkisinin bu ortak koordinat takımında yazılır. Problemin bilinmeyenleri olarak seçilen düğüm noktaları deplasmanları da bu ortak sistem koordinatları doğrultusunda alınır. Her düğüm noktasında uygunluk ve denge koşulları kullanılarak, bilinmeyen düğüm deplasmanları, sistemin düğüm noktalarına etkileyen ve bilinen kuvvetlerle ilişkilendirilmelidir.

Eleman rijitlik matrislerinin elde edilirken, bir düğüm noktasında birleşen çubuk uçlarının aynı deplasmanları yapacakları kabulü kullanılmıştır.

Dışarıdan etki eden bütün kuvvetlerin toplamının etkisi altında sistemin düğüm deplasmanları hesaplanır ve bu deplasmanlardan da dönüşüm formülü yardımıyla eleman koordinatlarında hesaplanır.

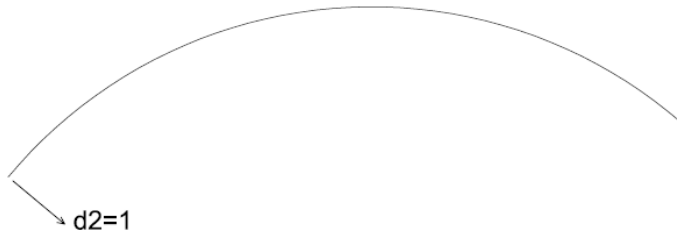
3.5.3. Düzleminde Yüklü Daire Eksenli Çubuklar

Aynı doğrultudaki deplasmana karşılık aynı doğrultudaki kuvvet ve kuvvet çifti gelecek şekilde düzenlemek gerekmektedir. Eğri eksenli çubuklar için 6x6'lık eleman rijitlik matrisi elde edilecektir. Eleman serbestlik derecelerinden birine bir, diğerine sıfır değeri verilerek (Şekil 3.12a-c) bulunur ve bu eleman rijitlik matrisinin ilk kolonunu oluşturmaktadır.

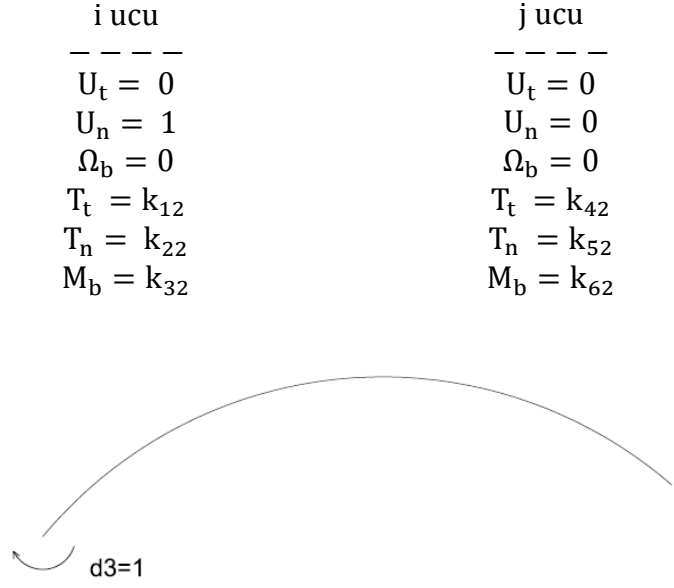


Şekil 3.12. a. Eleman koordinatında eleman uç deplasmanları birim yükleme

i ucu	j ucu
$U_t = 1$	$U_t = 0$
$U_n = 0$	$U_n = 0$
$\Omega_b = 0$	$\Omega_b = 0$
$T_t = k_{11}$	$T_t = k_{41}$
$T_n = k_{21}$	$T_n = k_{51}$
$M_b = k_{31}$	$M_b = k_{61}$



Şekil 3.12. b. Eleman koordinatında eleman uç deplasmanları birim yükleme



Şekil 3.12. c. Eleman koordinatında eleman uç deplasmanları birim yükleme

i ucu	j ucu
— — — —	— — — —
$U_t = 0$	$U_t = 0$
$U_n = 0$	$U_n = 0$
$\Omega_b = 1$	$\Omega_b = 0$
$T_t = k_{13}$	$T_t = k_{43}$
$T_n = k_{23}$	$T_n = k_{53}$
$M_b = k_{33}$	$M_b = k_{63}$

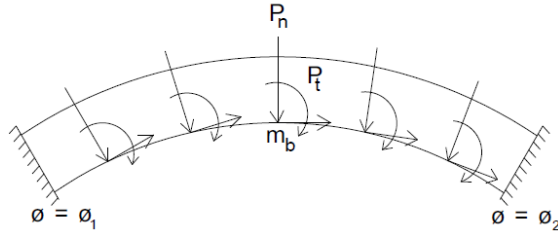
3.5.4. Düzlemine Dik Yüklü Daire Eksenli Çubuklar

Daha önceden düzleminde yüklü hal için yapılmış olan işlemler bu kısımda da tekrarlanır. Arada yük olmadığından taşıma matrisinde homojen çözüme ait olan, (3.54) denklemi kullanılarak k_{11} , k_{12} , ..., k_{66} ya kadar olan eleman uç kuvvetleri hesaplanır. Böylece eleman rijitlik matrisi tüm haliyle aşağıdaki gibi oluşturulur.

$$[k] = \begin{bmatrix} -k_{11} & -k_{12} & -k_{13} & -k_{14} & -k_{15} & -k_{16} \\ -k_{21} & -k_{22} & -k_{23} & -k_{24} & -k_{25} & -k_{26} \\ -k_{31} & -k_{32} & -k_{33} & -k_{34} & -k_{35} & -k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

3.5.5. Eleman Yük Vektörünün Bulunması

Daire eksenli çubuklar rijitlik matrisi yöntemi ile incelenirken sadece arada yayılı yük olması hali dikkate alınarak eleman yük vektörleri hesaplanmıştır. Arada tekil yük olması halinde ise; tekil yükün bulunduğu nokta yer düğüm noktası olarak hesaplara katılmıştır. Eleman rijitlik matrisinde olduğu gibi eleman yük vektörü de yine taşıma matrisi yönteminden hesaplanacaktır.



Şekil 3.13. Çubuk elemanın yük vektörünün bulunması

Arada yayılı yük veya moment olması durumunda (Şekil 3.13) taşıma matrisi yönteminde bu durum için geçerli olan,

$$S(\phi_2) = [F(\phi_2 - \phi_1)] S(\phi_1) + \int_{\phi_1}^{\phi_2} [F(\phi_2 - \alpha)] k(\alpha) d\alpha \quad (3.82)$$

Sınır şartları düzleminde yüklü durumda,

$$S(\phi_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ T_{ti} \\ T_{ni} \\ M_{bi} \end{bmatrix}_{\phi=\phi_1} \quad S(\phi_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ T_{tj} \\ T_{nj} \\ M_{bj} \end{bmatrix}_{\phi=\phi_2} \quad (3.83)$$

ve düzlemine dik yüklü durum için,

$$S(\phi_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ T_{bi} \\ M_{ni} \\ M_{ti} \end{bmatrix}_{\phi=\phi_1} \quad S(\phi_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ T_{bj} \\ M_{nj} \\ M_{tj} \end{bmatrix}_{\phi=\phi_2} \quad (3.84)$$

şeklinde elde edilir. Süreksizlik vektörleri ise düzleminde yüklü durum için,

$$k(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -p_t(\alpha) R \\ -p_n(\alpha) R \\ -m_b(\alpha) R \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

ve düzlemine dik yüklü durumda,

$$k(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -p_b(\alpha) R \\ -m_n(\alpha) R \\ -m_t(\alpha) R \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

ifadeleri bulunacaktır. Böylelikle eleman yük vektörü düzleminde yüklü durumda,

$$\{f\} = \begin{bmatrix} -T_{ti} \\ -T_{ni} \\ -M_{bi} \\ T_{tj} \\ T_{nj} \\ M_{bj} \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

ve düzlemine dik yüklü durumda,

$$\{f\} = \begin{bmatrix} -T_{bi} \\ -M_{ni} \\ -M_{ti} \\ T_{bj} \\ M_{nj} \\ M_{tj} \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

şeklinde ifade edilir.

3.5.6. Sistem Rijitlik Matrisi

Eleman rijitlik matrisinden kodlama tekniği kullanılarak sistem rijitlik matrisi elde edilmektedir. Sistem koordinatlarında verilen deplasmanlar eleman rijitlik denklemlerinde yerine yazılır. Daha sonra her eleman için yazılan uygunluk denklemleri, denge denklemlerinde yerine konularak, düğümlere etkiyen dış kuvvetler ve deplasmanlar sistem denge denklemleri elde edilir.

3.6. Daire Eksenli Çubukların Serbest Titreşim Analizi

Lineer bir sistemin hareket denklemi,

$$[M]\{\ddot{X}\} + [C]\{\dot{X}\} + [K]\{X\} = \{P(t)\} \quad (3.89)$$

şeklindedir. Burada $[M]$ sistem kütle matrisi, $[C]$ sistem sönüm matrisi, $[K]$ sistem rijitlik matrisi, $\{X\}$ sistem düğüm deplasmanları, $\{P(t)\}$ zamana bağlı dış yük vektörünü içeren matrislerdir. Eğer sistemde sönüm ve dış yük yoksa, $[C] = \{P\} = \{0\}$ olacağından lineer sistemin serbest titreşim denklemi,

$$[M]\{\ddot{X}\} + [K]\{X\} = \{0\} \quad (3.90)$$

halini alır. Lineer sistemin serbest titreşiminde tüm düğümler aynı ω açısal frekansı ile titreşeceğinden,

$$\{X_i\} = \{a_i\} \sin \omega_i t \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.91)$$

çözümü yapılabilir. Burada, $\{\mathbf{a}\}$ düğüm modlarını ifade etmektedir. Bu çözümün (3.90) ifadesinde yerine konulması ile

$$([\mathbf{K}] - \omega_i^2 [\mathbf{M}]) \{\mathbf{a}\} = \{\mathbf{0}\} \quad (3.92)$$

biçiminde standart bir özdeğer problemi elde edilir. Bu denklemin aşıkâr olmayan çözümü için

$$|[\mathbf{K}] - \omega_i^2 [\mathbf{M}]| = 0 \quad (3.93)$$

olmalıdır. Burada, $\lambda_i = \omega_i^2$, problemin özdeğerleri denilmektedir.

3.6.1. Kütle Matrisi

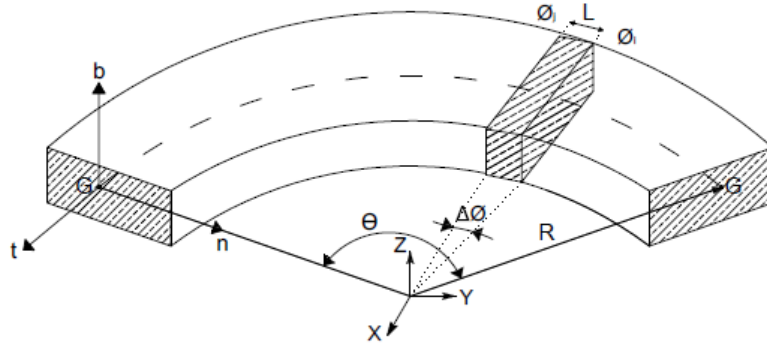
Daire eksenli çubukların rijitlik matrisinin elde edilmesi hakkında bilgi ayrıntılı bir şekilde verilmişti. Kütle matrisini elde etmek için daire eksenli çubuk doğru eksenli çubukların birleştirilmesi ile modellenmiştir (Şekil 3.14). Kütle matrisi ise, doğru eksenli elemana ait tutarlı kütle matrisini kullanılarak oluşturulmuştur. Doğru eksenli çubuklar için eleman kütle matrisi, düzleminde yüklü halde,

$$[\mathbf{m}] = \frac{\rho A L}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22 L & 0 & 54 & -13 L \\ 0 & 22 L & 4 L^2 & 0 & 13 L & -3 L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13 L & 0 & 156 & -22 L \\ 0 & -13 L & -3 L^2 & 0 & -22 L & 4 L^2 \end{bmatrix} \quad (3.94a)$$

ve düzlemine dik yüklü halde,

$$[\mathbf{m}] = \frac{\rho A L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & -22 L & 54 & 0 & 13 L \\ 0 & 140 I_p/A & 0 & 0 & 70 I_p/A & 0 \\ -22 L & 0 & 4 L^2 & -13 L & 0 & -3 L^2 \\ 54 & 0 & -13 L & 156 & 0 & 22 L \\ 0 & 70 I_p/A & 0 & 0 & 140 I_p/A & 0 \\ 13 L & 0 & -3 L^2 & 22 L & 0 & 4 L^2 \end{bmatrix} \quad (3.94b)$$

şeklindedir. Burada, ρ kütleli yoğunluk, A kesit alanı, L çubuk elemanın boyunu, I_p polar atalet momentini göstermektedir.



Şekil 3.14. Daire eksenli çubuk geometrisi

Daire eksenli çubuğu teşkil etmek amacı ile kullanılan doğru eksenli çubuğun uzunluğu aşağıdaki ifadeler yardımı ile hesaplanmaktadır (Şekil 3.14).

$$L = R(\Delta\phi) \quad (3.95a)$$

$$\Delta\phi = \Theta_j - \Theta_i \quad (3.95b)$$

Eleman koordinatlarında elde edilen rijitlik ve kütle matrisleri aşağıda verilen ifade yardımı ile

$$[k]_{XYZ} = [T]^T [k] [T] \quad (3.96)$$

$$[m]_{XYZ} = [T]^T [m] [T] \quad (3.97)$$

ortak takıma (X, Y, Z) dönüştürülmektedir. Dönüşüm matrisi ise düzleminde ve düzlemine dik halde ayrı ayrı verilmiştir. Düzleminde yüklü hal için,

$$[T] = \begin{bmatrix} -\sin[\phi_1] & \cos[\phi_1] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos[\phi_1] & -\sin[\phi_1] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin[\phi_2] & \cos[\phi_2] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos[\phi_2] & -\sin[\phi_2] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.98a)$$

düzlemine dik yüklü hal için

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin[\phi_1] & \cos[\phi_1] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos[\phi_1] & -\sin[\phi_1] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin[\phi_2] & \cos[\phi_2] \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\cos[\phi_2] & -\sin[\phi_2] \end{bmatrix} \quad (3.98b)$$

dönüşüm matrisleri kullanılmaktadır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

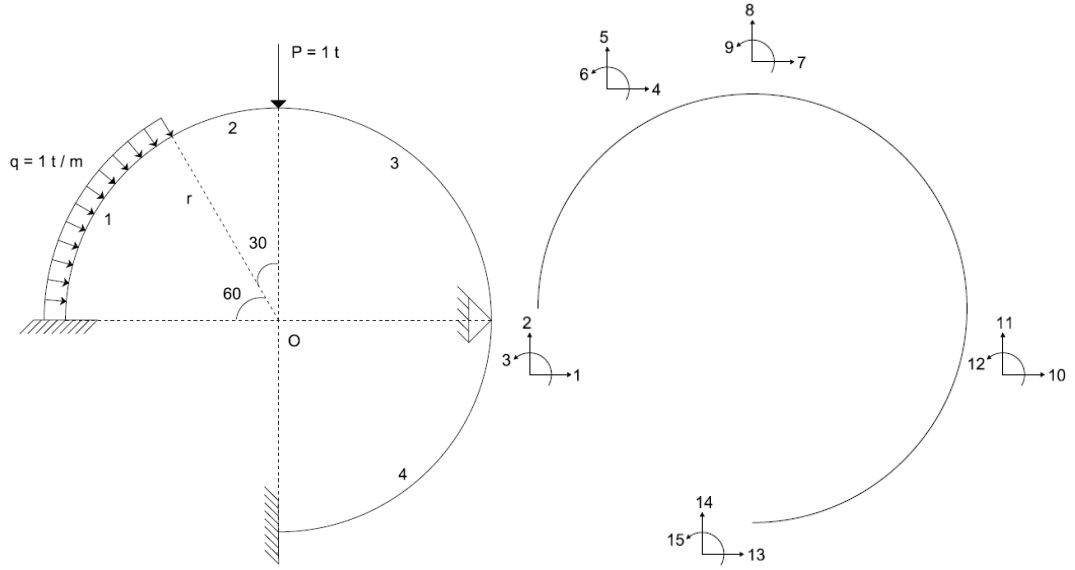
Bu bölümde, daire eksenli çubukların statik ve serbest titreşim analizi iki ana başlıkta ele alınacaktır. Daire eksenli çubukların statik ve serbest titreşim analizleri düzlemi içinde ve düzlemine dik yükleme durumları için de ayrı ayrı incelenecektir. Bu durumları içeren analizleri yapabilmek amacı ile genel amaçlı MATHEMATICA dilinde bilgisayar programları hazırlanmıştır. Sistem rijitlik matrisi ve sistem yük vektörleri rijitlik matrisi yöntemine dayalı taşıma matrisi yöntemi ile elde edilmektedir. Daire eksenli çubukların kütle matrisi ise doğru eksenli çubuklara ait eleman kütle matrisi yardımı ile oluşturulmaktadır. Tüm örnekler sonlu elemanlar yöntemine dayalı ANSYS programı ile de çözülmektedir. ANSYS ile modelleme yaparken düzleminde yüklü durumda BEAM3 elemanı, düzlemine dik yükleme durumunda BEAM4 elemanı kullanılmıştır.

4.1. Statik Analiz

Bu bölümde düzleminde ve düzlemine dik yüklü daire eksenli çubukların statik analizini içeren dört farklı örnek ele alınacaktır. Daire eksenli çubukların kayma deformasyonu etkisi de araştırılmaktadır.

4.1.1. Örnek 1

Düzlemi içinde yüklü daire eksenli çubuk problemi göz önüne alınmaktadır (Şekil 4.1). Daire eksenli kirişe, $q_n = 1 \text{ t / m}$ yayılı ve $P = 1 \text{ t}$ şiddetinde tekil yük uygulanmıştır. Geometrik ve malzeme özellikleri, atalet momenti $I_n = 1/12 \text{ m}^4$, yarıçap $R = 10 \text{ m}$, elastisite modülü $E = 1 \times 10^6 \text{ t/m}^2$, Poisson oranı $\nu = 0.3$ olarak verilmiştir. Probleme ait sonuçlar Çizelge 1’de verilmektedir. Eksenel ve kayma deformasyon etkileri dikkate alınarak ANSYS programı ile farklı eleman sayıları için çözümler yapılmış ve elde edilen daire eksenli çubuğa ait kesit tesirleri Çizelge 1’de verilmektedir.



Şekil 4.1. İki ucu ankastre daire eksenli kiriş ve kodlama durumu

Çizelge 1. Örnek 1 için sayısal sonuçlar

Eleman No	Kesit Tesirleri	Bayhan (1993)	Çalım (1996)	ANSYS (36 el.)	ANSYS (72 el.)	ANSYS (144 el.)	ANSYS (270 el.)	Bu Çalışma (Kayma Etkili)	Bu Çalışma (Kayma Etkisiz)
1	T_{ti} (t)	4.318	4.318	3.903	4.113	4.216	4.264	4.318	4.323
	T_{ni} (tm)	-6.203	-6.203	-6.472	-6.341	-6.273	-6.241	-6.203	-6.184
	M_{bi} (tm)	-19.052	-19.050	-19.08	-19.06	-19.051	-19.050	-19.052	-18.945
	T_{tj} (t)	-1.787	-1.787	-1.664	-1.726	-1.757	-1.770	-1.787	-1.806
	T_{nj} (tm)	-1.819	-1.819	-1.932	-1.877	-1.848	-1.835	-1.819	-1.825
	M_{bj} (tm)	-6.262	-6.262	-6.228	-6.253	-6.259	-6.261	-6.262	-6.218
2	T_{ti} (t)	1.787	1.787	1.902	1.846	1.817	1.803	1.787	1.806
	T_{ni} (tm)	1.819	1.819	1.699	1.76	1.790	1.804	1.819	1.825
	M_{bi} (tm)	6.262	6.262	6.228	6.253	6.259	6.261	6.262	6.218
	T_{tj} (t)	-2.457	-2.457	-2.407	-2.434	-2.446	-2.450	-2.457	-2.477
	T_{nj} (tm)	-0.682	-0.682	-0.842	-0.762	-0.722	-0.703	-0.682	-0.678
	M_{bj} (tm)	0.438	0.438	0.475	0.449	0.443	0.441	0.438	0.488

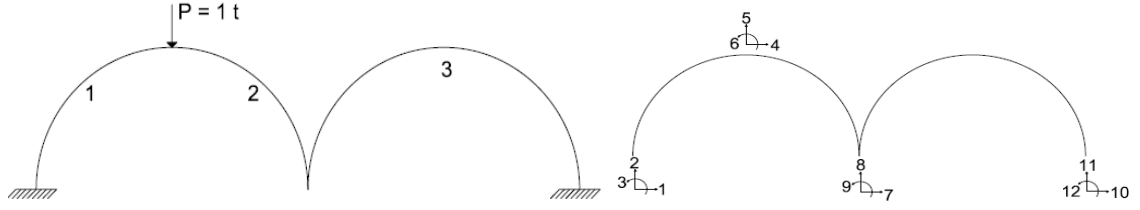
Çizelge 1. (Devam) Örnek 1 için sayısal sonuçlar

Eleman No	Kesit Tesirleri	Bayhan (1993)	Çalım (1996)	ANSYS (36 el.)	ANSYS (72 el.)	ANSYS (144 el.)	ANSYS (270 el.)	Bu Çalışma (Kayma Etkili)	Bu Çalışma (Kayma Etkisiz)
3	Tt _i (t)	2.457	2.457	2.562	2.511	2.484	2.470	2.457	2.477
	Tn _i (tm)	1.682	1.682	1.518	1.601	1.642	1.661	1.682	1.678
	Mb _i (tm)	-0.438	-0.438	-0.475	-0.449	-0.443	-0.442	-0.438	-0.488
	Tt _j (t)	-1.682	-1.682	-1.839	-1.762	-1.722	-1.703	-1.682	-1.678
	Tn _j (tm)	2.457	2.457	2.342	2.40	2.429	2.442	2.457	2.477
	Mb _j (tm)	-7.177	-7.316	-7.272	-7.301	-7.309	-7.310	-7.316	-7.505
4	Tt _i (t)	1.174	1.174	1.267	1.2199	1.194	1.182	1.174	1.304
	Tn _i (tm)	1.675	1.675	1.584	1.629	1.650	1.660	1.675	1.786
	Mb _i (tm)	7.316	7.316	7.272	7.301	7.309	7.310	7.316	7.505
	Tt _j (t)	-1.675	-1.675	-1.736	-1.706	-1.688	-1.680	-1.675	-1.786
	Tn _j (tm)	1.174	1.174	1.05	1.111	1.1398	1.153	1.174	1.304
	Mb _j (tm)	-2.309	-2.309	-2.24	-2.278	-2.287	-2.289	-2.309	-2.688

Bu çalışmada bulunan sonuçların, literatür ve ANSYS sonuçları ile uyum içinde olduğu görülmektedir. Çizelge 1 incelendiğinde, sonlu elemanlar yöntemine dayalı ANSYS programı ile yüzlerce eleman alınması halinde ancak istenilen hassasiyette sonuçlar elde edilebilmiştir. Kayma deformasyon etkisinin sonuçları çok etkilemediği görülebilmektedir.

4.1.2. Örnek 2

Düzlemi içinde yüklü iki yarım daireden oluşan iki ucu ankastre daire eksenli çubuk problemi ele alınmaktadır (Şekil 4.2). Daire eksenli kirişe, $P = 1$ t şiddetinde tekil yük uygulanmıştır. Geometrik ve malzeme özellikleri, atalet momenti $I_n = 1/12$ m⁴, yarıçap $R = 10$ m, elastisite modülü $E = 1 \times 10^6$ t/m², Poisson oranı $\nu = 0.3$ olarak alınmıştır. Probleme ait sonuçlar Çizelge 2’de verilmektedir. Sonlu elemanlar yöntemine dayalı ANSYS programı ile farklı eleman sayılarını içeren çözümler yapılmıştır.



Şekil 4.2. İki yarım daireden oluşan daire kiriş ve kodlama durumu

Çizelge 2. Örnek 2 için sayısal sonuçlar

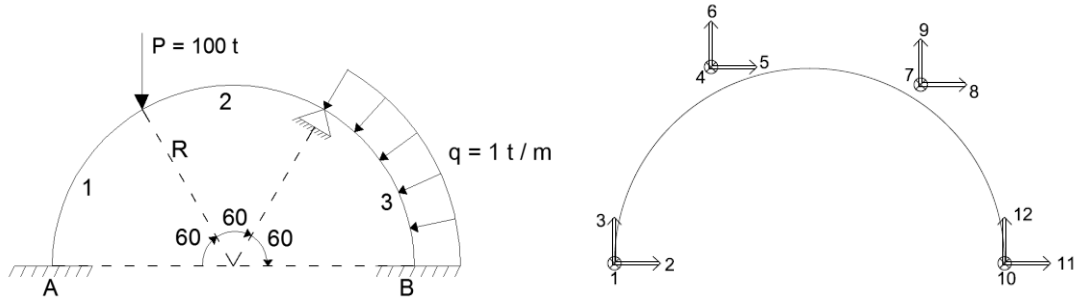
Eleman No	Kesit Tesirleri	Bayhan (1993)	Çalım (1996)	ANSYS (40 el.)	ANSYS (80 el.)	ANSYS (120 el.)	ANSYS (240 el.)	Bu Çalışma (Kayma Etkili)	Bu Çalışma (Kayma Etkisiz)
1	Ti (t)	0.811	0.811	0.826	0.819	0.816	0.813	0.811	0.811
	Tni (tm)	0.227	0.230	0.165	0.197	0.208	0.219	0.227	0.230
	Mbi (tm)	-3.173	-3.158	-3.172	-3.162	-3.161	-3.159	-3.173	-3.158
	Ttj (t)	-0.227	-0.230	-0.292	-0.261	-0.251	-0.240	-0.227	-0.230
	Tnj (tm)	0.811	0.811	0.79	0.801	0.804	0.808	0.811	0.811
	Mbj (tm)	-2.661	-2.652	-2.643	-2.65	-2.651	-2.652	-2.661	-2.652
2	Ti (t)	0.227	0.230	0.243	0.237	0.234	0.232	0.227	0.230
	Tni (tm)	0.189	0.189	0.171	0.180	0.183	0.187	0.189	0.189
	Mbi (tm)	2.661	2.652	2.643	2.65	2.651	2.652	2.661	2.652
	Ttj (t)	-0.189	-0.189	-0.207	-0.198	-0.195	-0.192	-0.189	-0.189
	Tnj (tm)	0.227	0.230	0.214	0.222	0.225	0.227	0.227	0.230
	Mbj (tm)	-3.037	-3.053	-3.046	-3.05	-3.05	-3.05	-3.037	-3.053
3	Ti (t)	-0.189	-0.189	-0.171	-0.180	-0.183	-0.187	-0.189	-0.189
	Tni (tm)	0.227	0.230	0.244	0.237	0.235	0.227	0.227	0.230
	Mbi (tm)	3.037	3.053	3.046	3.05	3.05	3.05	3.037	3.053
	Ttj (t)	-0.189	-0.189	-0.207	-0.198	-0.195	-0.192	-0.189	-0.189
	Tnj (tm)	0.227	0.230	0.214	0.222	0.225	0.227	0.227	0.230
	Mbj (tm)	0.753	0.736	0.737	0.737	0.737	0.737	0.753	0.736

Bu çalışmada bulunan sonuçların, literatür ve ANSYS sonuçları ile uyum içinde olduğu görülmektedir. Çizelge 2 incelendiğinde, sonlu elemanlar yöntemine dayalı ANSYS programı ile yüzlerce eleman alınması halinde ancak istenilen hassasiyette

sonuçlar elde edilebilmiştir. Kayma deformasyonunun çok sınırlı etkisi olduğu görülmektedir.

4.1.3. Örnek 3

Düzlemine dik yüklü daire eksenli çubuk problemi göz önüne alınmaktadır (Şekil 4.3). Daire eksenli kirişe, $q_b = 1 \text{ t / m}$ yayılı ve $P = 1 \text{ t}$ şiddetinde tekil yük uygulanmıştır. Geometrik ve malzeme özellikleri, atalet momentleri $I_n = 1/12 \text{ m}^4$, $J = 0.208 \text{ m}^4$ yarıçap $R = 10 \text{ m}$, elastisite modülü $E = 1 \times 10^6 \text{ t/m}^2$, Poisson oranı $\nu = 0.3$ olarak verilmiştir. Probleme ait sonuçlar Çizelge 3’de verilmektedir. Eksenel ve kayma deformasyon etkileri dikkate alınarak ANSYS programı ile farklı eleman sayıları için çözümler yapılmış ve elde edilen daire eksenli çubuğa ait kesit tesirleri Çizelge 3’de verilmektedir.



Şekil 4.3. Yarım daireden oluşan daire eksenli kiriş ve kodlama durumu

Çizelge 3. Örnek 3 için sayısal sonuçlar

Eleman No	Kesit Tesirleri	Bayhan (1993)	Çalım (1996)	ANSYS (30 el.)	ANSYS (90 el.)	ANSYS (180 el.)	ANSYS (360 el.)	Bu Çalışma (Kayma Etkili)	Bu Çalışma (Kayma Etkisiz)
1	Tbi (t)	-59.595	-59.584	-59.625	-59.598	-59.595	-59.596	-59.595	-59.596
	Mni (tm)	387.815	387.433	390.95	388.90	388.35	388.07	387.815	387.520
	Mti (tm)	-65.538	-65.470	-45.536	-58.823	-62.183	-63.869	-65.538	-65.808
	Tbj (t)	59.595	59.584	59.629	59.598	59.595	59.596	59.595	59.596
	Mnj (tm)	265.441	265.362	264.67	265.29	265.38	265.44	265.441	265.363
	Mtj (tm)	-5.115	-4.740	-18.808	-9.693	-7.390	-6.235	-5.115	-4.719

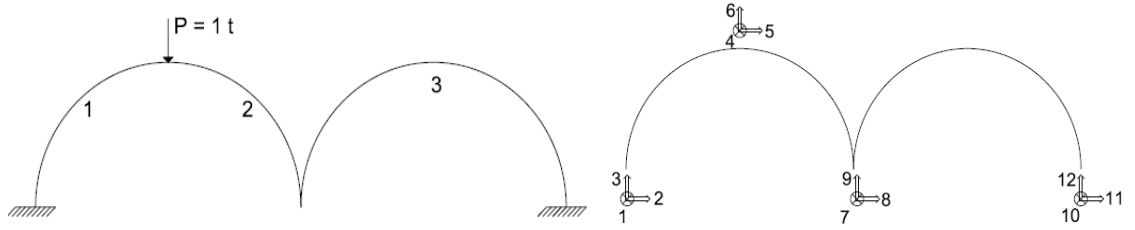
Çizelge 3. (Devam) Örnek 3 için sayısal sonuçlar

Eleman No	Kesit Tesirleri	Bayhan (1993)	Çalım (1996)	ANSYS (30 el.)	ANSYS (90 el.)	ANSYS (180 el.)	ANSYS (360 el.)	Bu Çalışma (Kayma Etkili)	Bu Çalışma (Kayma Etkisiz)
2	Tbi (t)	40.405	40.416	40.371	40.402	40.405	40.404	40.405	40.404
	Mni (tm)	-265.441	-265.362	-265.18	-265.47	-265.47	-265.45	-265.441	-265.363
	Mti (tm)	5.115	4.470	8.961	0.428	2.757	3.918	5.115	4.719
	Tbj (t)	-40.405	-40.416	-40.371	-40.402	-40.405	-40.404	-40.405	-40.404
	Mnj (tm)	-212.770	-213.060	211.09	212.32	212.57	212.69	-212.770	-213.143
	Mtj (tm)	25.650	25.447	36.523	29.031	27.168	26.237	25.295	25.430
3	Tbi (t)	-34.414	-34.614	-34.432	-34.435	-34.436	-34.436	-34.414	-34.654
	Mni (tm)	212.770	213.060	213.75	213.21	213.02	212.91	212.770	213.143
	Mti (tm)	-25.295	-25.447	-14.258	-21.604	-23.454	-24.380	-25.295	-25.430
	Tbj (t)	23.942	24.138	23.965	23.964	23.964	23.964	23.942	24.182
	Mnj (tm)	119.746	121.301	118.81	119.58	119.74	119.82	119.746	121.518
	Mtj (tm)	-17.662	-16.791	-23.777	-19.664	-18.624	-18.102	-17.662	-16.719

Bu çalışmada bulunan sonuçların, literatür ve ANSYS sonuçları ile uyum içinde olduğu görülmektedir. Çizelge 3 incelendiğinde, sonlu elemanlar yöntemine dayalı ANSYS programı ile yüzlerce eleman alınması halinde ancak istenilen hassasiyette sonuçlar elde edilebilmiştir. Kayma deformasyon etkisinin sonuçları çok etkilemediği görülebilmektedir.

4.1.4. Örnek 4

İki yarım daireden oluşan iki ucu ankastre düzlemine dik yüklü daire eksenli çubuk problemi ele alınmaktadır (Şekil 4.4). Daire eksenli kirişe, $P = 1$ t şiddetinde tekil yük uygulanmıştır. Geometrik ve malzeme özellikleri, atalet momentleri $I_n = 1/12$ m⁴, $J = 0.208$ m⁴ yarıçap $R = 10$ m, elastisite modülü $E = 1 \times 10^6$ t/m², Poisson oranı $\nu = 0.3$ olarak verilmiştir. Probleme ait sonuçlar Çizelge 4’de verilmektedir. Eksenel ve kayma deformasyon etkileri dikkate alınarak ANSYS programı ile farklı eleman sayıları için çözümler yapılmış ve elde edilen daire eksenli çubuğa ait kesit tesirleri Çizelge 4’de verilmektedir.



Şekil 4.4. İki yarım daireden oluşan daire eksenli kiriş ve kodlama durumu

Çizelge 4. Örnek 4 için sayısal sonuçlar

Eleman No	Kesit Tesirleri	Bayhan (1993)	Çalım (1996)	ANSYS (40)	ANSYS (120)	ANSYS (240)	ANSYS (360)	Bu Çalışma (Kayma Etkili)	Bu Çalışma (Kayma Etkisiz)
1	Tbi (t)	-0.807	-0.807	-0.807	-0.807	-0.807	-0.807	-0.807	-0.807
	Mni (tm)	7.869	7.869	8.203	7.985	7.928	7.908	7.869	7.869
	Mti (tm)	-4.543	-4.545	-3.922	4.337	4.441	4.475	-4.544	-4.545
	Tbj (t)	0.807	0.807	0.807	0.807	0.807	0.807	0.807	0.807
	Mnj (tm)	3.524	3.523	3.522	3.527	3.526	3.525	3.524	3.523
	Mtj (tm)	0.199	0.199	0.076	0.107	0.153	0.168	0.199	0.199
2	Tbi (t)	0.193	0.193	0.193	0.193	0.193	0.193	0.193	0.193
	Mni (tm)	-3.524	-3.523	-3.491	3.517	3.521	3.522	-3.524	-3.523
	Mti (tm)	-0.199	-0.199	-0.476	0.291	0.245	0.23	-0.199	-0.199
	Tbj (t)	-0.193	-0.193	-0.193	-0.193	-0.193	-0.193	-0.193	-0.193
	Mnj (tm)	-2.131	-2.131	-1.999	-2.089	-2.11	-2.117	-2.131	-2.131
	Mtj (tm)	1.592	1.592	1.750	1.646	1.619	1.61	1.592	1.592
3	Tbi (t)	0.193	0.193	0.193	0.193	0.193	0.193	0.193	0.193
	Mni (tm)	-2.131	-2.131	-2.248	-2.172	-2.152	-2.145	-2.131	-2.131
	Mti (tm)	1.592	1.592	1.416	1.535	1.563	1.573	1.592	1.592
	Tbj (t)	-0.193	-0.193	-0.193	0.193	0.193	0.193	-0.193	-0.193
	Mnj (tm)	-2.131	-2.131	-2.302	-2.189	-2.161	-2.151	-2.131	-2.131
	Mtj (tm)	-2.273	-2.272	-2.096	-2.216	-2.245	-2.254	-2.273	-2.272

Bu çalışmada bulunan sonuçların, literatür ve ANSYS sonuçları ile uyum içinde olduğu görülmektedir. Çizelge 4 incelendiğinde, sonlu elemanlar yöntemine dayalı ANSYS programı ile yüzlerce eleman alınması halinde ancak istenilen hassasiyette sonuçlar elde edilebilmiştir. Kayma deformasyon etkisinin sonuçları çok etkilemediği görülebilmektedir.

4.2. Serbest Titreşim Analizi

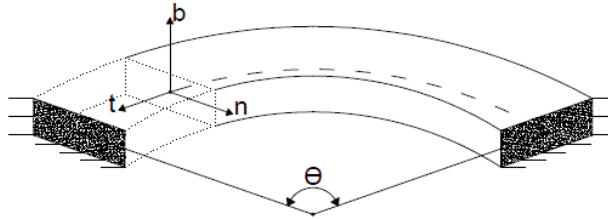
Daire eksenli çubukların serbest titreşim analizi incelenecektir. Yöntemin geçerliliğini test etmek amacı ile literatürdeki mevcut örnek ve farklı parametrik durumları incelenmiştir. Serbest titreşim frekansları, (4.1) ifadesi yardımı ile boyutsuz hale getirilmektedir.

$$\bar{\omega} = \omega R^2 \sqrt{\frac{\rho A}{E I}} \quad (4.1)$$

Burada, ρ kütleel yoğunluk, ω açısal frekans, $\bar{\omega}$ ise boyutsuz frekanstır.

4.2.1. Örnek 5

Düzlemin içinde iki ucu ankastre daire eksenli çubuk problemi göz önüne alınmaktadır (Şekil 4.5). Daire eksenli çubuğun farklı merkez açılarını içeren ($\Theta = 30^\circ, 40^\circ, 60^\circ, 80^\circ, 100^\circ, 120^\circ, 140^\circ, 160^\circ$ ve 180°) boyutsuz halde ilk üç serbest titreşim frekansları hesaplanmıştır. Probleme ait boyutsuz serbest titreşim frekansları Çizelge 5’de verilmektedir.



Şekil 4.5. İki ucu ankastre daire eksenli çubuk

Çizelge 5. İki ucu ankastre daire eksenli çubuğun boyutsuz serbest titreşim frekansları

Θ	Mod	Tseng ve ark. (1997)	C&L (1995)	Tseng ve ark. (1997)	ANSYS	Bu Çalışma
30	1	222.37	-	-	221.02	221.31
	2	403.08	-	-	279.73	279.88
	3	-	-	-	464.09	465.05
40	1	123.98	-	-	123.54	123.64
	2	225.96	-	-	208.32	208.54
	3	-	-	-	338.37	338.55

Çizelge 5. (Devam) İki ucu ankastre daire eksenli çubuğun boyutsuz serbest titreşim frekansları

Θ	Mod	Tseng ve ark. (1997)	C&L (1995)	Tseng ve ark. (1997)	ANSYS	Bu Çalışma
60	1	53.740	-	-	53.653	53.673
	2	99.458	-	-	98.163	98.225
	3	-	-	-	178.58	178.77
80	1	29.218	-	-	29.191	29.196
	2	55.195	-	-	54.937	54.957
	3	-	-	-	99.450	99.512
100	1	17.926	17.915	17.925	17.915	17.918
	2	34.721	34.641	34.675	34.641	34.650
	3	-	62.786	62.878	62.784	62.810
120	1	11.848	-	-	11.843	11.844
	2	23.613	-	-	23.582	23.586
	3	-	-	-	42.890	42.902
140	1	8.232	-	-	8.229	8.230
	2	16.929	-	-	16.913	16.917
	3	-	-	-	30.926	30.932
160	1	5.927	-	-	5.926	5.927
	2	12.604	-	-	12.597	12.598
	3	-	-	-	23.191	23.194
180	1	4.384	-	-	4.384	4.384
	2	9.652	-	-	9.648	9.649
	3	-	-	-	17.913	17.915

Bu çalışmada elde edilen sonuçların, literatürde farklı yöntemlerle elde edilen sonuçlar ve ANSYS sonuçları ile uyumlu oldukları görülmektedir. Çizelge 5 incelendiğinde, daire eksenli çubuğun açısı değeri arttıkça serbest titreşim frekansları azalmaktadır.

4.2.2. Örnek 6

Düzlemi içinde iki ucu sabit mesnetli daire eksenli çubuk problemi göz önüne alınmaktadır. Daire eksenli çubuğun farklı merkez açıları içeren ($\Theta = 30^\circ, 40^\circ, 60^\circ, 80^\circ, 100^\circ, 120^\circ, 140^\circ, 160^\circ$ ve 180°) boyutsuz halde ilk üç serbest titreşim frekansları hesaplanmıştır. Probleme ait boyutsuz serbest titreşim frekansları Çizelge 6'da verilmektedir.

Çizelge 6. İki ucu sabit mesnetli daire eksenli çubuğun boyutsuz serbest titreşim frekansları

Θ	Mod	Tseng ve ark. (1997)	ANSYS	Bu Çalışma
30	1	141.53	141.16	141.28
	2	305.68	268.97	269.17
	3	-	372.680	373.17
40	1	78.558	78.439	78.479
	2	171.16	167.27	167.40
	3	-	319.69	320.27
60	1	33.626	33.603	33.611
	2	75.081	74.743	74.770
	3	-	141.21	141.38
80	1	17.964	17.956	17.959
	2	41.468	41.396	41.405
	3	-	78.523	78.559
100	1	10.776	10.774	10.774
	2	25.925	25.903	25.905
	3	-	49.499	49.512
120	1	6.927	6.926	6.926
	2	17.496	17.489	17.489
	3	-	33.755	33.758
140	1	4.653	4.653	4.653
	2	12.429	12.427	12.426
	3	-	24.283	24.284
160	1	3.218	3.218	3.218
	2	9.155	9.154	9.153
	3	-	18.158	18.157
180	1	2.267	2.267	2.267
	2	6.923	6.924	6.923
	3	-	13.976	13.975

Bu çalışmada elde edilen sonuçların, literatürde farklı yöntemlerle elde edilen sonuçlar ve ANSYS sonuçları ile uyumlu oldukları görülmektedir. Çizelge 6 incelendiğinde, daire eksenli çubuğun açısı değeri arttıkça serbest titreşim frekansları azalmaktadır.

4.2.3. Örnek 7

Düzlemi içinde ve düzlemine dik iki ucu ankastre daire eksenli çubuk problemi göz önüne alınmaktadır. Daire eksenli kirişin merkez açısı (Θ) 60, 120 ve 180 derece

olarak alınmıştır. Geometrik ve malzeme özellikleri, kesit alanı $A = 4 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, elastisite modülü $E = 2.11 \times 10^{11} \text{ t/m}^2$, kütleli yoğunluğu $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$, Poisson oranı $\nu = 0.3$, $\alpha_n = \alpha_b = 1.1$ olarak verilmiştir. Problemin çözümünde iki farklı narinlik oranı (λ) kullanılmıştır. Probleme ait boyutsuz halde serbest titreşim frekansları düzlemi içinde hal için Çizelge 7’de ve düzlemine dik yüklü hal için Çizelge 8’de verilmektedir. Narinlik oranı aşağıdaki ifade yardımıyla hesaplanmaktadır.

$$\lambda = 2 \frac{D}{d} \quad (4.2)$$

Burada, d ve D sırasıyla, çubuk kesitinin çapı ile daire eksenli çubuğun çapını ifade etmektedir.

Çizelge 7. Boyutsuz serbest titreşim frekansları (Düzlemi içinde)

λ	Θ	Mod	İrie ve ark. (1983)	Yıldırım (1997)	ANSYS	Bu Çalışma
20	60	1	23.750	23.799	23.787	23.970
		2	39.050	39.144	39.125	39.711
		3	62.380	62.976	62.956	63.393
		4	70.710	71.042	71.018	72.994
	120	1	10.610	10.629	10.623	10.681
		2	15.190	15.194	15.187	15.259
		3	24.720	54.756	24.744	25.042
		4	30.470	30.598	30.589	30.906
	180	1	4.151	4.160	4.158	4.166
		2	8.542	8.546	8.541	8.584
		3	15.460	15.481	15.474	15.631
		4	17.910	17.921	17.915	17.997
100	60	1	52.820	52.830	52.789	52.923
		2	76.010	76.018	75.994	76.122
		3	117.90	117.92	117.86	118.30
		4	171.10	171.19	171.07	172.31
	120	1	11.790	11.791	11.783	11.795
		2	23.250	23.252	23.236	23.272
		3	42.370	42.376	42.346	42.447
		4	61.430	61.440	61.402	61.584
	180	1	4.374	4.375	4.372	4.375
		2	9.603	9.603	9.597	9.607
		3	17.810	17.810	17.799	17.823
		4	27.200	27.218	27.201	27.249

Çizelge 8. Boyutsuz serbest titreşim frekansları (Düzlemine dik)

λ	Θ	Mod	Irie ve ark. (1982)	Yıldırım (1997)	Howson ve ark. (1999)	Kang ve ark. (1995)	Tüfekçi ve ark. (2006)	ANSYS	Bu çalışma
20	60	1	16.880	16.744	16.743	16.744	16.744	16.874	16.832
		2	39.700	39.670	36.921	-	36.946	39.701	39.901
		3	40.900	40.350	40.449	-	40.451	40.913	41.04
	120	1	4.309	4.300	4.282	4.283	4.283	4.306	4.419
		2	11.790	11.738	11.690	-	11.691	11.788	11.991
		3	22.500	22.333	22.045	-	22.054	22.497	22.397
	180	1	1.791	1.789	1.776	1.777	1.777	1.789	1.862
		2	5.032	5.022	4.981	-	4.982	5.029	5.268
		3	10.230	10.194	10.133	-	10.134	10.225	10.489
100	60	1	19.450	19.450	19.401	19.402	19.402	19.438	19.693
		2	54.100	54.100	54.029	-	54.030	54.105	54.401
		3	105.690	105.690	105.650	-	105.648	105.776	105.685
	120	1	4.473	4.473	4.451	4.452	4.451	4.469	4.604
		2	12.890	12.888	12.826	-	12.826	12.881	13.239
		3	26.080	26.069	26.988	-	25.989	26.059	26.489
	180	1	1.818	1.818	1.804	1.805	1.804	1.817	1.894
		2	5.242	5.241	5.198	-	5.198	5.237	5.506
		3	10.990	10.987	10.917	-	10.918	10.980	11.374

Bu çalışmada elde edilen sonuçların, literatür ve ANSYS sonuçları ile uyumlu oldukları görülmektedir. Çizelge 7 ve Çizelge 8 incelendiğinde, daire eksenli çubuğun açı değeri arttıkça serbest titreşim frekansları azalmakta olup narinlik oranı arttıkça ise serbest titreşim frekansları artmaktadır.

4.2.4. Örnek 8

Düzlemine dik halde bir ucu ankastre diğer ucu serbest daire eksenli çubuk problemi göz önüne alınmaktadır. Daire eksenli çubuğun merkez açısı 180° olarak alınmıştır. Geometrik ve malzeme özellikleri, dairenin yarıçapı $R = 0.305$ m, kesit alanı $A = 1.1718 \times 10^{-4} \text{ m}^2$, elastisite modülü $E = 68.13 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, kütleli yoğunluk $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$, Poisson oranı $\nu = 0.33$, $\alpha_n = \alpha_b = 1.2$, atalet momentleri $I_t = 1.22 \times 10^{-9} \text{ m}^4$, $I_n = 3.4882 \times 10^{-9} \text{ m}^4$, $I_b = 3.75367 \times 10^{-9} \text{ m}^4$ olarak verilmiştir. Probleme ait ilk dört serbest titreşim frekansları Çizelge 9’de verilmektedir.

Çizelge 9. Serbest titreşim frekansları (rad/s)

Mod	Tabarrok ve ark. (1988)	Tabarrok ve ark. (Deneysel)	Yıldırım (1995)	Yıldırım (1997)	ANSYS	Bu Çalışma
1	59.60	56.00	54.77	54.80	54.938	54.950
2	-	-	262.63	263.93	267.42	267.49
3	-	-	946.32	953.24	963.34	963.53
4	-	-	2325.78	2341.78	2351.04	2351.17

Bu çalışmada elde edilen sonuçların, literatür ve ANSYS sonuçları ile uyumlu oldukları görülmektedir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, lineer elastik, homojen ve izotrop malzemeden yapılmış daire eksenli çubukların statik ve dinamik davranışları incelenmiştir. Timoshenko kiriş teorisi kullanılarak elde edilen uzaysal eğri eksenli çubukların statik davranışını idare eden denklemler daire eksenli çubuklar için tekrar düzenlenmiştir. Formülasyonda, eksenel ve kayma deformasyonu etkileri göz önüne alınmıştır. Uzaysal eğri eksenli çubukların statik davranışı için denge denklemleri, bünve denklemleri ve uygunluk şartlarından dört adet vektörel denklem elde edilmiştir. Bunlar, hareketli koordinat takımındaki bileşenlerine ayrıldığında birinci dereceden on iki diferansiyel denklem bulunmaktadır. Bunların altısı düzlemi içinde, altısı düzlemine dik olarak iki gruba ayrıldıkları görülmektedir.

Daire eksenli çubukların statik ve dinamik analizleri, rijitlik matrisi yöntemine dayalı taşıma matrisi ile çözülmüştür. Sistem rijitlik matrisi, daire eksenli çubuklara ait taşıma matrisi kullanılarak elde edilmiştir. Sistem kütle matrisi ise, doğru eksenli elemana ait tutarlı kütle matrisini kullanılarak oluşturulmuştur. Böylece, daire eksenli çubukların serbest titreşim frekansları, özdeğer problemi çözülerek elde edilmiştir.

Daire eksenli çubukların statik ve dinamik analizleri için düzleminde ve düzlemine dik yüklü literatürde mevcut örnekler ele alınmıştır. Ayrıca, sonlu elemanlar yöntemine dayalı ANSYS programı ile de çözülerek karşılaştırmalar yapılmıştır. Problem, ANSYS programında doğru eksenli çubuklarla oluşturulmaktadır. Statik analiz için problem 3-4 elemanla modellenirken ANSYS programında çok fazla sayıda elemanla modellenmiştir. İstenilen hassasiyette sonuç elde edebilmek için ANSYS programında yüzlerce elemanla modellemek gerekmiştir.

Dinamik analiz durumunda, kütle matrisi doğru eksenli çubuklar yardımı ile elde edilmesinden dolayı problem fazla sayıda elemanla tanımlamak daha uygun olmaktadır. Bu çalışmada elde edilen serbest titreşim frekansları, literatürde farklı yöntemlerle elde edilen sonuçlar ve ANSYS sonuçlarının uyumlu oldukları görülmektedir. Daire eksenli çubuğun merkez açısı arttıkça serbest titreşim frekansları azalmakta, narinlik oranı arttıkça serbest titreşim frekansları artmaktadır.

EK 1. Kayma etkisini içeren düzleminde yüklü hal için taşıma matrisinin sıfırdan farklı elemanları;

$$F_{11} = F_{22} = F_{44} = F_{55} = \text{Cos}[x]$$

$$F_{12} = -F_{21} = F_{45} = -F_{54} = \text{Sin}[x]$$

$$F_{13} = F_{64} = R - R \text{Cos}[x]$$

$$F_{14} = \frac{1}{2} R \left(\left(\frac{1}{C_{nn}} + \frac{1}{C_{tt}} \right) x \text{Cos}[x] + \left(-\frac{1}{C_{nn}} + \frac{1}{C_{tt}} \right) \text{Sin}[x] + \frac{R^2 (2x + x \text{Cos}[x] - 3 \text{Sin}[x])}{D_{bb}} \right)$$

$$F_{15} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{C_{nn}} + \frac{1}{C_{tt}} \right) R x \text{Sin}[x] + \frac{R^3 \left(-1 + \text{Cos}[x] + \frac{1}{2} x \text{Sin}[x] \right)}{D_{bb}}$$

$$F_{16} = F_{34} = \frac{R^2 (x - \text{Sin}[x])}{D_{bb}}$$

$$F_{23} = -F_{65} = R \text{Sin}[x]$$

$$F_{24} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{C_{nn}} + \frac{1}{C_{tt}} \right) R x \text{Sin}[x] - \frac{R^3 (-2 + 2 \text{Cos}[x] + x \text{Sin}[x])}{2 D_{bb}}$$

$$F_{25} = \frac{R \left((C_{tt} D_{bb} + C_{nn} (D_{bb} + C_{tt} R^2)) x \text{Cos}[x] - (C_{tt} D_{bb} + C_{nn} (D_{bb} + C_{tt} R^2)) \text{Sin}[x] \right)}{2 C_{nn} C_{tt} D_{bb}}$$

$$F_{26} = -F_{35} = -\frac{R^2 (-1 + \text{Cos}[x])}{D_{bb}}$$

$$F_{33} = F_{66} = 1$$

$$F_{36} = \frac{R x}{D_{bb}}$$

EK 2. Kayma etkisini içermeyen düzleminde yüklü hal için taşıma matrisinin sıfırdan farklı elemanları;

$$F_{11} = F_{22} = F_{44} = F_{55} = \text{Cos}[x]$$

$$F_{12} = -F_{21} = F_{45} = -F_{54} = \text{Sin}[x]$$

$$F_{13} = F_{64} = R - R \text{Cos}[x]$$

$$F_{14} = \frac{R^3(2x + x \text{Cos}[x] - 3 \text{Sin}[x])}{2 D_{bb}}$$

$$F_{15} = \frac{R^3(-2 + 2 \text{Cos}[x] + x \text{Sin}[x])}{2 D_{bb}}$$

$$F_{16} = F_{34} = \frac{R^2(x - \text{Sin}[x])}{D_{bb}}$$

$$F_{23} = -F_{65} = R \text{Sin}[x]$$

$$F_{24} = \frac{R^3(2 - 2 \text{Cos}[x] - x \text{Sin}[x])}{2 D_{bb}}$$

$$F_{25} = \frac{R^3(x \text{Cos}[x] - \text{Sin}[x])}{2 D_{bb}}$$

$$F_{26} = -F_{35} = -\frac{R^2(-1 + \text{Cos}[x])}{D_{bb}}$$

$$F_{33} = F_{66} = 1$$

$$F_{36} = \frac{R x}{D_{bb}}$$

EK 3. Kayma etkisini içeren düzlemine dik yüklü hal için taşıma matrisinin sıfırdan farklı elemanları;

$$F_{11} = F_{44} = 1$$

$$F_{12} = -F_{54} = -R \sin[x]$$

$$F_{13} = F_{64} = R - R \cos[x]$$

$$F_{14} = \frac{2 D_{nn} R (D_{tt} + C_{bb} R^2) x + C_{bb} (D_{nn} + D_{tt}) R^3 x \cos[x] - C_{bb} (3 D_{nn} + D_{tt}) R^3 \sin[x]}{2 C_{bb} D_{nn} D_{tt}}$$

$$F_{15} = -F_{24} = -\frac{R^2(-2 D_{nn} + 2 D_{nn} \cos[x] + (D_{nn} + D_{tt}) x \sin[x])}{2 D_{nn} D_{tt}}$$

$$F_{16} = F_{34} = -\frac{(D_{nn} + D_{tt}) R^2 (x \cos[x] - \sin[x])}{2 D_{nn} D_{tt}}$$

$$F_{22} = F_{33} = F_{55} = F_{66} = \cos[x]$$

$$-F_{23} = F_{32} = -F_{56} = F_{65} = \sin[x]$$

$$F_{25} = \frac{R ((D_{nn} + D_{tt}) x \cos[x] + (-D_{nn} + D_{tt}) \sin[x])}{2 D_{nn} D_{tt}}$$

$$F_{35} = -F_{26} = \frac{(D_{nn} + D_{tt}) R x \sin[x]}{2 D_{nn} D_{tt}}$$

$$F_{36} = \frac{R ((D_{nn} + D_{tt}) x \cos[x] + (D_{nn} - D_{tt}) \sin[x])}{2 D_{nn} D_{tt}}$$

EK 4. Kayma etkisini içermeyen düzlemine dik yüklü hal için taşıma matrisinin sıfırdan farklı elemanları;

$$D = D_{tt} / D_{nn};$$

$$F_{11} = F_{44} = 1$$

$$F_{12} = -F_{54} = -R \sin[x]$$

$$F_{13} = F_{64} = R - R \cos[x]$$

$$F_{14} = \frac{R^3 (2x + (1 + D)x \cos[x] - (3 + D)\sin[x])}{2 D_{tt}}$$

$$F_{15} = -F_{24} = -\frac{R^2 (-2 + 2 \cos[x] + (1 + D)x \sin[x])}{2 D D_{nn}}$$

$$F_{16} = F_{34} = -\frac{(1 + D) R^2 (x \cos[x] - \sin[x])}{2 D_{tt}}$$

$$F_{22} = F_{33} = F_{55} = F_{66} = \cos[x]$$

$$-F_{23} = F_{32} = -F_{56} = F_{65} = \sin[x]$$

$$F_{25} = \frac{R ((1 + D)x \cos[x] + (-1 + D)\sin[x])}{2 D D_{nn}}$$

$$F_{35} = -F_{26} = \frac{(1 + D) R x \sin[x]}{2 D D_{nn}}$$

$$F_{36} = \frac{R((1 + D)x \cos[x] - (-1 + D)\sin[x])}{2 D_{tt}}$$

KAYNAKLAR

- Aktan, H., 2008. Daire Eksenli Çubukların Düzlem İçi Dinamik Analizi. İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi
- Arıcı, M. and Granata, M. F., 2011. Generalized curved beam on elastic foundation solved by transfer matrix method. **Structural Engineering and Mechanics**, 2(40), pp. 279-295.
- Bayhan, S., 1993. Daire Eksenli Çubuklar Düzlemsel Çubukların Taşıma ve Rijitlik Matrisi Yöntemi ile Analizi. Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi
- Childamparam, P. and Leissa, A. W., 1995. Influence of centerline extensibility on the in-plane free vibrations of loaded circular arches. **Journal of Sound and Vibration**, 183, pp. 779-795.
- Çalım, F. F., 1996. Eğri Eksenli Çubuk Sistemler ve Silindirik Tonoz Yapıların Tamamlayıcı Fonksiyonlar Metodu ve Rijitlik Matrisi Yöntemi İle Statik Analizi. Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi
- Doğruer, O. Y., 2006. Eğri Eksenli Düzlemsel Çubukların Düzlem Dışı Statik ve Dinamik Problemlerinin Analitik Çözümü. İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora Tezi
- Eroğlu, U., 2014. Eğri Eksenli Çubukların Analizi İçin Analitik Çözümle Sonlu Eleman Formülasyonu. İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi
- Fang, Z., 1995. Dynamic Analysis of Structures with Uncertain Parameters Using the Transfer Matrix Method. **Computers & Structures**, 55(6), pp. 1037-1044.
- Haktanır, V. ve Kırıl, E., 1989. Helisel Çubukların Statik Davranışının Rijitlik Matrisi Metodu ile İncelenmesi. **Ç. Ü. Müh. Mim. Fak. Dergisi**, 1(4).
- Haktanır, V., 1990. Silindirik Helisel Çubukların Statik, Dinamik ve Burkulma Davranışlarının Taşıma ve Rijitlik Matrisleri Metodu İle İncelenmesi. Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Doktora Tezi
- Haktanır, V. ve Kırıl, E., 1990. Helisel Yaylarda Rijitlik Metodu ile Serbest Titreşim Frekanslarının Elde Edilmesi. Yalova-İstanbul, **4. Ulusal Makina Teorisi Sempozyumu**.

- Haktanır, V. and Kırıl, E., 1993. Statical Analysis of Elastically and Continuously Supported Helicoidal Structures by the Transfer and Stiffness Matrix Methods. **Computers & Structures**, 4(49), pp. 663-677.
- Howson, W. P. and Jemah, A. K., 1999. Exact out-of-plane natural frequencies of curved Timoshenko beams. **Journal of Engineering Mechanics**, 125, pp. 19-25.
- Irie, T., Yamada, G. and Tanaka K. J., 1983. Natural frequencies of in-plane vibration of arcs. **Journal of Applied Mechanics**, ASME, Des. Data Meth. 50, pp. 449-452.
- İnan, M., 1964. **Elastomekanikte Başlangıç Değerleri Metodu ve Taşıma Matrisi**. İstanbul, İTÜ Yayınları.
- İnan, M., 1966. **Elastik Çubukların Genel Teorisi**. İstanbul, Berksoy Matbaası.
- Kang, K., Bert, C. W. and Stritz, A. G., 1995. Vibration analysis of shear deformable circular arches by the differential quadrature method. **Journal of Sound and Vibration**, 181, pp. 353-360.
- Liu, G.R. and Wu, T.Y., 2001. In-plane vibration analyses of circular arches by the generalized differential quadrature rule. **International Journal of Mechanical Sciences**, Issue 43, pp. 2597-2611.
- Laman, M., 1990. Dairesel Silindirik Tonoz Çatıların Taşıma Matrisi Yöntemi İle Çözümü, Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi
- Şahin, R., 1998. Birbirine Eksenel Normal Kuvvet Alan Çubuklar ile Bağlı Düzlemsel iki Çubuğun Taşıma Matrisi ile Çözümü. İstanbul Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi
- Tabarrok, B., Sinclair, A. N., Farshad, M. and Yi, H., 1988. On the dynamics of spatially curved and twisted rods-a finite element formulation. **Journal of Sound and Vibration**, 123, pp. 315-326.
- Tseng, Y. P., Huang, C. S. and Lin, C. J., 1997. Dynamic stiffness analysis for in-plane vibrations of arches with variable curvature. **Journal of Sound and Vibration**, 1(207), pp. 15-31.
- Tüfekçi, E. and Doğruer, Y. O., 2006. Out-of-plane free vibration of a circular arch with uniform cross-section: Exact solution. **Journal of Sound and Vibration**, 291(3-5), pp. 525-538.

- Yıldırım, V., 1995. Helisel yayların serbest titreşiminin rijitlik matrisi metodu ile incelenmesi. **Türk Mühendislik ve Çevre Bilimleri Dergisi**, 19/4, 343-356.
- Yıldırım, V., 1997. A computer program for the free vibration analysis of elastic arcs. **Computers & Structures**, 3(62), pp. 475-485.
- Yıldırım, V., İnce, N. ve Kırıl, E., 1997. Doğru ve Daire Eksenli Elemanlardan Oluşan Bileşik Düzlem Çerçevelerin Statik Analizi. **Türk Mühendislik ve Çevre Bilimleri Dergisi**, 21, 137-148.

ÖZGEÇMİŞ

1990 yılında Afyon’da doğdu. İlkokul, ortaokul ve lise öğrenimini Afyon’da tamamladı. 2007 yılında başladığı Atatürk Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümünden 2011 yılında mezun oldu. 2013 yılında Mustafa Kemal Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü’nde Araştırma Görevlisi olarak işe başladı. Mustafa Kemal Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İnşaat Mühendisliği Anabilim Dalında halen Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktadır.