



T.C.
HATAY MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BAZI BİYOLOJİK MODELLEMELERDE FARK DENKLEMLERİNİN
KULLANIMI VE DENKLEMLERİN KARARLILIĞI**

Elmira ÇEVİK

ENFORMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HATAY
OCAK-2020



T.C.

HATAY MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BAZI BİYOLOJİK MODELLEMELERDE FARK DENKLEMLERİNİN
KULLANIMI VE DENKLEMLERİN KARARLILIĞI**

Elmira ÇEVİK

ENFORMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HATAY

OCAK-2020

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını ve tez üzerinde Yükseköğretim Kurulu tarafından hiçbir değişiklik yapılamayacağı için tezin bilgisayar ekranında görüntülendiğinde asıl nüsha ile aynı olması sorumluluğunun tarafıma ait olduğunu beyan ederim.

Elmira ÇEVİK



ÖZET

BAZI BİYOLOJİK MODELLEMELERDE FARK DENKLEMLERİNİN KULLANIMI VE DENKLEMLERİN KARARLILIĞI

Bu tezde diferansiyel denklemler ve fark denklemlerinin bazı biyolojik modellemelerde kullanılması ve kararlılıkları incelenmiştir.

Çalışma dört bölümden oluşmuştur. İlk bölümde genel tanımlara ve önceki çalışmalara değinilmiştir. İkinci bölümde temel tanım ve teoremler verilmiş, örneklerle desteklenmiştir. Üçüncü bölümde kararlılık teorisi, diferansiyel ve fark denklemlerinde kararlılık konuları yer almıştır. Dördüncü bölümde ise fark denklemlerinde de Wit modeline dayanan iki bitki türü rekabetinin kararlılık şartları belirlenmiş, diferansiyel denklemlerde ise sınırlı bir alanda bulunan ve yiyecek rekabeti olan iki tür için lojistik denklem yardımıyla matematiksel modelleme oluşturulması ve bazı sabitler için modelin kararlılık kriterleri incelenmiştir.

2020, 58 sayfa

Anahtar Kelimeler: Fark denklemleri, matematiksel biyoloji, kararlılık, diferansiyel denklemler, iki tür rekabeti

ABSTRACT

USE OF DIFFERENCE EQUATIONS AND STABILITY OF EQUATIONS IN SOME BIOLOGICAL MODELING

In this thesis, the use of differential equations and difference equations in some biological models and their stability are examined.

The study consists of four chapters. In the first part, general definitions and previous studies are mentioned. In the second chapter, basic definitions and theorems are given and supported with examples. In the third part, stability theory, stability of difference equations and stability of differential equations are given. In the fourth chapter, stability conditions of two plant species competitions based on de Wit model were determined in difference equations and in differential equations mathematical modeling was created for two species in a limited area with food competition and the stability criteria of the model for some constants were examined.

2020, 58 pages

Keywords: Difference equations, mathematical biology, stability, differential equations, competition of two species

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunun belirlenmesinde, araştırılması ve yazımı sırasında sahip olduğu bilgi birikimi ve tecrübesi ile çalışmayı yönlendiren ve her türlü yardımı esirgemeyen saygıdeğer danışman hocam Hakan YETİŞKİN'e sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmam süresince bana hep destek olan ve yardımlarını esirgemeyen aileme çok teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	I
ABSTRACT.....	II
TEŞEKKÜR.....	III
İÇİNDEKİLER.....	IV
ÇİZELGELER DİZİNİ	V
ŞEKİLLER DİZİNİ	VI
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....	2
3. MATERYAL VE YÖNTEM	4
3.1 Materyal	
3.1.1 Temel Kavramlar	4
3.1.1.1 Δ -E-I Operatörlerinin Tanımı	4
3.1.1.2 Δ Operatörünün Bazı Özellikleri.....	4
3.1.1.3 E Öteleme Operatörü Cinsinden k'ıncı Dereceden Polinomun Sonucu....	6
3.1.1.4 Δ^{-1} Ters Fark Operatörünün Tanımı ve İlgili Örnekler.....	6
3.2 Yöntem	
3.2.1 Fark Denklemleri.....	8
3.2.1.1 Temel Tanım ve Sonuçlar.....	8
3.2.1.2 I. Mertebeden Lineer Fark Denklemleri.....	10
3.2.1.3 İkinci Mertebeden Lineer Fark Denklemleri.....	12
3.2.1.4 k 'ıncı Mertebeden Lineer Fark Denklemleri.....	13
3.2.2 Diferansiyel Denklemler.....	14
3.2.2.1 I. Dereceden Lineer Diferansiyel Denklemler.....	16
3.2.2.2 İki ve Daha Yüksek Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemler.....	17
3.2.2.3 Sabit Katsayılı Lineer Homojen Diferansiyel Denklemler.....	17
3.2.3 Çözümlerin Davranışı ve Kararlılık Teorisi	20
3.2.3.1 Fark Denklemlerinde Kararlılık	21
3.2.3.1.1 Denge Noktası ve Kararlılık.....	21
3.2.3.1.2 Cobweb Şeması.....	24
3.2.3.1.3 Lineer Sistemlerin Kararlılığı.....	25
3.2.3.1.4 Lyapunov Doğrudan Yöntemi.....	31
3.2.3.2 Diferansiyel Denklemlerde Kararlılık.....	33
3.2.3.2.1 Birinci Dereceden Denklemlerde Yerel Kararlılık.....	35
3.2.3.2.2. Faz Düzlemi Analizi.....	36
3.2.3.2.3 Lyapunov Doğrudan Yöntemi.....	40
4.ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA	
4.1. Diferansiyel Denklemlerde İki Tür Rekabeti ve Kararlılık Analizini.....	43
4.2 Yıllık İki Bitki Türünde Fark Denklemleriyle Rekabet ve Kararlılık Analizi.....	46
5. SONUÇ ve ÖNERİLER.....	56
6. KAYNAKLAR.....	57
7. ÖZGEÇMİŞ.....	58

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1. Fark denklemleriyle diferansiyel denklemlerin çözümleri arasındaki bazı benzerlik ve farklılıklar.....	20
Çizelge 4.1. İki türün kararlılık şartları.....	53



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1.	Nüfusun zamana göre değişim grafiği.....	11
Şekil 3.2.	$a > 0$ için $x_{t+1} = ax_t$ denkleminin çözüm grafikleri.....	12
Şekil 3.3.	$a < 0$ için $x_{t+1} = ax_t$ denkleminin çözüm grafikleri.....	12
Şekil 3.4.	Cobweb metodunun uygulanma yöntemi.....	25
Şekil 3.5.	Fark denklem sisteminde $\tau - \delta$ düzleminde kararlılık bölgesi	30
Şekil 3.6.	$\frac{dx}{dt} = x(1-x)(2-x) = f(x)$ denkleminin denge çözümlerinin davranışı.....	36
Şekil 3.7.	Kararlı uygun olmayan düğüm noktası	38
Şekil 3.8.	Kararlı uygun nokta.....	38
Şekil 3.9.	Merkez noktası.....	38
Şekil 3.10.	Odak noktası.....	39
Şekil 3.11.	Eyer noktası.....	39
Şekil 3.12.	$\tau - \delta$ düzleminde kararlılık şeması.....	39
Şekil 4.1.	$\frac{dx}{dt} = x(1-x-y)$, $\frac{dy}{dt} = y(0.75-y-0.5x)$ diferansiyel denklem sisteminde denge noktalarının davranışları.....	44
Şekil 4.2	$\frac{dx}{dt} = x(1-x-y)$, $\frac{dy}{dt} = y(0.75-y-0.5x)$ diferansiyel denklem sistemi için faz portresi.....	46
Şekil 4.3.	$(0, \rho)$ denge noktasının kararlılık grafiği.....	53
Şekil 4.4.	$(\frac{k_{21}(\rho-k_{12})}{1-k_{12}k_{21}}, \frac{k_{12}(1-\rho k_{21})}{1-k_{12}k_{21}})$ denge noktasının kararlılık grafiği	54
Şekil 4.5.	Yıllık iki bitki türü rekabetinde kararsızlık durumu grafiği.....	55

1.GİRİŞ

Matematik her zaman gelişen bilimlerle olan ilişkisinden faydalanmıştır. Biyomedikal bilim açıkça öngörülebilir geleceğin en önemli bilimidir. Matematiksel biyoloji, açıkça tanımlanmamış olsa da süratle büyüyen, iyi tanınan bir konudur ve matematiğin en heyecan verici modern uygulamasıdır. (Murray,2002) Matematiksel biyoloji, biyolojik problemleri tanımlamak ve çözmek için matematik modellerin inşası ile ilgili disiplinler arası bir daldır. Biyolojik sistemler biyolojik bir işleme dahil olan olası mekanizmaların ve verilerin eksikliğini-çelişkilerini ortaya çıkarmaya yardımcı olmak, test edilmemiş koşullar altında sistem performansını tahmin etmek, deneysel olarak erişilemeyen parametrelerin değerleri hakkında bilgi vermek, yeni hipotezler üretmek amacıyla matematiksel formülasyonla modellenirler. (Jackson, 2005) Matematiksel modellemeler için ise sıklıkla diferansiyel denklemler veya fark denklemleri kullanılmaktadır. Fark denklemleri zamanı sabit (ayrık) aralıklarla değerlendirmenin doğal olduğu biyolojik olayları tanımlamak için kullanılırken diferansiyel denklemler değişkenlerdeki sonsuz küçük değişimleri dikkate alması açısından sürekli olan durumlarda tercih edilir. Bu çalışmada biyolojik modellemelerde sıkça kullanılan fark denklemleri, diferansiyel denklemler ve kararlılık kriterleri incelenecektir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

1202’de Pisa Leonardo tarafından yazılan bir egzersiz büyüyen tavşan popülasyonu için matematiksel model oluşturmuyordu. Bu modelin çözümü için oluşturulan denklem ise $f(n + 1) = f(n) + f(n - 1)$ şeklinde olduğundan, fark denklemi ile modellendiğini söyleyebiliriz. Biyolojik sistemleri modellemede diferansiyel denklemlerin kullanımı da yaygındır. Buna örnek olarak 1798’de sınırsız nüfus artışının savaş, kıtlık veya salgın hastalık ile kontrol edileceğini söyleyen Malthus

$$\frac{dN}{dt} = bN - dN$$

$b(t)$ = doğum sayısı, $d(t)$ = ölüm sayısı,

1838’de popülasyon çok büyüdüğünde kendini sınırlayan sürecin etki ettiğini ileri süren Verhulst

$$\frac{dN}{dt} = rN(1 - \frac{N}{K})$$

ve 1926 yılında Adriyatik denizinde av-avcı modelini açıklamaya çalışan Lotka-Volterra

$$\frac{dx}{dt} = x(a - by), \frac{dy}{dt} = y(cx - d)$$

x = av popülasyonu , y = avcı popülasyonu , $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$

modellerini gösterebiliriz. (Murray, 2002)

Fark denklemlerin ortaya çıkışı diferansiyel denklemlere göre daha erken dönemde olsa da yapılan çalışmalar son yıllarda ağırlık kazanmıştır. Belki de bu büyük ölçüde diferansiyel denklemlerin yaklaşık fark denklemi formülasyonları kullanılarak çözüldüğü bilgisayarların ortaya çıkmasından kaynaklanmaktadır (Agarwal, 2000). Fark denklemleri ile ilgili yapılmış olan bazı çalışmaları aşağıdaki gibi sıralayabiliriz.

Temel lineer fark denklemleri teorisi on sekizinci yüzyılda de Moivre, Euler, Lagrange, Laplace ve diğerleri tarafından geliştirilmiştir. İlk önce Fibonacci denklemini çözmek için de Moivre tarafından kullanılan üretici işlevler, olasılık teorisindeki çalışmalarının bir parçası olarak Laplace tarafından kullanıldı. Rasyonel katsayılı doğrusal fark denklemlerinin ortaya çıkışı 1882 Poincare’e dayanmaktadır. Poincare asimptotik seri kavramını formüle ederek uygun koşullar altında bir çözümün ardışık değerlerinin oranının karakteristik köke yaklaşması gerektiğini göstermiştir. Asimptotik teorisi 1930’larda Birkhoff ve öğrencileri tarafından belli bir bütünlüğe getirilmiştir.

(Leipholz, H. ve ark., 2003). Kelley W. G. ve Peterson 1991 fark denklemlerini temel analiz ve lineer cebir kullanarak incelemişlerdir. Ayrıca Elaydi (2005) lineer fark denklemlerini ayrıntıyla inceleyip çözümlerin asimptotikliği üzerine çalışmalar yapmıştır. Allen (1990) kitabında bazı biyolojik olayların matematiksel modelleri üzerine durup fark denklemleri ve diferansiyel denklemleri, bu denklemlerin çözümlerinin davranışını ve kararlılığını incelemiştir. Fark denklemlerini inceleyen başlıca Türkçe kitaplar arasında Akın ve Bulgak (1998), Bereketoğlu ve Kutay (2012), Soykan ve ark. (2017) sayabiliriz.

Diferansiyel denklemler en temel anlamda bilinmeyen fonksiyonu ve türevlerini içeren denklemlerdir. Isaac Newton (1642-1727) birinci dereceden diferansiyel denklemleri üç forma göre $(\frac{dy}{dx} = f(x), \frac{dy}{dx} = f(y), \frac{dy}{dx} = f(x, y))$ sınıflandırmıştır. Gottfried Leibniz (1646-1716) iyi matematiksel gösterimin gücüne inanıyordu, $\frac{dy}{dx}$ türev notasyonunu ve integral işaretini kullandı. 1691’de değişkenlerin ayrılma metotlarını, homojen denklemlerin ayrılabilir olanlara indirgeme yöntemlerini ve birinci mertebeden lineer denklemleri çözme prosedürünü keşfetti. Bernoulli kardeşler analizin yardımıyla mekanikteki birçok problemi diferansiyel denklemler şeklinde formülize ederek çözdüler. On sekizinci yüzyılın en büyük matematikçisi Leonhard Euler (1707-1783), Bernoulli’nin öğrencisiydi. Diğer şeylerin yanı sıra Euler, birinci dereceden diferansiyel denklemlerin kesinliği için koşulu tanımladı, integral teorisini geliştirdi ve sabit katsayılı lineer homojen denklemlerin genel çözümünü verdi. (Nisa 2014 ; Boyce ve DiPrima’dan, 2001).

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1 Materyal

3.1.1 Temel Kavramlar

Operatör $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ise $f \in S(\mathbb{Z})$

$g: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ tanımlı ise $g \in S(\mathbb{N}_0)$ diyelim.

Bir $x(n)$ fonksiyonunu yeni bir $y(n)$ fonksiyonuna götüren fonksiyona operatör veya dönüşüm denir.

$A = S(\mathbb{Z})$ ya da $A = S(\mathbb{N}_0)$ olmak üzere bir $T: A \rightarrow A$ operatörü her $x, y \in A$ için

$$T(x + y) = T(x) + T(y) \text{ ve}$$

$$\forall x \in A, c \in \mathbb{R} \text{ için } T(cx) = cT(x)$$

koşullarını sağlayan T operatörüne lineer operatör denir.

3.1.1.1 Δ -E-I Operatörlerinin Tanımı

Delta Fark Operatörü: Δ Fark operatörü: $(\Delta x)(n) = x(n + 1) - x(n)$

$E: S(\mathbb{Z}) \rightarrow S(\mathbb{Z})$ Öteleme Operatörü: $(Ex)(n) = x(n + 1)$

I Özdeşlik Operatörü: $(Ix)(n) = x(n)$ şeklinde tanımlanır.

3.1.1.2 Δ Operatörünün Bazı Özellikleri

Δ -E-I operatörlerinin tanımlarına göre $\Delta = E - I$ eşitliği yazılabilir.

Δ fark operatörü, E öteleme operatörü ve I birim operatörleri lineerdir.

E öteleme operatörü için $E^k x(n) = x(n + k)$ olduğu söylenebilir.

$\Delta^k x(n)$ eşitini bulmak için ise $\Delta = E - I$ özdeşliğinden yararlanalım.

$$\Delta^k x(n) = (E - I)^k x(n)$$

$$\Delta^k x(n) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} E^{k-i} x(n)$$

$$\Delta^k x(n) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} x(n + k - i). \text{ (Elaydi, 2005)}$$

Teorem 3.1.1. (Kutay, 2010)

Δ Fark operatörü ve E öteleme operatörü olmak üzere $\forall k, l \in \mathbb{Z}^+$ için

a) $\Delta^k(\Delta^l(x(n))) = \Delta^{k+l}x(n)$

b) $\Delta(x(n)y(n)) = y(n)\Delta x(n) + x(n+1)\Delta y(n)$

c) $\Delta\left(\frac{x(n)}{y(n)}\right) = \frac{y(n)\Delta x(n) - x(n)\Delta y(n)}{y(n)y(n+1)}$

İspat

a) $\Delta^k(\Delta^l(x(n))) = \Delta^k\Delta^l(x(n)) = \Delta^{k+l}x(n)$

b) $\Delta(x(n)y(n)) = x(n+1)y(n+1) - x(n)y(n)$

$$\begin{aligned} &= x(n+1)y(n+1) - x(n)y(n) - x(n+1)y(n) + x(n+1)y(n) \\ &= [x(n+1) - x(n)]y(n) + x(n+1)[y(n+1) - y(n)] \\ &= y(n)\Delta x(n) + x(n+1)\Delta y(n) \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} \Delta\left(\frac{x(n)}{y(n)}\right) &= \frac{x(n+1)}{y(n+1)} - \frac{x(n)}{y(n)} = \frac{x(n+1)y(n) - y(n+1)x(n)}{y(n+1)y(n)} \\ &= \frac{x(n+1)y(n) - y(n+1)x(n) - y(n)x(n) + y(n)x(n)}{y(n+1)y(n)} \\ &= \frac{[x(n+1) - x(n)]y(n) - x(n)[y(n+1) - y(n)]}{y(n)y(n+1)} \\ &= \frac{\Delta x(n)y(n) - x(n)\Delta y(n)}{y(n)y(n+1)} \quad (\text{Kutay, 2010}) \end{aligned}$$

Örnek 3.1.1.

$\Delta \sec \pi n$ değerini hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \sec \pi(n+1) - \sec \pi n &= \frac{1}{\cos \pi(n+1)} - \frac{1}{\cos \pi n} \\ &= \frac{1}{\cos \pi n \cos \pi - \sin \pi n \sin \pi} - \frac{1}{\cos \pi n} \\ &= \frac{1}{(-\cos \pi n)} - \frac{1}{\cos \pi n} \\ &= -2 \sec \pi n \end{aligned}$$

Teorem 3.1.2. k . dereceden bir $p(n) = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \dots + a_k$ polinomunun k . dereceden fark operatörünün işlemi sonucu sabit, $k+1$. dereceden işleminin sonucu sıfırdır. (Kutay, 2010)

$$\Delta^k P(n) = a_0 \cdot k!$$

$$\Delta^{k+i} P(n) = 0 \quad i > 0$$

Örnek 3.1.2. $P(n) = 2n^3 - 6n + 2$ polinomunun 4. basamağa kadar farklarını hesaplayalım.

$$\Delta P(n) = 6n^2 + 6n - 4$$

$$\Delta^2 P(n) = 12n + 6$$

$$\Delta^3 P(n) = 6$$

$$\Delta^4 P(n) = 0$$

3.1.1.3 E Öteleme Operatörü Cinsinden k'ıncı Dereceden Polinomunun Sonucu

Teorem 3.1.3. k'ıncı dereceden $p(E) = a_0 E^k + a_1 E^{k-1} + \dots + a_k$ polinomu E öteleme operatörü cinsinden verilsin. $a_0 \neq 0, a_0, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$. Bu durumda $r \in \mathbb{R}$ olmak üzere $p(E) r^n = r^n p(r)$ ve $\forall f(x)$ fonksiyonu için $p(E)(r^n f(n)) = r^n p(rE)f(n)$ 'dir.

Örnek 3.1.3. E öteleme operatörü olmak üzere $(4E^2 + 2E + 4)3^n$ işlemini yapalım.

$$p(E) = 4E^2 + 2E + 4 \text{ ve } r^n = 3^n$$

alınırsa,

$$(4E^2 + 2E + 4) 3^n = 3^n (4 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 4) = 46 \cdot 3^n$$

şeklinde bulunur.

3.1.1.4. Δ^{-1} Ters Fark Operatörü

$n \geq n_0$ için $\Delta F(n) = f(n)$ olsun. Bu durumda $n \geq n_0$ için $\Delta^{-1} f(n) = F(n) + c$ şeklinde tanımlanan Δ^{-1} operatörüne ters fark operatörü ve $F(n)$ fonksiyonuna da $f(n)$ 'nin ters farkı denir. (c keyfi sabit) (Kutay, 2010)

Teorem 3.1.4. (Soykan ve ark., 2017)

$f(n)$ fonksiyonunun ters farkı $\Delta^{-1} f(n) = \sum_{i=n_0}^{n-1} f(i)$ şeklinde tanımlıdır.

İspat

$$\Delta_n \left(\sum_{i=n_0}^{n-1} x(i) \right) = \sum_{i=n_0}^n x(i) - \sum_{i=n_0}^{n-1} x(i) = x(n) + \sum_{i=n_0}^{n-1} x(i) - \sum_{i=n_0}^{n-1} x(i) = x(n)$$

$$\Delta_n \left(\sum_{i=n_0}^{n-1} x(i) \right) = x(n) \text{ eşitliğinin her iki tarafına ters fark operatörü uygulanırsa}$$

$$(n_0=0 \text{ ve } x(i)=f(n) \text{ alınırsa})$$

$$\Delta^{-1} f(n) = \sum_{i=n_0}^{n-1} f(i) + c$$

bulunur. (Soykan ve ark., 2017)

Örnek 3.1.4.

- 1) $\Delta^{-1}0 = c$
 2) $\Delta^{-1}1 = n + c$
 3) $\Delta^{-1}a^n = \frac{a^n}{(a-1)} + c \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad a \neq 1$ örnekleri incelenirse,

1) $\Delta a = 0$

$$\Delta^{-1}0 = a + c_1 = c \text{ olarak alınır}$$

$$\Delta^{-1}0 = c \text{ bulunur.}$$

2) $\Delta n = n + 1 - n = 1$ olduğundan

$$\Delta^{-1}1 = n + c \text{ olarak bulunur.}$$

3) $\Delta a^n = a^{n+1} - a^n = a^n(a - 1)$

$$\Delta \left(\frac{a^n}{a-1} \right) = a^n \text{ bulunur.}$$

$$\text{Bu nedenle } \Delta^{-1}a^n = \frac{a^n}{(a-1)} + c \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad a \neq 1$$

Örnek 3.1.5. 5^n 'nin ters farkı hesaplanırsa

$$\Delta^{-1}5^n = \frac{1}{4}5^n + c \text{ bulunur.}$$

Örnek 3.1.6. $\Delta^{-1} \sin(an + b) = \frac{\cos(an+b-\frac{a}{2})}{-2\sin\frac{a}{2}} + c \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad a \neq 2k\pi$ olduğunu gösterelim.

$$\Delta \cos(an + b) = -2\sin\frac{a}{2} \sin\left(an + b + \frac{a}{2}\right) \text{ burada } b = b - \frac{a}{2} \text{ alınır};$$

$$\Delta \cos\left(an + b - \frac{a}{2}\right) = -2\sin\frac{a}{2} \sin\left(an + b - \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right)$$

$$\Delta \left(\frac{\cos\left(an + b - \frac{a}{2}\right)}{-2\sin\frac{a}{2}} \right) = \sin(an + b)$$

$$\Delta^{-1} \sin(an + b) = \frac{\cos\left(an+b-\frac{a}{2}\right)}{-2\sin\frac{a}{2}} + c \text{ (Kutay, 2010)}$$

Örnek 3.1.7 $2 \cdot 3^n + e^{3n}$ fonksiyonunun ters farkını tanım yardımıyla hesaplayalım.

$$\Delta^{-1}(2 \cdot 3^n + e^{3n}) = \sum_{i=0}^{n-1} (2 \cdot 3^i + e^{3i}) = 2 \cdot \sum_{i=0}^{n-1} 3^i + \sum_{i=0}^{n-1} (e^3)^i$$

$$2 \cdot \frac{1-3^n}{1-3} + \frac{1-e^{3n}}{1-e^3} = 3^n - \frac{e^{3n}}{1-e^3} + c \text{ (Kutay, 2010)}$$

3.2. YÖNTEM

3.2.1. Fark Denklemleri

3.2.1.1. Temel Tanım ve Sonuçlar

Tanım 3.2.1. Fark Denklemleri: $t \in N$ ve x bilinmeyen fonksiyon olmak üzere

$$f(x(t+k), x(t+k-1), \dots, x(t+1), x(t), t) = 0 \quad (3.1)$$

eşitliğine k . basamaktan fark denklemi adı verilir.

Fark denklemi: $x(t+k) = f(t, x(t), x(t+1), \dots, x(t+k-1))$ veya

$\Delta^k x(t) = g(t, x(t), \Delta x(t), \dots, \Delta^{k-1} x(t))$ şeklinde ise denkleme k . basamaktan Normal Fark denklemi denir.

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ katsayıları reel değerli fonksiyonlar (x 'e veya t 'ye bağlı) $a_k \neq 0$ ve b_t eşitliğin sağ tarafında herhangi bir fonksiyon olmak üzere fark denklemi;

$$x(t+k) + a_1 x(t+k-1) + \dots + a_{k-1} x(t+1) + a_k x(t) = b_t \quad (3.2)$$

şeklinde yazılabilir.

Bu eşitlikte $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ katsayıları x 'e bağlı değilse denklem lineer fark denklemi aksi durumda lineer olmayan fark denklemi olarak adlandırılır.

(3.2) Eşitliğinde $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ katsayıları ve b_t fonksiyonu t 'ye bağlı değilse otonom, t 'ye bağlı ise otonom olmayan denklemdir.

(3.2) Fark denklemi lineer ve $b_t = 0$ ise denklem homojen fark denklemi aksi durumda homojen olmayan fark denklemdir. (Kutay, 2010)

Örnekler

A) $x(t+2) + 3x(t+1) - x(t) + x(t-1) = t + \cos t$

Verilen fark denklemi lineerdir ve mertebesi $(t+2) - (t-1) = 3$ 'tür. Otonom değildir.

B) $x(t+1) = 2x^2(t) - 5t$

Denklem lineer değildir ve mertebesi 1'dir. Otonom değildir.

C) $x(t+2) = \frac{\sin t}{1+t} x(t+1) - tx(t)$

Denklem lineerdir. Mertebesi 2'dir. Otonom değildir.

D)

$$x(t + 2) = \frac{(x(t-3))}{(6x(t)+11)}$$

Mertebesi 5'tir. Denklem lineer değildir. Otonomdur.

Tanım 3.2.2. (Lineer Bağımsızlık): $n \geq n_0$ için tanımlı $f_1(n), f_2(n), \dots, f_r(n)$ fonksiyonları verilsin. $a_i, 1 \leq i \leq r$ sabit olmak üzere,

$$a_1 f_1(n) + a_2 f_2(n) + \dots + a_r f_r(n) = 0$$

eşitliği yalnızca $a_1 = a_2 = \dots = a_r = 0$ için sağlanıyorsa $f_1(n), f_2(n), \dots, f_r(n)$ fonksiyonlarına lineer bağımsızdır denir.

Örnek 3.2.1. $f_1(n) = n + 1, f_2(n) = n^2 - 1, f_3(n) = 3n + 3$ fonksiyonları lineer bağımlıdır.

$a_1 f_1(n) + a_2 f_2(n) + \dots + a_r f_r(n) = 0$ eşitliğinde $a_1 = -3a_3 \neq 0$ seçilirse eşitlik sağlanır.

Tanım 3.2.3. Casoratyan: $f_1(n), f_2(n), \dots, f_r(n)$ fonksiyonlarının $W(n)$ ile gösterilen Casoratyanı;

$$W(n) = \det \begin{pmatrix} f_1(n) & f_2(n) & \dots & f_r(n) \\ f_1(n+1) & f_2(n+1) & \dots & f_r(n+1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(n+r-1) & f_2(n+r-1) & \dots & f_r(n+r-1) \end{pmatrix}$$

şeklinde tanımlanır. (Elaydi, 2005)

Teorem 3.2.1. $x(n+k) + a_1(n)x(n+k-1) + \dots + a_k(n)x(n) = 0$ homojen denkleminin $x_1(n), x_2(n), \dots, x_k(n)$ çözümlerinin lineer bağımsız cümle oluşturması için gerek ve yeter koşul herhangi bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısına karşılık $W(n_0) \neq 0$ olmasıdır.

Örnek 3.2.2. $x(n+2) - \frac{3n-2}{n-1}x(n-1) + \frac{2n}{n-1}x(n) = 0$ fark denkleminin $n, 2^n$ çözümlerini inceleyelim.

$$W(n) = \det \begin{pmatrix} n & 2^n \\ n+1 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$W(0) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$$

Bu durumda $n, 2^n$ çözümleri lineer bağımsızdır. (Elaydi, 2005)

3.2.1.2. Birinci Mertebeden Lineer Fark Denklemleri

a bir sabit olmak üzere, $x(t+1) = ax(t)$, $t \in \mathbb{N}$ denkleminin çözümü $x(t) = a^t x(0)$ ile verilir. Burada $x(0)$ başlangıç değeridir.

$$x(t+1) = a^{t+1}x(0) = a(a^t x(0)) = ax(t)$$

Birinci mertebeden lineer fark denklemini $x(t+1) - ax(t) = 0$ olarak yazabiliriz. Bu denklem birinci mertebeden sabit katsayılı homojen bir fark denklemidir. $y(t)$ ve $z(t)$ bu denklemin iki çözümü ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

$$w(t) = \alpha y(t) + \beta z(t)$$

olmak üzere

$$w(t+1) - aw(t) = \alpha(y(t+1) - ay(t)) + \beta(z(t+1) - az(t)) = \alpha 0 + \beta 0 = 0$$

olduğundan $w(t) = \alpha y(t) + \beta z(t)$, $x(t+1) - ax(t) = 0$ denkleminin çözümüdür.

Bu denkleme karşılık gelen homojen olmayan denklem: $x(t+1) - ax(t) = g$ şeklindedir. Bu denkleme özel çözüm arayalım:

$$x(1) = ax(0) + g$$

$$x(2) = ax(1) + g = a(ax(0) + g) + g = a^2x(0) + ag + g$$

$$x(3) = ax(2) + g = a^3x(0) + a^2g + ag + g$$

$\vdots$

$$x(n) = a^n x(0) + g \sum_{k=0}^{n-1} a^k$$

Burada $a \neq 1$ için $x(t) = a^t x(0) + g \frac{a^t - 1}{a - 1}$

$$a = 1 \text{ ise } x(t) = x(0) + gt$$

Teorem 3.2.2. $t \in \mathbb{N}$ olmak üzere $a(t)$ ve $g(t)$ reel diziler olsun. Birinci mertebeden lineer fark denklemini $x(t+1) = a(t)x(t) + g(t)$, ve $t \geq t_0 \geq 0$ $x(t_0) = x_0$ başlangıç koşulundan oluşan çözümü

$$x(t) = \left(\prod_{k=t_0}^{t-1} a(k) \right) x_0 + \sum_{k=t_0}^{t-1} \left(\prod_{j=k+1}^{t-1} a(j) \right) g(k)$$

şeklindedir. (Soykan ve ark., 2017)

Örnek 3.2.3. Bir kuş türünün nüfusu yılda %3 oranında artmaktadır. Bu türün başlangıçtaki ve n . yıldaki nüfusları sırasıyla x_0 ve x_n ise, bu durumda

$$x_{n+1} = x_n + 0.03 x_n = 1.03x_n, n = 0,1,2,\dots \text{ yazılabilir.}$$

Bu durumda $x_0=100$ başlangıçtaki kuş sayısı olmak üzere;

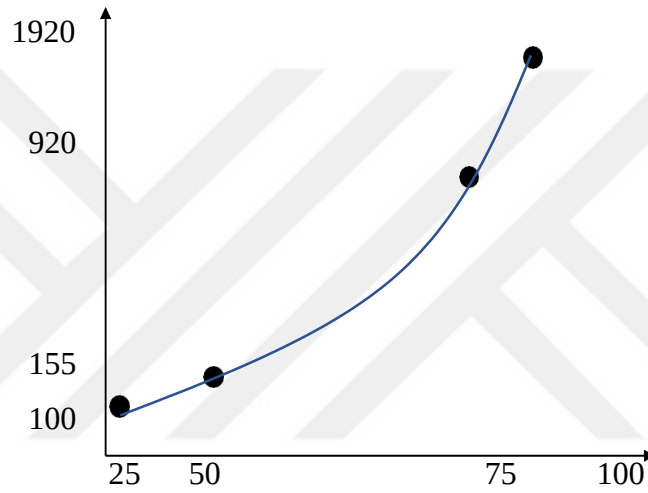
$$x_1 = 1.03.100 = 103$$

$$x_2 = 1.03. x_1 = 1.03.103 = 106,09$$

⋮

$$x_n = (1.03)^n. x_0$$

Geometrik bakımdan bu nüfusun zamana göre nasıl değiştiğini görmek için (n, x_n) , $n = 0,1,2, \dots$ noktalarından meydana gelen grafik aşağıdaki gibidir.(Kutay, 2010)



Şekil 3.1

Örnek 3.2.4. Bir bitki popülasyonunu veya bir hücre popülasyonunu ele alalım. x_t : t jenerasyondaki popülasyonun büyüklüğünü gösterebilir. Popülasyondaki her bireyin nesil başına bir birey üretilip öldüğünü varsayalım. Bu durumda popülasyon modeli $x_{t+1} = ax_t$ fark denklemi şeklinde birinci dereceden lineer ve homojendir.

$$x_1 = ax_0, x_2 = ax_1 = a^2x_0 \text{ bu denklemin genel çözümü } x_t = a^t x_0 \text{ şeklindedir.}$$

Denkleminde x_0 biliniyorsa çözüm taktır.

$a^t x_0$ çözümü başlangıç değeri x_0 olan t nesildeki popülasyonun davranışını tek olarak belirler.

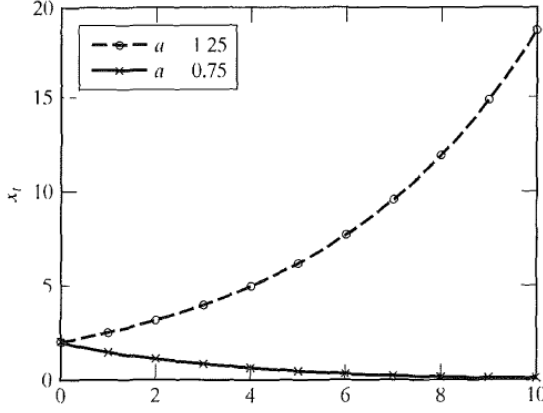
$$\text{Eğer } 0 < a < 1 \text{ ise } \lim_{t \rightarrow \infty} x_t = 0$$

$$a = 1 \text{ ise } x_t = x_0$$

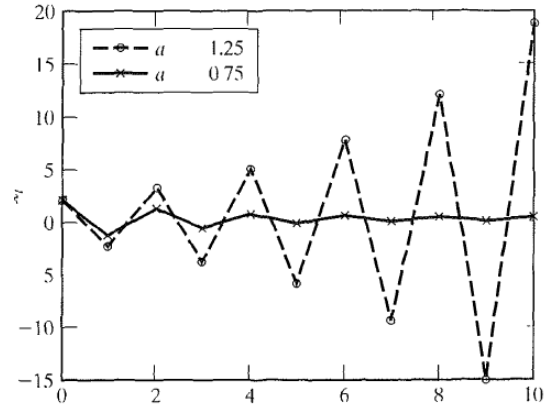
$$a > 1 \text{ ise } \lim_{t \rightarrow \infty} x_t = \infty, x_0 > 0$$

Bu durumda $|a| < 1$ ise çözüm sifira yakinsar.

$|a| > 1$ ise çözüm ıraksaktır. (Allen, 1990)



Şekil 3.2 (Allen, 1990)



Şekil 3.3 (Allen, 1990)

3.2.1.3. İkinci Mertebeden Lineer Fark Denklemleri

$x(t + 2) + a_1(t)x(t + 1) + a_2(t)x(t) = g(t)$ ikinci mertebeden lineer fark denkleminin en genel formudur. Bu denklemde $g(t) = 0$ olursa denklem homojen olur. İkinci mertebeden lineer fark denkleminin sabit katsayılı homojen denklem formu,

$$x(t + 2) + a_1x(t + 1) + a_2x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{N}$$

şeklinindedir. Bu denklemin karakteristik denklemini bulmak için denklemde

$$x(t) = \lambda^t, \lambda \neq 0 \text{ yazılır.}$$

$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri λ_1, λ_2 bulunur.

$x(t + 2) + a_1x(t + 1) + a_2x(t) = 0$ denklemi λ_1, λ_2 karakteristik köklerin durumuna bağlı olarak üç durumda incelenebilir.

1.Durum: $a_1^2 - 4a_2 > 0$ ise denklemin birbirinden farklı iki reel kökü vardır. $\{\lambda_1^t, \lambda_2^t\}$ homojen fark denkleminin temel cümlesidir. Bu durumda genel çözüm,

$$x(t) = c_1\lambda_1^t + c_2\lambda_2^t \text{ şeklinde yazılabilir. } (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

2.Durum: $a_1^2 = 4a_2$ ise denklemin kökleri reel ve birbirine eşittir. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ $\{\lambda^t, t\lambda^t\}$ çözümleri lineer bağımsız çözümler kümesidir. Bu durumda genel çözüm,

$$x(t) = c_1\lambda^t + c_2 t\lambda^t = \lambda^t(c_1 + tc_2) \text{ olarak belirlenir. } (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

3.Durum: $a^2 - 4a_2 < 0$ ise denklemin λ_1, λ_2 kökleri eşlenik kompleks sayılardır. $\lambda_1 = \alpha + \beta i, \lambda_2 = \alpha - \beta i \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ ve } \beta \neq 0$

$r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad \theta = \arctan \frac{\beta}{\alpha}$ olmak üzere $\{r^t \cos t\theta, r^t \sin t\theta\}$ kümesi homojen fark

denkleminin lineer bağımsız çözümlerinin kümesidir.

$$x(t) = r^t(c_1 \cos t\theta + c_2 \sin t\theta) \text{ (Soykan ve ark., 2017)}$$

Örnek 3.2.5. $x(n+2) + x(n) = 0$ homojen fark denkleminin genel çözümünü bulalım.

$\lambda^2 + 1 = 0$ karakteristik denkleminin kökleri komplekstir. $\lambda_{1,2} = \pm i$

$r = 1$, ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ Buradan genel çözüm $x(n) = c_1 \cos n\frac{\pi}{2} + c_2 \sin n\frac{\pi}{2}$

Bu örnekte $|\lambda_{1,2}| = 1$ olması çözümlerin sınırlı olmasını sağlar fakat çözümler özel bir çözüme yakınsamaz salınım yapar.

Örneğin $x(0) = 0$ ve $x(1) = 1$ başlangıç koşullarına göre $x(n) = \sin(n\frac{\pi}{2})$

çözümünü incelediğimizde periyodu 4 olan aşağıdaki salınım sırasıyla karşılaşırız.

0,1,0,-1,0,1,0,-1,... (Allen, 1990)

3.2.1.4. k'ncı Mertebeden Lineer Fark Denklemleri

$$x(t+k) + a_1 x(t+k-1) + \dots + a_k x(t) = 0, \quad t \in \mathbb{N}, i = 1, 2, \dots, k \text{ için}$$

$a_i \in \mathbb{R}$ ve $a_k \neq 0$ fark denkleminin çözümü için λ^t şeklinde karakteristik denklem oluşturulacaktır. $\lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \dots + a_k = 0$ Bu denklemin çözümünde karakteristik denklemin köklerinin birbirinden farklı, birbirine eşit ve katlı ve kompleks olmak üzere üç durum söz konusudur.

1.Durum: Karakteristik denklemin kökleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ reel ve birbirinden farklı olmak üzere $x(t) = \sum_{i=1}^k c_i \lambda_i^t$ ($c_i \in \mathbb{R}$) denklemin genel çözümüdür.

2.Durum: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ sırasıyla $m_1, m_2, \dots, m_r$ katlı olsunlar.

$(E - \lambda_1)^{m_1} (E - \lambda_2)^{m_2} \dots (E - \lambda_r)^{m_r} x(t) = 0$ şeklinde yazılabilir. Herhangi bir

$i \in [1, r]$ için $(E - \lambda_i)^{m_i} x(t) = 0$ denkleminin lineer bağımsız çözümlerinin kümesi

$\psi_i = \{\lambda_i^t, t\lambda_i^t, \dots, t^{m_i-1}\lambda_i^t\}$ dir. $\psi = \bigcup_{i=1}^r \psi_i$ olup genel çözüm

$$x(t) = \lambda_i^t (c_{i0} + t c_{i1} + t^2 c_{i2} + \dots + t^{m_i-1} c_{im_i-1})$$

şeklindedir.

3.Durum: $\lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \dots + a_k = 0$ karakteristik denkleminin $\lambda_1 = \alpha + i\beta$

kompleks kökü q_1 katlı olsun. Bu durumda $2q_1$ tane gerçel değerli lineer bağımsız $x_1, x_2, \dots, x_{2q_1}$ çözümü

$r^t \cos t\theta, r^t \sin t\theta, t r^t \cos t\theta, t r^t \sin t\theta; \dots; t^{q_1-1} r^t \cos t\theta, t^{q_1-1} r^t \sin t\theta$

şeklindedir. (Soykan ve ark., 2017)

Örnek 3.2.6.

$x(t+4) + 12x(t+2) - 64x(t) = 0$ denkleminin çözümünü bulalım.

Karakteristik denklem, $\lambda^4 + 12\lambda^2 - 64 = 0$ şeklindedir. Bu denklemde değişken değiştirme metodunu uygularsak, $\lambda^2 = a$ olmak üzere denklem $a^2 + 12a - 64 = 0$ olur. Denklemin kökleri $a_1 = -4$, $a_2 = 16$ 'dır.

Buradan, $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -4$, $\lambda_{3,4} = \pm 2i$ olur.

Denklemin genel çözümü, $x(t) = c_1 4^t + c_2 (-4)^t + 2^t (c_3 \cos \frac{t\pi}{2} + c_4 \sin \frac{t\pi}{2})$ olur.

3.2.2 Diferansiyel Denklemler

Değişimler doğumdan ölüme süreklilik taşıyorsa ve jenerasyonlar üst üste geliyorsa bu durumda diferansiyel denklemleri kullanmak fark denklemlerini kullanmaktan daha uygundur. Diferansiyel denklemlerde zaman aralığı sürekli ve $t_0 < T < \infty$ için $[t_0, T)$ veya $[t_0, \infty)$ aralıklarında sonlu ya da sonsuz alınabilir. Fark denklemlerinde ise zaman ayırık değerler almak zorundadır. ($t = 1, 2, 3, \dots$)

En iyi bilinen popülasyon büyüme modellerinden biri Malthus (1798) modelidir. Bu modelde büyüme oranı popülasyon büyüklüklerinin oranlıya açıklanır.

$x(t)$ popülasyon büyüklüğü olmak üzere,

$$\frac{dx}{dt} = rx, \quad x(t_0) = x_0 \quad (3.3)$$

Burada r kişi başı büyüme oranını ya da esas büyüme oranını ifade eder. Bu diferansiyel denklemin çözümü ise değişkenlerin ayrılmasıyla bulunur.

$$\frac{dx}{x} = r dt, \quad \int_{x_0}^{x(t)} \frac{dy}{y} = \int_{t_0}^t r dr, \quad \ln \left[\frac{x(t)}{x_0} \right] = r(t - t_0)$$

Buradan, $x(t) = x_0 e^{r(t-t_0)}$ $t_0 = 0$ ise $x(t) = x_0 e^{rt}$

Bu durumda nüfus zamanla katlanarak büyüyecektir. Üstel büyüme diferansiyel denklemin çözümü ile ortaya çıkmıştır. (3.3) denkleminin çözümü, $x_{t+1} = ax_t$ birinci mertebeden lineer fark denkleminin çözümüyle karşılaştırabiliriz. Fark denkleminde çözüm $x(t) = a^t x(0)$ şeklindeydi. Burada a sabiti $a = e^r$ olarak alınırsa ve $a > 1$ olduğunda üstel büyüme sonucunu elde ederiz. (Allen, 1990)

Tanım 3.2.4. $f\left(x, \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \dots, \frac{d^nx}{dt^n}, t\right) = 0$ formundaki fonksiyonlara n . dereceden

diferansiyel denklem denir. Burada f fonksiyonu doğrudan t 'ye bağlı değildir bu nedenle otonomdur. Aksi halde otonom olmayan diferansiyel denklem olarak adlandırılacaktır. Otonom denklemlerde, x fonksiyonu t değişkenine, f fonksiyonu ise x değişkenine bağlıdır.

Diferansiyel denklemi

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(t) \frac{dx}{dt} + a_n(t)x = g(t) \quad (3.4)$$

şeklinde ifade edebiliriz. Bu fonksiyonda a_i , $i = 1, 2, \dots, n$ ve g fonksiyonu x 'e bağlı değilse denklem lineerdir. Aksi halde lineer değildir.

(3.4) fonksiyonunda $g(t) = 0$ ise denklem homojen diferansiyel denklem olarak adlandırılır. Aksi halde denklem homojen değildir. (Allen, 1990)

Tanım 3.2.5. $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$, $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$ ve

$f_i \equiv f_i(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t)$ olmak üzere 1. dereceden diferansiyel denklem sistemi

$$\frac{dX}{dt} = F(X(t), t) \quad (3.5)$$

şeklinde ifade edilebilir.

(3.5) sisteminin sağ tarafındaki fonksiyon t 'ye bağlı değilse sistem otonomdur. Aksi durumda otonom değildir.

$$(3.5) \text{ sistemi } i = 1, \dots, n \text{ için } \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + g_i(t) \quad (3.6)$$

şeklinde yazılırsa lineer aksi halde lineer olmayan diferansiyel denklem sistemidir.

Bu denklemde $g_i(t) = 0$ ise diferansiyel denklem sistemi homojendir.

Diferansiyel denklemin veya sistemin çözümü sırasıyla bir $x(t)$ fonksiyonu veya $X(t)$ vektör fonksiyonudur. Bu fonksiyonlar denklemlerde yerine yazıldığında denklemi sağlamalıdır.

Ayrıca n . dereceden diferansiyel denklemde çözümün n tane başlangıç koşulunu sağlaması gerekir. (Allen, 1990)

$$x(t_0) = x_0, \quad \frac{dx(t_0)}{dt} = x_1, \dots, \frac{d^{n-1}x(t_0)}{dt^{n-1}} = x_{n-1} \quad (3.7)$$

Tanım 3.2.6. n mertebeden adi diferansiyel denklemin $x = t_0$ noktasında $x(t_0) = x_0$, $\frac{dx(t_0)}{dt} = x_1, \dots, \frac{d^{n-1}x(t_0)}{dt^{n-1}} = x_{n-1}$ şeklinde n tane değeri veriliyorsa buna başlangıç değer problemi denir. (Allen, 1990)

Teorem 3.2.3.

i. $\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(t) \frac{dx}{dt} + a_n(t)x = g(t)$ diferansiyel denklemi ve

$x(t_0) = x_0, \frac{dx(t_0)}{dt} = x_1, \dots, \frac{d^{n-1}x(t_0)}{dt^{n-1}} = x_{n-1}$ n tane başlangıç koşulu verilsin.

$i = 1, 2, \dots, n-1$ olmak üzere denklemdeki a_i ve g katsayıları t_0 'ın içinde bulunduğu $\alpha < t_0 < \beta$ aralığında sürekli ise bu durumda denklemin çözümü vardır ve tektir.

ii. $\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + g_i(t), x_i(t_0) = x_{i0}$ ve $i, j = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere a_{ij} ve g_i

$\alpha < t_0 < \beta$ aralığında sürekli ise denklemin çözümü vardır ve tektir. (Allen, 1990)

3.2.2.1 I. Dereceden Lineer Diferansiyel Denklemler

Birinci dereceden lineer diferansiyel denklemin başlangıç değer problemi

$\frac{dx}{dt} + a_1(t)x = g(t), x(t_0) = x_0$ (a_1 ve $g \forall t \geq t_0$ için sürekli) şeklinde tanımlıdır.

Sorunun çözümü için integral çarpanı metodu kullanılabilir. Buna göre $I(t) = e^{\int_{t_0}^t a_1(\tau) d\tau}$ integral çarpanı olmak üzere diferansiyel denklemin her iki tarafını $I(t)$ çarpanı ile çarpalım. Bu durumda denklem,

$$I(t) \frac{dx(t)}{dt} + a_1(t)I(t)x(t) = I(t)g(t)$$

Eşitliğin sol tarafı $x(t)$ ile integral çarpımının türevi şeklindedir.

$$\frac{d[x(t)I(t)]}{dt} = I(t)g(t)$$

Her iki tarafın integralini aldığımızda ve x için çözüme ulaştığımızda başlangıç değer probleminin tek çözümünü bulmuş oluruz.

$$x(t) = e^{\left(-\int_{t_0}^t a_1(\tau) d\tau\right)} \left[x_0 + \int_{t_0}^t e^{\left(\int_{t_0}^{\tau} a_1(u) du\right)} g(\tau) d\tau \right]$$

Eğer diferansiyel denklem homojen ise ($g(t) = 0$) bu durumda çözüm $x(t) = x_0 e^{-a_1 t}$ şeklindedir. $a_1 < 0$ ise çözüm Malthus veya üstel büyümeyi temsil eder. $a_1 > 0$ ise $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. (Allen, 1990)

Örnek 3.2.7. $\frac{dx}{dt} + \frac{2}{t}x = \frac{\cos t}{t^2}, x(\pi) = 0$

İntegral çarpanı $I(t) = e^{\int \frac{2}{t} dt} = e^{2 \ln |t|} = e^{\ln t^2} = t^2$ ile eşitliğin her iki tarafını çarparsak

$$t^2 \frac{dx}{dt} + 2tx = t^2 \frac{\cos t}{t^2}$$

$$\int \frac{d}{dt} [t^2 x] dt = \int \cos t dt$$

$$t^2 x = \sin t + c$$

$$x = \frac{\sin t}{t^2} + \frac{c}{t^2}$$

Verilen $x(\pi) = 0$ başlangıç değeri yerine yazıldığında, $0 = \frac{\sin \pi}{\pi^2} + \frac{c}{\pi^2}$. Buradan $c = 0$ elde edilir. Bu durumda çözüm, $x = \frac{\sin t}{t^2}$ şeklindedir.

Problemin çözümü $x = \frac{\sin t}{t^2} + \frac{c}{t^2}$ iki terimin toplamından oluşmuştur. Burada $\frac{c}{t^2}$ diferansiyel denklemin homojen kısmının çözümüdür. $\frac{\sin t}{t^2}$ ise homojen olmayan denklemin özel çözümüdür. Bu durumda genel çözüm, her ikisinin toplamından oluşmaktadır. (Allen, 1990)

3.2.2.2. İki ve Daha Yüksek Mertebeden Lineer Diferansiyel Denklemler

Homojen olmayan lineer diferansiyel denklemlerin çözümü, denklemlerin homojen kısmının çözümüyle, homojen olmayan denklemin özel çözümünün toplamından meydana gelir.

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

n . dereceden homojen diferansiyel denklemin n tane lineer bağımsız çözümü vardır.

$1 \leq i \leq n$ olmak üzere $\varphi_i(t)$ lineer homojen denklemin çözümü olsun. Bu durumda homojen denklemin çözümü $x_h(t) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i$ şeklinde bulunur. Bu durumda genel çözüm,

$$x(t) = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i + x_p(t) \text{ şeklindedir. (Allen, 1990)}$$

3.2.2.3. Sabit Katsayılı Lineer Homojen Diferansiyel Denklemler

Lineer diferansiyel denklemin katsayıları sabit ise denklem,

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = 0 \quad (3.8)$$

şeklindedir. (3.8) diferansiyel denkleminin $(-\infty, \infty)$ aralığında n tane lineer bağımsız

çözümü vardır. $x(t) = e^{\lambda t}$ ($\lambda \in \mathbb{R} \cup \mathbb{C}$) olarak alınırsa (3.8) denkleminde yerine yazıldığında,

$$e^{\lambda t}(\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n) = 0$$

elde edilir. Ortaya çıkan polinoma

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

karakteristik polinom denir ve $P(\lambda)=0$, (3.8) denkleminin karakteristik denklemidir. $P(\lambda)$ polinomunun kökleri ise özdeğerler olarak adlandırılır. Denklemin çözümü özdeğerlerin reel veya sanal olmasına göre değişir.

Diferansiyel denklemin ikinci dereceden olması durumunda genel çözüm λ_1, λ_2 'ye bağlı olarak üç durumda incelenir.

- 1) λ_1, λ_2 özdeğerleri reel ve ayrık ise genel çözüm $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ şeklindedir.
- 2) λ_1, λ_2 özdeğerleri reel ve birbirine eşit ise genel çözüm, $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 t e^{\lambda_2 t}$ şeklindedir.
- 3) λ_1, λ_2 özdeğerleri kompleks ise ($\lambda_1, \lambda_2 = u \pm iv$) genel çözüm, $x(t) = e^{ut} [c_1 \cos(vt) + c_2 \sin(vt)]$ şeklindedir.

Karmaşık eşlenikler söz konusu olduğunda $e^{ivt} = \cos(vt) + i \sin(vt)$ eşitliği çözümü sinüs ve kosinüs cinsinden ifade etmek için kullanılır.

Diferansiyel denklem n . dereceden ise çözüm 4 durumda incelenebilir.

- 1) Eğer karakteristik denklemin n tane lineer bağımsız $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ çözümü varsa denklem $x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}$ şeklindedir.
- 2) Karakteristik denklem r katlı λ köküne sahipse genel çözümün bu r katlı λ köküne sahip parçası $(c_1 + c_2 t + \dots + c_r t^{r-1}) e^{\lambda t}$ şeklindedir.
- 3) Karakteristik denklem $u \pm iv$ şeklinde karmaşık eşlenik iki köke sahipse denklemin genel çözümünün bu kompleks köklere karşılık gelen parçası, $e^{ut} [c_1 \cos(vt) + c_2 \sin(vt)]$ şeklindedir.
- 4) Karakteristik denklemin kompleks ve eşlenik kökü r katlı ise denklemin genel çözümünün katlı kompleks köklere karşılık gelen parçası

$$e^{ut} [(c_1 \cos(vt) + d_1 \sin(vt)) + t(c_2 \cos(vt) + d_2 \sin(vt)) + \dots + t^{r-1}(c_{r-1} \cos(vt) + d_{r-1} \sin(vt))]$$

şeklindedir.

n . dereceden diferansiyel denklemin n tane çözümünün lineer bağımsız olduğunu

göstermek için Wronskian determinantı kullanılır. Fark denklemlerindeki karşılığı casoratyandır. Fark denklemlerinde her satırda lineer bağımlılığı araştırılan fonksiyonların mertebeleri bir artırılırken diferansiyel denklemlerde her satırda fonksiyonların türevlerinin derecesi artırılır.

$x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ n tane fonksiyon olmak üzere bir I aralığında $n - 1$ kez türevlenebilir olmak üzere,

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n)(t) = \det \begin{pmatrix} x_1(t) & \dots & x_n(t) \\ x_1'(t) & \dots & x_n'(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(n-1)}(t) & \dots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

$\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t)$ n . dereceden I aralığındaki,

$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(t) \frac{dx}{dt} + a_n(t)x = 0$ lineer diferansiyel denklemin n tane çözümü olmak üzere, $\exists t \in I$ için $W(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n) \neq 0$ ise bu n tane çözüm lineer bağımsızdır.

Örnek 3.2.8. $x''(t) + 5x'(t) + 6x(t) = 0$ diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Karakteristik denklemi $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = (\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0$ şeklindedir. Buradan karakteristik kökler $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -3$ ve genel çözüm $x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$ dir. Bu iki çözümün lineer bağımsızlığını göstermek için Wronskianı kullanırsak,

$$W = \begin{vmatrix} e^{-2t} & e^{-3t} \\ -2e^{-2t} & -3e^{-3t} \end{vmatrix} = -e^{-5t} \neq 0 \text{ bulunur.}$$

Tüm homojen, lineer diferansiyel denklem katsayılarının sabit olması durumunda, sıfır çözümün "kararlı" olup olmadığı, yani başlangıç değer problemine bir çözümün sıfıra meyilli olup olmadığı belirlenebilir. Sıfır çözümünün kararlılığı $P(\lambda) = 0$ karakteristik denkleminin λ_i köklerine bağlıdır. Denklemin çözümü $e^{\lambda_i t}$ formunda olduğundan λ_i 'ler negatif reel sayı ise veya reel kısmı negatif olan kompleks sayı ise çözüm sıfıra yakınsar.

Lineer diferansiyel denklemlerle, lineer fark denklemleri arasındaki çözümlerin davranış farklılıklarının temel sebebi çözümleridir. (Allen, 1990)

Çizelge 3.1. Fark denklemleri ve diferansiyel denklemler arasındaki bazı benzerlik ve farklılıklar

Sabit Katsayılı Lineer Homojen Diferansiyel Denklemler	Sabit Katsayılı Lineer Homojen Fark Denklemleri
Çözüm $e^{\lambda_i t}$ 'lerin lineer kombinasyonudur.	Çözüm λ_i^t 'lerin lineer kombinasyonudur.
λ_i 'ler negatifse veya reel kısımları negatifse çözümler sıfıra yakınsama eğilimindedir.	$ \lambda_i < 1$ olduğunda çözüm sıfıra yakınsama eğilimindedir.

3.2.3. Çözümlerin Davranışı ve Kararlılık Teorisi

Kararlılık üzerine tarihteki ilk çalışmalar Aristo ve Arşimet'e dayanmaktadır. Aristo pertürbasyondan sonra meydana gelen hareketi araştırdı ve pertürb olmayan (unperturbed) durumun hareket sırasındaki kararlılığını belirledi. Bu metot kinematik metot olarak adlandırılır. Astronomi hariç hareketin kararlılığını belirlemede uzun süre kullanılmıştır. Arşimet'e dayanan kararlılık çalışmasında ise pertürb olmayan sistemin kararlılığını belirlemek için sistemin pertürbasyondan sonra ortaya çıkan geometrik durumu kullanılır. Bu metot geometrik metot olarak adlandırılır. Geometrik metot Arşimet, Toriçelli, Baldi ve Lagrange gibi isimlerle ilişkilendirilir. Bu metot mekanik alanında uzun süre egemen olmuştur. 3. metot ise enerji metodudur. Enerji kriteri denge pozisyonunun kararlılığını belirlemek için kullanılır. Farklı metotlar farklı yorumlara yol açtığından teknik fiziğin kesin tanımları kullanılsa bile sayısız yorum yapma imkânı doğar. Örneğin Lagrange ana eksen, sapmalara rağmen sınırlı kaldığında bir gezegenin yörüngesinin kararlı kaldığını belirtir. Possions ise gezegenin seyrinde art arda yörüngesinin her noktasına keyfi olarak yakın bir şekilde geçiyorsa bu hareketi kararlı olarak tanımlar. Bir sistemin kararlılığını belirlemek için hangi özelliklerin kullanılacağını bilmek çok önemlidir.

İstenilen zamanda durumu niteleyen belirli özellikler norm şeklinde adlandırılmaktadır. Bu durumda normdaki değişimin sebep olduğu pertürbasyon belirli ölçüyü aşmadığı takdirde pertürbe durum kararlı olarak adlandırılır. (Leipholz 1970)

Denge zamanla değişmeyen bir çözümdür. Bunun anlamı, sistemler bir dengede başlarsa, durum sonsuza dek dengede kalır. Denge çözümleri biyolojik olarak ilginçtir

çünkü sistemin “dinlenme durumlarını” veya “sabit durumlarını” temsil ederler. Sıfır çözümü genellikle bir denge çözümüdür. Sıfır çözümü kararlıysa sistem sıfıra yaklaşabilir. Bununla birlikte denge noktası pozitif ve kararlıysa o zaman denge noktasına yakın başlangıç değerleri için çözüm bu noktaya yakınsar. Popülasyon dinamiğinde sıfır denge, popülasyon tükenmesini ve pozitif bir denge, popülasyonun hayatta kalmasını temsil eder. Sıfır dengesi enfekte veya zararlı olan popülasyon oranını temsil etmedikçe istenen bir durum değildir.

Yerel ve Global kararlılık arasında ayırım yapmak önemlidir. Bir dengenin yerel kararlılığı, çözümlerin dengeye ancak başlangıçta yakın oldukları zaman yaklaşmaları anlamına gelir. Örneğin, eğer başlangıçtaki popülasyon büyüklüğü çok küçükse ve sıfır dengesi sabitse, o zaman popülasyonun tükenmesi meydana gelebilir. Fakat başlangıçtaki popülasyon büyüklüğü büyükse, sıfır dengenin yerel kararlılığı popülasyon tükenmesi hakkında hiçbir şey söylemez. Global kararlılık, ilk nüfus büyüklüğünden bağımsız olarak, çözümlerin dengeye yaklaştığını göstermektedir. Bu nedenle yerel kararlılıktan çok daha güçlüdür. (Allen, 1990)

3.2.3.1. Fark Denklemlerinde Kararlılık

3.2.3.1.1. Denge Noktası ve Kararlılık

Tanım 3.2.7. Denge Noktası: $\forall t > t_0$ için $f(t, x^*) = x^*$ eşitliğini sağlayan $x^* \in \mathbb{R}^k$ noktasına $x(t+1) = f(t, x(t))$, $x(t_0) = x_0$ denkleminin denge noktası veya sabit çözümü denir. (Allen, 1990)

Tanım 3.2.8. Kararlılık: $\forall \varepsilon > 0$ için $\|x_0 - x^*\| < \delta$ olduğunda $\|x(t, t_0, x_0) - x^*\| < \varepsilon$, $t \geq t_0 \geq 0$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa x^* noktasına kararlıdır denir.

Denge sistemde değişmeyen durumdur. Sistem pertürbasyondan sonra her zaman kendisine geri dönerse bu durumda denge noktası kararlı olarak kabul edilir. Pertürbasyondan sonra dengeden uzaklaşırsa denge noktası kararsız olarak adlandırılır.

Ayrıca $\|x_0 - x^*\| < \mu$ olduğunda $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, t_0, x_0) = x^*$ olacak şekilde μ sayısı varsa x^* denge noktasına atraktiftir denir.

Atraktif ve kararlı olan denge noktasına asimptotik kararlıdır denir.

Yerel kararlılığı araştırmak için ilk önce denge noktası belirlenir. Daha sonra denge noktası etrafındaki çözümlerin davranışını belirlemek için lineerleştirme yöntemleri kullanılır. Eğer denge noktası tüm başlangıç koşulları için kararlı ise bu nokta global kararlıdır. Lineer fark denklemlerinde veya birinci dereceden lineer sistemlerde yerel ve global kararlılık birbirine denktir. (Allen, 1990)

Teorem 3.2.4. f fonksiyonu x^* (denge noktası) içeren I aralığında sürekli olsun.

$x_{t+1} = f(x_t)$ fonksiyonu için x^* denge noktası:

- a) $|f'(x^*)| < 1$ olduğunda kararlı
- b) $|f'(x^*)| > 1$ olduğunda kararsızdır.

Bu teoremin ispatı ortalama değer teoremine dayanmaktadır ve $f'(x)$ 'in sürekli olmasını gerektirir.

İspat 3.2.4.

a) $|f'(x^*)| < 1$ olduğunu varsayalım. f' nin I aralığında sürekli olmasından dolayı $x \in [x^* - \epsilon, x^* + \epsilon]$ için $|f'(x)| < c < 1$ olacak şekilde $[x^* - \epsilon, x^* + \epsilon] \subset I$ alt aralığı vardır. $x_0 \in [x^* - \epsilon, x^* + \epsilon]$ için f fonksiyonuna ortalama değer teoremini uygularsak,

$$|x^* - f(x_0)| = |f(x^*) - f(x_0)| = |f'(\xi_1)| |x^* - x_0| \leq c |x^* - x_0|$$

Burada ξ_1 , x^* ile x_0 arasındadır. Bu nedenle $f(x_0) \in [x^* - \epsilon, x^* + \epsilon]$. Ortalama Değer Teoremini ve aynı eşitsizliği x_0 yerine $f(x_0)$ kullanarak uygulanabilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} |x^* - f^2(x_0)| &= |f^2(x^*) - f^2(x_0)| = |f'(f(\xi_2))f'(\xi_2)| |x^* - f(x_0)| \\ &\leq c |x^* - f(x_0)| \leq c^2 |x^* - x_0| \end{aligned}$$

Burada ξ_2 , x^* ile $f(x_0)$ arasındadır. $|x^* - f(\xi_2)| < c |x - \xi_2|$. Bu şekilde devam edersek, $t = 1, 2, \dots$ için

$$|x^* - f^t(x_0)| \leq c^t |x^* - x_0|,$$

Bundan dolayı $\lim_{t \rightarrow \infty} x_t = x^*$, x^* lokal asimptotik kararlıdır.

$|f'(x^*)| > 1$ olduğunu varsayalım. $x \in [x^* - \epsilon, x^* + \epsilon] \subset I$, $|f'(x)| > c > 1$ olacak şekilde $\epsilon > 0$ vardır.

$0 < |x_0 - x^*| < \epsilon$ için ortalama değer teoremini uygulayalım.

$|x^* - f(x_0)| = |f'(\xi_1)| |x^* - x_0| \geq c |x^* - x_0|$. Burada ξ_1 , x^* ile x_0 arasındadır. Bunu tekrar uygularsak $|x^* - f(x_0)| < \epsilon$ için $|x^* - f^2(x_0)| \geq c^2 |x^* - x_0|$ elde ederiz. Bu

argüman süresiz olarak devam edemez. $c^t|x^* - x_0| > \epsilon$ olacak şekilde t vardır. Bu nedenle $|x^* - f'(t)| > \epsilon$ eşitsizliğini sağlayan t vardır. x^* kararsızdır. (Allen, 1990)

Teorem 3.2.5. $x^*, x(n+1) = f(x(n))$ fark denkleminin denge noktası olmak üzere, $f'(x^*) = 1$ olduğunda aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

(i) $f''(x^*) \neq 0$ ise x^* kararsızdır.

(ii) $f''(x^*) = 0$ ise $f'''(x^*) > 0$ ise x^* kararsızdır.

(iii) $f''(x^*) = 0$ ise $f'''(x^*) < 0$ ise x^* asimptotik kararlıdır. (Elaydi, 2005)

Tanım 3.2.9. f fonksiyonun Schwarzian türevi:

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left[\frac{f''(x)}{f'(x)} \right]^2 \text{ şeklinde tanımlıdır. (Elaydi, 2005)}$$

Teorem 3.2.6. $x^*, x(n+1) = f(x(n))$ fark denkleminin denge noktası olmak üzere, $f'(x^*) = -1$ ise

(i) $Sf(x) < 0$ ise denge noktası asimptotik kararlıdır.

(ii) $Sf(x) > 0$ ise denge noktası kararsızdır. (Elaydi, 2005)

Örnek 3.2.9. $x_{t+1} = x_t^2 + 3x_t$ denkleminde denge noktasını bulup kararlılığını inceleyelim.

Denklemin denge çözümleri 0 ve -2 'dir. $f'(x) = 2x + 3$ olmak üzere $f'(0) = 3$ olduğundan Teorem 3.2.4 gereği "0" denge noktası kararsızdır. $f'(-2) = -1$ ise bu durumda Teorem 3.2.6 uygulanır. Schwarzian türevinde $f'(x) = -1$ yazılırsa

$$Sf(x) = -f'''(x) - \frac{3}{2}[f''(x)]^2 \text{ olur.}$$

Buradan $-2f'''(-2) - 3(f''(-2))^2 = -12 < 0$ olur. Teorem 3.2.6'ya göre " -2 " denge noktası asimptotik kararlıdır. (Elaydi, 2005)

Örnek 3.2.10. $x_{t+1} = \frac{ax_t}{b+x_t} = f(x_t)$, $a, b > 0$ eşitliğini göz önüne alalım. Denge noktası tanımı gereği $x^* = \frac{ax^*}{b+x^*}$ eşitliğini sağlar.

$x^*(x^* + b - a) = 0$ şeklinde sadeleştirirsek $x^* = 0$ ve $x^* = a - b$ şeklinde iki

denge noktasını elde ederiz.

Fonksiyonun türevi yardımıyla denge noktalarının yerel kararlılığı araştırılırsa, $f'(x) = \frac{ba}{(b+x)^2}$ fonksiyon türevinin $x^* = 0$ noktasındaki değeri $f'(0) = \frac{a}{b}$ dir. Bu durumda $\frac{a}{b} < 1$ ise ya da $a < b$ ise 0 noktası lokal asimptotik karardır. $a > b$ olduğunda sıfır kararsızdır Fonksiyonun $x^* = a - b$ deki türevine bakarsak, $f'(a - b) = \frac{b}{a}$. Bu nedenle $a > b$ olduğunda $x^* = a - b$ denge noktası lokal asimptotik karardır ($x^* > 0$ iken), $a < b$ olduğunda ise kararsızdır. (Allen, 1990)

Birinci Dereceden Denklemlerde Global Kararlılık:

Denge noktasının global kararlılığı başlangıç koşullarındaki tüm kısıtlamaları kaldırır. Global asimptotik kararlılıkta çözümler tüm başlangıç değerleri için denge noktasına yakınsar.

x^* , $x_{t+1} = f(x_t)$ fark denkleminin denge noktası olmak üzere,

$f: [0, a) \rightarrow [0, a)$, $0 < a \leq \infty$.

Tüm başlangıç değerleri için $x_0 \in (0, a)$, $\lim_{t \rightarrow \infty} x_t = x^*$ sağlanıyorsa, x^* denge noktası global karardır. Global atraktiflik ve global asimptotik kararlılık aynı değildir. Global atraktif denge noktası aynı zamanda lokal atraktiftir. Bu nedenle Global asimptotik karardır denge noktası lokal asimptotik karardır. f fonksiyonu sürekli ise global atraktif denge noktası lokal asimptotik karardır. Bu nedenle sürekli fonksiyonda global atraktiflikle global asimptotik kararlılık eşittir fakat f fonksiyonu sürekli değilse bu eşitlik geçerli olmayabilir. (Allen, 1990)

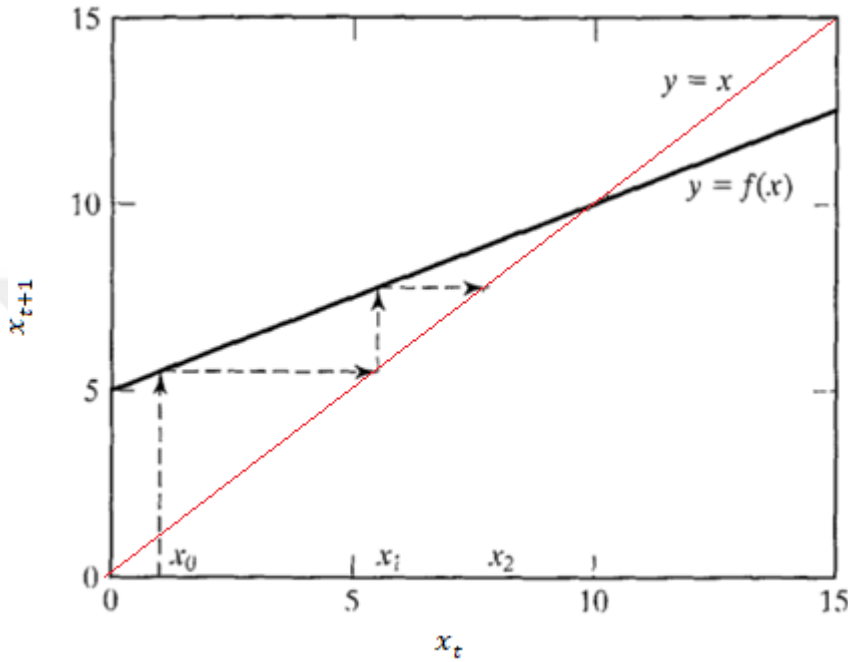
Bazı kararlılık araştırma yöntemleri aşağıdaki gibidir.

3.2.3.1.2. Cobweb Şeması

Cobweb Şeması birinci dereceden lineer olmayan fark denklemlerinin çözümlerinin davranışını incelemek için etkili bir metottur. Birinci dereceden $x_{t+1} = f(x_t)$ denklemini göz önüne alalım. $y = x$ doğrusuna ve $f(x) = y$ fonksiyonunu düzlemde gösterelim. Düzlemde x ekseninde x_t 'yi ve y ekseninde x_{t+1} 'i gösterelim. Verilen $(x_0, 0)$ noktasından dikey bir çizgiyle fonksiyon üzerindeki (x_0, x_1) noktasına gidilir. Bu

noktadan yatay bir şekilde $y = x$ doğrusu üzerindeki (x_1, x_1) noktasına gidilir. Daha sonra yine dikey bir şekilde aşağı ya da yukarı (x_1, x_2) noktasına varılır. Yine (x_1, x_2) noktasından hareket edilerek yatay bir çizgiyle (x_2, x_2) noktasına varılır ve bu şekilde devam eder.

Örnek 3.2.11



Şekil 3.4 (Allen, 1990)

Örnekteki yatay ve dikey çizgiler $y = x$ doğrusu ile $f(x) = y$ fonksiyonunun kesişim noktasına yakınsamaktadır.

3.2.3.1.3. Lineer Sistemlerin Kararlılığı

Fark denklem sistemleri diferansiyel denklem sistemleri ile benzerlik gösterir.

Fark denklem sistemleri $X(t + 1) = A(t)X(t)$ şeklindeyken

Diferansiyel denklem sistemleri: $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$ şeklinde gösterilir.

Diferansiyel denklem sistemlerinde kullanılan analiz yöntemleri fark denklem sistemlerinde de kullanılır.

Özdeğerler λ_1, λ_2 , ve özvektörler V_1 ve V_2 ise diferansiyel denklemlerdeki genel çözüm

$$X(t) = c_1 e^{\lambda_1(t)} V_1 + c_2 e^{\lambda_2(t)} V_2$$

Fark denklemlerindeki genel çözüm: $X(t) = c_1 \lambda_1^t V_1 + c_2 \lambda_2^t V_2$ şeklindedir.

İki boyutlu lineer fark denklem sistemleri inceleyelim.

$X(n+1) = AX(n)$ $n = 0,1,2, \dots$ sisteminin çözümünü arayalım.

$x(0)$ başlangıç kabul edilirse, $X(1) = AX(0)$

$$X(2) = AX(1) = A^2X(0)$$

$\vdots$

$$X(n) = A^nX(0)$$

elde ederiz. Burada A^n 'i tanımlayabilirsek sistem çözümünü elde etmiş oluruz. (Clinger, 2007)

Özdeğerler ve Bunlara Karşılık Özvektörler Elde Etmek

Fark denkleminin analizinin merkezinde A matrisi vardır. $X(n+1) = AX(n)$ lineer fark denklem sisteminde katsayılar matrisi $A \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ özdeğerlerini bulmak için $\det(\lambda I - A) = 0$ n . dereceden polinomunun n tane kökü bulunur. Bu polinom karakteristik denklem, köklerine de özdeğerler denir. Bunlara karşılık gelen özvektörler $\det(\lambda I - A)v = 0$ matrisinin çözümüdür.

Örnek 3.2.12.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ ise } \lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ 0 & \lambda - 4 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ 0 & \lambda - 4 \end{bmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 4) = 0 \text{ Özdeğerler: } \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4 \text{ tür.}$$

$$\text{Bunlara karşılık gelen özvektörler: } \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ 0 & \lambda - 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \text{ ise } v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

A matrisinin n . kuvvetini bulmak kolay olmadığından onun yerine A matrisi n . kuvvetini bulmanın daha kolay olduğu B matrisine dönüştürülebilir. $P^{-1}AP = B$ (P singüler) benzer matrisler aynı özdeğere sahiptir. A matrisi 2×2 reel değerli matris ise aşağıdaki matrislerden birine benzerdir.

$$1) J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad 2) J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad 3) \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

Özvektörlerin kolon vektörlerinden oluşan matris P olsun. $P^{-1}AP = J$ eşitliğini sağlar.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \text{ olmak üzere } P = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ şeklindedir.}$$

$$\text{Bu durumda } P^{-1}AP = J = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^n = PJ^nP^{-1} = P \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{bmatrix} P^{-1}$$

Jordan formunun 3 durumuna karşılık A^n için de üç durum vardır.

$$1) J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \text{ ise } A^n = P \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$2) J = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \text{ ise } A^n = P \begin{bmatrix} \lambda & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix} P^{-1}$$

$$3) J = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

$$w = \arctan \frac{\beta}{\alpha}, \quad \cos w = \frac{\alpha}{|\lambda_1|}, \quad \sin w = \frac{\beta}{|\lambda_1|}, \quad J = |\lambda_1| \begin{bmatrix} \cos w & \sin w \\ -\sin w & \cos w \end{bmatrix}$$

$$A^n = |\lambda_1|^n P \begin{bmatrix} \cos nw & \sin nw \\ -\sin nw & \cos nw \end{bmatrix} P^{-1}$$

Soruya devam edecek olursak,

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^n & \frac{1}{2} 2^n - \frac{1}{2} 4^n \\ 0 & 4^n \end{bmatrix}$$

$x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ başlangıç koşulu verilirse $x(n+1) = Ax(n)$ sisteminin özel çözümü

$x(n) = A^n x_0$ $n = 1, 2, \dots$ şeklinde yazılır.

$$\begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^n & \frac{1}{2} 2^n - \frac{1}{2} 4^n \\ 0 & 4^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2^n - 4^n \\ 2 \cdot 4^n \end{bmatrix} \text{ dir. (Clinger, 2007)}$$

İki Boyutlu Birinci Dereceden Lineer Denklem Sistemleri

$$\begin{cases} x_{t+1} = f(x_t, y_t) \\ y_{t+1} = g(x_t, y_t) \end{cases} \quad (3.9)$$

Lineer denklem sisteminin kararlılık durumu incelenmeden önce sistem denge noktası etrafında lineerleştirilir.

f ve g fonksiyonları denge noktasını içeren açık kümede 2. dereceden sürekli birer fonksiyon olmak üzere, fonksiyonları $(\bar{x}, \bar{y})$ denge noktası etrafında Taylor serisine açarsak,

$$f(x, y) = f(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} (x - \bar{x}) + \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} (y - \bar{y}) + \frac{\partial^2 f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x^2} \frac{(x - \bar{x})^2}{2!} + \frac{\partial^2 f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y^2} \frac{(y - \bar{y})^2}{2!} + \dots$$

$$\frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Big|_{(x, y) = (\bar{x}, \bar{y})} \text{ gösterimine göre } u = x - \bar{x} \text{ ve } v = y - \bar{y} \text{ olarak belirtilirse}$$

$f - \bar{x}$ yaklaşımı lineerdir.

$$f(x, y) \approx f(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} (x - \bar{x}) + \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} (y - \bar{y}) = \bar{x} + \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} u + \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} v.$$

Benzer bir yaklaşım g için de geçerlidir.

$$g(x, y) \approx \bar{y} + \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} u + \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} v.$$

$u_t = x_t - \bar{x}$ ve $v_t = y_t - \bar{y}$ olmak üzere (3.9) sistemi $(\bar{x}, \bar{y})$ denge noktası etrafında lineerleştirilirse $X_{t+1} = JX_t$ sistemi elde edilir. Burada $X_t = (u_t, v_t)^T$, J ise $(f, g)^T$ denge noktasındaki $(\bar{x}, \bar{y})$ Jacobian matrisidir.

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} & \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} \\ \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x} & \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Spektral Yarıçap (Radius): A matrisi $k \times k$ tipinde ve özdeğerleri $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ olmak üzere A matrisinin spektral yarıçapı $\rho(A)$ ile gösterilir ve $\rho(A) = \max_{i \in \{1, 2, \dots, k\}} \{|\lambda_i|\}$ olarak tanımlanır. (Allen, 1990)

Teorem 3.2.7. A matrisi $k \times k$ tipinde sabit matris olmak üzere

$$\rho(A) < 1 \Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} A^t = 0$$

Yerel asimptotik kararlılığı tanımlamak için tek şart f ve g fonksiyonlarının 1. dereceden sürekli kısmi türevlenebilir olmasıdır. Jacobian matrisin özdeğerleri lineer olmayan sistemin yerel kararlılığını tanımlar. Özdeğerler $|\lambda_i| < 1$ ise spektral yarıçap (Radius) $\rho(J) < 1$, teorem (3.2.7) gereği $\lim_{t \rightarrow \infty} J^t = 0$.

Jacobian matris $J(a_{ij})$ şeklinde gösterilmek üzere, a_{ij} bileşenlerinin her biri f ve g fonksiyonlarının denge noktasındaki kısmi türevlerini göstermektedir. Jacobian matrisinin öz değerleri $\det(J - \lambda I) = 0$ çözülerek elde edilir.

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

Determinant alındığında ifade sadeleştirilirse,

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0$$

$$\lambda^2 - \text{İz}(J)\lambda + \det(J) = 0.$$

Bu eşitliğe göre yerel kararlılığın incelenmesi iki duruma bağlıdır. Birincisi Jacobian matrisin izi diğeri de Jacobian matrisin determinantıdır. (Allen, 1990)

Teorem 3.2.8. $f(x, y), g(x, y)$ fonksiyonları $(\bar{x}, \bar{y})$ denge noktasını içeren $\mathbb{R}^2$ açık aralığında x ve y değişkenine göre birinci dereceden sürekli kısmi türevleri vardır.

$$x_{t+1} = f(x_t, y_t)$$

$$y_{t+1} = g(x_t, y_t)$$

Lineer olmayan sistemin denge noktasında $(\bar{x}, \bar{y})$ değerlendirilen Jacobian matrisi $|\dot{z}(J)| < 1 + \det(J) < 2$ ancak ve ancak $|\lambda_i| < 1$ ' dir. Bu durumda denge noktası yerel karardır.

$|\lambda_i| > 1$ olduğunda ise denge noktası kararsızdır. Bunun için 3 eşitsizlikten herhangi biri sağlanmalıdır.

$$|\dot{z}(J)| > 1 + \det(J), \quad |\dot{z}(J)| < -1 - \det(J) \quad \text{veya} \quad \det(J) > 1$$

İspat: İlk olarak $|\dot{z}(J)| < 1 + \det(J) < 2 \Leftrightarrow |\lambda_i| < 1$ olduğunu ispatlayalım.

$\tau = \dot{z}(J)$ ve $\delta = \det(J)$ olmak üzere, Jacobian matrisinin karakteristik denklemi $p(\lambda) = \lambda^2 - \tau\lambda + \delta = 0$. Karakteristik denklemin kökleri $\lambda_{1,2}$ özdeğerler olmak üzere, $\lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\delta}}{2}$ dir. Öncelikle $|\lambda_i| < 1$ olduğunda $|\tau| < 1 + \delta < 2$ olduğunu ispatlayalım. Özdeğerler reel veya kompleks olacak şekilde iki farklı durum incelenecektir. $|\lambda_i| < 1$ ve özdeğerler reel olsun. Bu durumda $\tau^2 > 4\delta$ dir. $\lambda^2 - \tau\lambda + \delta$ parabolü λ eksenini λ_1, λ_2 olmak üzere iki farklı noktada keser. $\lambda_2 < \lambda_1$ kabul edelim. Parabolün tepe noktası $\frac{\tau}{2}$ olduğunda göre $|\lambda_i| < 1$ ise $-1 < \lambda_2 \leq \frac{\tau}{2} \leq \lambda_1 < 1$.

Bu nedenle $\frac{|\tau|}{2} < 1$. $4 > \tau^2 \geq 4\delta$ olur. Buradan $\delta < 1$ elde edilir.

$$\text{Ayrıca } \left| \frac{\tau}{2} - 1 \right| > \left| \frac{\tau}{2} - \lambda_1 \right| \text{ ve } \left| \frac{\tau}{2} + 1 \right| > \left| \frac{\tau}{2} - \lambda_2 \right|.$$

$\left| \frac{\tau}{2} - \lambda_i \right| = \frac{\sqrt{\tau^2 - 4\delta}}{2}$ olduğundan $1 - \frac{|\tau|}{2} > \frac{\sqrt{\tau^2 - 4\delta}}{2}$ elde edilir. Her iki tarafın karesini alırsak $1 - |\tau| + \frac{\tau^2}{4} > \frac{(\tau^2 - 4\delta)}{4}$ elde ederiz. İfade sadeleştirilirse $1 + \delta > |\tau|$ bulunur. Bu nedenle $|\lambda_i| < 1$ ise $|\tau| < 1 + \delta < 2$ sağlanır.

İkinci Durum: $|\lambda_i| < 1$ ve özdeğerlerin karmaşık eşleniklerden oluştuğunu kabul edelim.

$$\text{Bu durumda } \tau^2 < 4\delta \text{ olmalıdır. } \lambda_{1,2} = \frac{\tau}{2} \pm i \frac{\sqrt{4\delta - \tau^2}}{2} \text{ ve } |\lambda_i|^2 = \frac{\tau^2}{4} + \delta - \frac{\tau^2}{4} = \delta$$

Bu nedenle $0 < \delta < 1$ dir. $\tau^2 < 4\delta$ ise $|\tau| < 2\sqrt{\delta}$ ve $2\sqrt{\delta} < 1 + \delta$ olur. Dolayısıyla $|\lambda_i| < 1$ olduğunda $|\tau| < 1 + \delta < 2$ sağlanır.

$|\tau| < 1 + \delta < 2$ olduğunu ve λ_i özdeğerlerin reel olduğunu varsayalım. Bu durumda $\tau^2 \geq 4\delta$. $\lambda_1 = \frac{\tau}{2} + \frac{\sqrt{\tau^2 - 4\delta}}{2}$ ve $\lambda_2 = \frac{\tau}{2} - \frac{\sqrt{\tau^2 - 4\delta}}{2}$. Bu nedenle $\lambda_1 \geq \lambda_2$.

$\lambda_1 < 1$ ve $\lambda_2 > -1$ olduğunu göstermeliyiz. $|\tau| < 1 + \delta$ eşitsizliğini $1 - |\tau| > -\delta$ şeklinde yeniden düzenleyip her iki tarafa $\frac{\tau^2}{4}$ ekleyelim. $\left(1 - \frac{|\tau|}{2}\right)^2 > \frac{\tau^2}{4} - \delta$ her iki tarafın

karekökünü alalım $1 - \frac{|\tau|}{2} > \frac{\sqrt{\tau^2 - 4\delta}}{2}$. Buradan

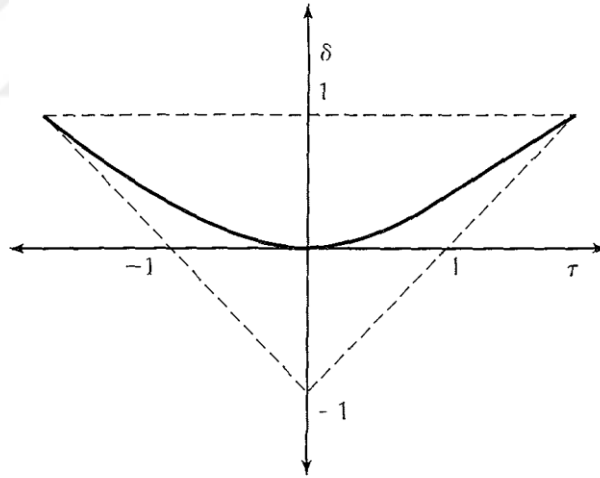
$$1 > \frac{|\tau|}{2} + \frac{\sqrt{\tau^2 - 4\delta}}{2} \geq \lambda_1 \quad \text{ve}$$

$$-1 < -\frac{|\tau|}{2} - \frac{\sqrt{\tau^2 - 4\delta}}{2} \leq \lambda_2.$$

$|\tau| < 1 + \delta < 2$ olduğunu ve λ_i özdeğerlerin karmaşık olduğunu varsayalım. $|\lambda_i|^2 = \delta < 1$ olur.

$\lambda_i > 1$ ise $(\bar{x}, \bar{y})$ denge noktası kararsızdır. $\text{İz}(J) > 1 + \det(J)$, $\text{İz}(J) < -1 - \det(J)$ veya $\det(J) > 1$ eşitsizliklerinden herhangi biri sağlandığında en az bir özdeğer ya karmaşık düzlemdeki birim dairede ya da birim daire dışında bulunur.

$\text{İz}(J) > 1 + \det(J)$ ise bir önceki ispat gereği özdeğerler reel ve $\lambda_1 > 1$ dir. Eğer $\text{İz}(J) < -1 - \det(J)$ ise özdeğerler reel ve $\lambda_2 < -1$. Son olarak özdeğerler kompleks eşleniklerse ve $\det(J) > 1$ ise $i = 1, 2$ için $\lambda_i > 1$ dir. Eğer $\det(J) > \frac{[\text{İz}(J)]^2}{4}$ ise özdeğerler kompleks eşleniktir.



Şekil 3.5 (Allen, 1990)

Şekil 3.5'te kesikli çizgilerle gösterilmiş üçgenel bölge asimptotik kararlılık bölgesidir. ($\lambda_i < 1$). Fark denklem sistemine ait $\tau - \delta$ düzleminde $\tau = \text{İz}(J)$ ve $\delta = \det(J)$ ' dir. Şekildeki eğri $\tau^2 = 4\delta$ eğrisidir. Bu eğrinin altında kalan özdeğerler reel, üzerinde kalan özdeğerler kompleksdir. τ ve δ parametreleri üçgenel bölgenin dışındaysa $|\lambda_i| > 1$ sağlayacak en az bir özdeğeri vardır. (Allen, 1990)

3.2.3.1.4. Lyapunov Doğrudan Yöntemi

Rus matematikçi Aleksandr Mikhailovich Lyapunov tarafından bulunan bu metod Lyapunov doğrudan veya Lyapunov ikinci metodu olarak adlandırılır. Çözümlerin kendisini tanımlamaktansa, anlamını ve nitel yapısını keşfetmeyi sağlar. Bu nedenle kararlılık teorisindeki en önemli metotlardan biridir. Bununla birlikte en büyük dezavantaj, verilen bir denklem için uygun Lyapunov fonksiyonunun belirlenmesinde yatmaktadır. Bu bölümde Lyapunov doğrudan yöntemi fark denklemlerine uyarlanacaktır.

$$x(n+1) = f(x(n)) \quad (3.10)$$

$f: G \rightarrow \mathbb{R}^k, G \subset \mathbb{R}^k$, sürekli $x^*, x(n+1) = f(x(n))$ denkleminin denge noktası olsun.

$V: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ reel değerli fonksiyon olsun. V farkı $x(n+1) = f(x(n))$ ile ilişkili olarak tanımlanırsa $\Delta V(x) = V(f(x)) - V(x)$

$$\Delta V(x(n)) = V(f(x(n))) - V(x(n)) = V(x(n+1)) - V(x(n))$$

$\Delta(V(x)) \leq 0$ ise V (3.10)'un çözümleri boyunca artmaz.

$V: H \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyon olmak üzere aşağıdaki iki şartı sağladığı takdirde V fonksiyonu H bölgesinde Lyapunov fonksiyonu olarak adlandırılır.

1) V, H üzerinde süreklidir.

2) x ve $f(x) \in H$ için $\Delta V(x) \leq 0$.

$B(x, \gamma), \mathbb{R}^k$ 'da x merkezli ve γ yarıçaplı açık yuvar olarak tanımlansın.

$B(x, \gamma) = \{y \in \mathbb{R}^k \mid \|y - x\| < \gamma\}$. Özel olarak, $B(0, \gamma) = B(\gamma)$ olarak gösterilecektir.

Reel değerli V fonksiyonunun $V(x^*) = 0$ ve $\gamma > 0$ için $\forall x \in B(x^*, \gamma), x \neq x^*,$

$V(x) > 0$ koşullarını sağlaması halinde x^* noktasına pozitif definit denir. (Kutay, 2010)

Teorem 3.2.9 $x(n+1) = f(x(n))$ denkleminin için x^* 'ın bir H komşuluğunda V Lyapunov fonksiyonu varsa ve bu fonksiyon x^* noktasında pozitif definit ise x^* denge noktası kararlıdır.

İspat: $B(x^*, a_1)$ açık yuvarı $G \cap H$ nın alt kümesi olacak şekilde $a_1 > 0$ sayısı seçilsin. f fonksiyonu sürekli olduğundan $x \in B(x^*, a_2)$ olduğunda $f(x) \in B(x^*, a_1)$ olacak şekilde $0 < a_2 < a_1$ vardır. $0 < \varepsilon \leq a_2$ olacak şekilde ε sayısı için

$\psi(\varepsilon) = \min\{V(x) \mid \varepsilon \leq \|x - x^*\| \leq a_1\}$ tanımlansın. Ara değer teoremi gereği

$\|x - x^*\| < \delta$ olduğunda $V(x) < \psi(\varepsilon)$ olacak şekilde $\delta \in (0, \varepsilon)$ sayısı bulunur. Buradan

$x_0 \in B(x^*, \delta)$ alındığında $\forall n \geq 0$ için $x(n) \in B(x^*, \varepsilon)$ olduğu söylenebilir. Aksi halde $1 \leq r \leq m$ için $x(r) \in B(x^*, \delta)$ ve $x(m+1) \notin B(x^*, \varepsilon)$ olacak şekilde $x_0 \in B(x^*, \delta)$ elemanı ve bir $m > 0$ sayısı vardır. $x(m) \in B(x^*, \varepsilon) \subset B(x^*, \alpha_2)$ olmasından dolayı $x(m+1) \in B(x^*, \alpha_1)$ olur. Buradan $V(x(m+1)) \geq \psi(\varepsilon)$ bulunur ki bu çelişkidir. Çünkü $V(x(m+1)) \leq \dots \leq V(x_0) < \psi(\varepsilon)$ olmalıdır. Dolayısı ile $x_0 \in B(x^*, \delta)$ alındığında $\forall n \geq 0$ için $x(n) \in B(x^*, \varepsilon)$ ifadesi doğrudur. Bu da kararlılığı sağlar.

Asimptotik kararlılık için ise Teorem 3.2.9' un hipotezlerine ek olarak $x \neq x^*$ olmak üzere $x, f(x) \in H$ için $\Delta V(x) < 0$ olmalıdır.

Asimptotik kararlılığın ispatı için $x^* \in B(x^*, \delta)$ olmak üzere $\forall n \geq 0$ için $x(n) \in B(x^*, \varepsilon)$ olmaktadır. Eğer $\{x(n)\}$, x^* 'a yakınsamıyorsa o halde $y \in \mathbb{R}^k$ 'a yakınsayan bir $\{x(n_i)\}$ alt dizisi vardır. $E \subset B(x^*, \alpha_1)$ ve $x^* \notin E$ olmak üzere, E , y 'nin açık bir komşuluğu olsun. E üzerinde iyi tanımlı ve sürekli $h(x) = \frac{V(f(x))}{V(x)}$ fonksiyonunu tanımlayalım. $\forall x \in E$ için $h(x) < 1$ olur. Bu durumda $\eta \in (h(y), 1)$ olduğunda $x \in B(y, \alpha)$ için $h(x) \leq \eta$ sağlayan $\alpha > 0$ bulunur. Bu nedenle yeterince büyük n_i için, $V(f(x(n_i))) \leq \eta V(x(n_i - 1)) \leq \eta^2 V(x(n_i - 2)) \leq \dots \leq \eta^{n_i} V(x_0)$ olur. Buradan $\lim_{n_i \rightarrow \infty} V(x(n_i)) = 0$ bulunur. $\lim_{n_i \rightarrow \infty} V(x(n_i)) = V(y)$ olduğundan $V(y) = 0$ olur. Bu da $x^* = y$ anlamına gelir.

Asimptotik kararlılık kriterlerine ilave olarak $G = H = \mathbb{R}^k$ ve $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$ oluyorsa, o zaman x^* denge noktası global asimptotik kararlıdır. (Kutay, 2010; Elaydi, 2005'ten)

Örnek 3.2.13. $x_1(n+1) = \frac{x_2(n)}{[1+x_1^2(n)]}$

$x_2(n+1) = \frac{x_1(n)}{[1+x_2^2(n)]}$ sistemini ele alalım. (0,0) bu sistemin denge

noktasıdır.

$V, \mathbb{R}^2$ 'de sürekli ve pozitif definit olan Lyapunov fonksiyonu

$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ şeklinde seçilebilir. Burada $x(n) = (x_1(n), x_2(n))$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \Delta V(x(n)) &= V(x(n+1)) - V(x(n)) \\ &= V(x_1(n+1), x_2(n+1)) - V(x_1(n), x_2(n)) \\ &= x_1^2(n+1) + x_2^2(n+1) \end{aligned}$$

$$= \frac{x_2^2(n)}{[1+x_1^2(n)]^2} + \frac{x_1^2(n)}{[1+x_2^2(n)]^2} - x_1^2(n) - x_2^2(n) \text{ ifadesi sadeleştirilirse}$$

$$= -2x_1^2(n)x_2^2(n) - x_1^4(n)x_2^2(n) - x_2^4(n)x_1^2(n) \text{ elde edilir.}$$

$(x_1(n), x_2(n)) \neq (0,0)$ olmak üzere $\Delta V(x) < 0$ dır. Bu durumda $x^* = (0,0)$ denge noktası asimptotik kararlıdır. Aynı zamanda $\lim_{\|(x_1(n), x_2(n))\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$ olduğundan denge noktası global asimptotik kararlıdır denir.

3.2.3.2 Diferansiyel Denklemlerinde Kararlılık

Bu bölümde yalnızca 1. dereceden diferansiyel denklemler kullanılacaktır. Daha yüksek mertebeli diferansiyel denklemler $\frac{d^n x}{dt^n} = g(\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}, \dots, x)$ 1. dereceli sistemle açıklanabilir. Otonom diferansiyel denklem sistemi

$$\frac{dX}{dt} = F(X) \quad (3.11)$$

şeklinde olsun. Burada $X = (x_1, \dots, x_n)^T$, $F(X) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(x_1, \dots, x_n))^T$, burada F , t 'ye bağlı değildir. (3.11) başlangıç değer problemi $X(t_0) = X_0$ başlangıç koşulunu sağlar. Aksi belirtilmedikçe başlangıç değer problemlerinin benzersiz çözümü olduğu ve çözümün $[t_0, \infty)$ aralığında olduğu kabul edilir.

$X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ çözümü $\mathbb{R}^n$ 'de uzanan parametrik bir eğridir. Bu eğri sistemin yolu veya yörüngesi olarak adlandırılır. Çözümün $\mathbb{R}^n$ deki hareketi $\frac{dX}{dt}$ hızı ile tanımlanır. Çözümün çizildiği $\mathbb{R}^n$ bölgesine $n = 3$ ise faz uzayı, $n = 2$ ise faz düzlemi, $n = 1$ ise faz çizgisi denir. Başlangıç değer problemlerinin tek ve benzersiz çözümlerinin yörüngeleri kesişmezler. $\mathbb{R}^n$ 'de ya aynı yolu izlerler ya da kesişmeden farklı yolları izlerler. (Allen, 1990)

Tanım 3.2.10. Bir diferansiyel sistemin denge çözümü $F(\bar{X}) = 0$ olacak şekilde $\bar{X}$ sabit çözümdür.

Tanım 3.2.11. $\frac{dX}{dt} = F(X)$ sisteminin denge çözümü $\bar{X}$ olmak üzere her $X(t)$ çözümü için $X(t_0) = X_0$ başlangıç koşuluyla birlikte $\forall \varepsilon > 0$ olduğunda $\|X_0 - \bar{X}\| < \delta$ olacak şekilde $\delta > 0$ varsa $\bar{X}$ denge çözümü yerel kararlıdır denir. Yerel kararlılık durumunda $\forall t \geq t_0$ için $\|X(t) - \bar{X}\| < \varepsilon$ şartı sağlanır. Yerel kararlılık olmadığı durumda denge çözümü kararsızdır. (Allen, 1990)

Not: Burada $X_1 = (x_{11}, \dots, x_{1n})^T$ ve $X_2 = (x_{21}, \dots, x_{2n})^T \in \mathbb{R}^n$, olmak üzere

$\|X_1 - X_2\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_{1i} - x_{2i})^2}$ öklid normu olarak tanımlanır.

Tanım 3.2.12. $\bar{X}$ denge çözümü yerel kararlıysa ve $\|X_0 - \bar{X}\| < \gamma$ olacak şekilde $\gamma > 0$ var ve $\lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t) - \bar{X}\| = 0$ oluyorsa, denge çözümü asimptotik yerel kararlıdır denir.

Örnek 3.2.14. $\frac{dX}{dt} = AX$, $X(0) = X_0 = (x_0, y_0)^T$ başlangıç değer problemini göz önüne alırsak,

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$ ve denge çözümü sistemin orijini $X = 0$ olmak üzere,

$X(t) = (x(t), y(t))^T$ çözümü $X(t) = x_0 e^{a_{11}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y_0 e^{a_{22}t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sağlar. Eğer $i = 1, 2$

için $a_{ii} < 0$ ise $\|X_0\| < \varepsilon$ bu durumda $\|X(t)\| < \varepsilon$ olur. Böylece sıfır denge noktası yerel kararlıdır denebilir. Tüm başlangıç değerleri için çözüm sifıra yakınsadığından sıfır denge noktası global asimptotik kararlıdır da denebilir. $i = 1, 2$ için $a_{ii} > 0$ olursa sıfır denge noktası kararsız olacaktır. Örneğin $a_{11} > 0$ ve $x_0 > 0$ olduğunda

$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \infty$ olacaktır. $\forall \delta > 0$ ve $x_0 > 0$ için $\|X_0\| < \delta$ olduğunda $\|X(t)\| > \varepsilon$

sağlayan en az bir t vardır. (Allen, 1990)

3.2.3.2.1 Birinci Dereceden Denklemlerde Yerel Kararlılık

Birinci dereceden otonom diferansiyel denklem $\frac{dx}{dt} = f(x)$ şeklinde olsun.

Denklemin denge noktası x^* ve $u(t) = x(t) - x^*$ olsun. f fonksiyonu x^* denge noktasını içeren aralıkta ikinci dereceden sürekli türevlenebilir olsun. Bu durumda

$\frac{du}{dt} = \frac{dx}{dt}$ dir. f fonksiyonunu x^* denge noktası etrafında Taylor serisine açarsak,

$\frac{du}{dt} = f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*) + f''(\xi) \frac{(x - x^*)^2}{2}$, $\xi \in (x, x^*)$. x^* denge noktası

olduğundan $f(x^*) = 0$ olur. Bu durumda denklem lineerleştirilirse

$$\frac{du}{dt} = f'(x^*)u \quad (3.12)$$

olur. Elde edilen (3.12) denklemi denge noktası yakınındaki x 'in orijinal diferansiyel denklem çözüm yoluna yaklaşır çünkü $(x - x^*)^2$ terimi yeterince küçük yapılabilir. Bu durumda (3.12) lineer denklemi x^* denge noktasının yerel kararlılığını tanımlar. $f'(x^*) < 0$ olduğunda lineer çözüm sifıra yakınsar. Bundan dolayı $x(t_0)$, x^* 'ın

yakınındadır. $x(t)$, x^* denge noktasına yakınsar. $f'(x^*) > 0$ olduğunda $x(t)$ 'nin yakınsamadığı başlangıç koşulları vardır. (Allen, 1990)

Teorem 3.2.10. x^* , $\frac{dx}{dt} = f(x)$ diferansiyel denklem sisteminin denge noktası olmak üzere f' , x^* 'ı içeren I açık aralığında sürekli olsun. $f'(x^*) < 0$ olduğunda x^* yerel asimptotik kararlıdır. $f'(x^*) > 0$ olduğunda ise x^* kararsızdır. (Allen, 1990)

Örnek 3.2.15. Lojistik Büyüme Modeli: İlk olarak 1837 yılında Belçikalı matematikçi Pierre Velhust tarafından tanıtılan bu model diferansiyel denklemlerde nüfus artışı için en iyi bilinen modellerdendir. Bu modelde büyüme oranı a popülasyon büyüklüğünün azalan bir fonksiyonudur. $a(x) = r\left(1 - \frac{x}{K}\right)$. Popülasyon büyüklüğü K 'dan büyükse büyüme oranı negatiftir, $x < K$ ise büyüme oranı pozitifdir. Lojistik diferansiyel denklem $\frac{dx}{dt} = r\left(1 - \frac{x}{K}\right)x$ şeklindedir. Burada $r > 0$ içsel büyüme oranı ve $K > 0$ taşıma kapasitesidir. Denklemin $x = 0$ ve $x = K$ olmak üzere iki denge noktası vardır. Diferansiyel denklem değişkenlerine ayrılarak çözülebilir.

$$x(t) = \frac{x(0)K}{x(0) + (K - x(0))e^{-rt}}$$

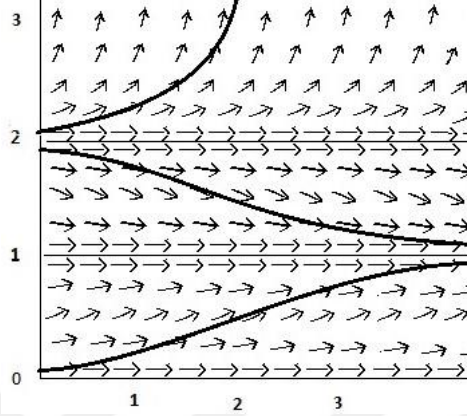
$x(0) > 0$ ise nüfus büyüklüğü taşıma kapasitesine yaklaşır. $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = K$. Bu nedenle pozitif başlangıç koşulları için $x = K$ denge noktası global asimptotik kararlıdır. Teorem (3.2.10) gereği $f'(x) = r\left(1 - \frac{2x}{K}\right)$ olduğundan $f'(0) = r > 0$ ve $f'(K) = -r$ olur. Bu durumda sıfır denge noktası ise kararsız, K ise yerel asimptotik kararlıdır. (Allen, 1990)

3.2.3.2.2. Faz Düzlemi Analizi

Faz düzlemi analizi, birinci dereceden otonom diferansiyel denklemlerde yerel kararlılığı belirlemek için kullanılan alternatif bir geometrik yaklaşımdır. Otonom olmayan diferansiyel denklemin genel formu $\frac{dx}{dt} = f(x, t)$ şeklindedir. $f(x, t)$, (t, x) noktasındaki $x(t)$ çözümüne teğet çizgisinin eğimidir. Otonom diferansiyel denklemlerde $\frac{dx}{dt} = f(x)$ eğimler zamana göre (t) değişmeyeceği için sadece x eksenindeki akış yönünü belirlemek yeterlidir. Buna göre $\frac{dx}{dt} > 0$ ise akış yönü pozitif, $\frac{dx}{dt} < 0$ ise akış yönü negatiftir. (Allen, 1990)

Örnek 3.2.16. $\frac{dx}{dt} = x(1-x)(2-x) = f(x)$ denkleminin önce denge çözümleri belirlenir. $x_1^* = 0$, $x_2^* = 1$, $x_3^* = 2$ olur.

$\frac{dx}{dt} = f(x)$ ise $(0,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$ aralıklarında akış yönü belirlenir $f(x) > 0$ ise x artar, $f(x) < 0$ ise x azalır. Buna göre grafik aşağıdaki gibi olur.



Şekil 3.6

Şekilde (3.6) görüldüğü gibi $x_2^* = 1$ denge noktası yerel asimptotik kararlıdır. (Allen, 1990)

İki boyutlu lineer sistemlerin davranışları faz düzleminde ($x - y$ düzleminde) incelenecektir. $X = (x, y)^T$ ve $A = (a_{ij})$ olmak üzere $\frac{dX}{dt} = AX$ aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_{11}x + a_{12}y \\ \frac{dy}{dt} &= a_{21}x + a_{22}y \end{aligned} \quad (3.13)$$

Sisteminin denge çözümü orijindir ($x = 0, y = 0$). $\det(A) \neq 0$ olduğunu varsayarsak orijin sistemin tek denge noktasıdır.

(3.13) lineer sisteminin çözümleri A matrisinin izine ve determinantına bağlı olan A matrisinin özdeğerleri ile karakterize edilir. Orijin dört şekilde sınıflandırılır. Düğüm, eyer, merkez ve spiral. Bunlara ek olarak orijini kararlı ve kararsız olarak ayırabiliriz.

Özdeğerlere göre orijinin kararlılığı belirlenebilir.

- A matrisinin özdeğerleri negatif ya da reel kısımları negatif ise orijin asimptotik kararlıdır.
- A matrisinin özdeğerleri pozitif olmayan veya reel kısmı pozitif olmayan ise orijin kararlıdır.

- A matrisinin en az bir özdeğeri pozitif veya pozitif reel kısma sahipse orijin kararsızdır.

Orijin asimptotik kararlıysa çözümler orijine yakınsar. (Allen, 1990)

Sonuç 3 2.1.

(3.13) lineer diferansiyel denklem sisteminin karakteristik denklemi

$$\lambda^2 - \text{İz}(A)\lambda + \det(A) = 0 \text{ şeklindedir.}$$

$$\frac{dX}{dt} = AX, \quad A \text{ 2x2 tipinde sabit matris ve } \det(A) \neq 0 \text{ olmak üzere,}$$

$\text{İz}(A) < 0$ ve $\det(A) > 0$ ise orijin asimptotik kararlıdır.

$\text{İz}(A) \leq 0$ ve $\det(A) > 0$ ise orijin kararlıdır.

$\text{İz}(A) > 0$ veya $\det(A) < 0$ orijin kararsızdır.

Orijinin kararlılığının yanında genel lineer diferansiyel denklem sistemleri için orijin düğüm, eyer, merkez ve spiral olmak üzere 4 farklı şekilde sınıflandırılabilir. Bu sınıflandırmanın olması için orijinin tek denge noktası olması gerekmektedir.

$\det(A) \neq 0$ olduğu varsayılacaktır. Sınıflandırma şeması özdeğerlerin reel veya kompleks olmasına, reel özdeğerlerin pozitif ya da negatif olmasına aynı şekilde kompleks özdeğerlerin reel kısmının pozitif ya da negatif olmasına bağlıdır. (Allen, 1990)

Tanım 3.2.13. λ_1 ve λ_2 reel özdeğerler olsun. Bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler V_1 ve V_2 olmak üzere, V_1 ve V_2 çözümlerin orijine doğru veya orijinden uzağa gittiği yönleri belirtir. Örneğin $\lambda_1 > 0$ olduğunda çözümler V_1 boyunca orijinden uzaklaşırken, $\lambda_1 < 0$ olduğunda çözümler V_1 boyunca orijine yaklaşır.

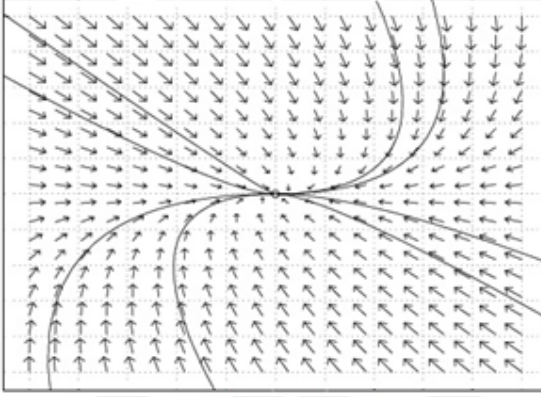
1. **Düğüm Noktası:** Her iki özdeğerin aynı işareti alması durumunda oluşur ($\lambda_1 \leq \lambda_2 < 0$ veya $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$). Özdeğerler eşit ve iki lineer bağımsız özvektör varsa düğüm noktası uygun yoksa uygun olmayan düğüm noktası olarak adlandırılır. Uygun düğüm noktası aynı zamanda yıldız çözüm olarak adlandırılabilir. A matrisinin iki özdeğeri birbirine eşit ise düğüm noktası aynı zamanda dejenere düğüm noktası olarak adlandırılır.

2. **Eyer Noktası:** Özdeğerler zıt işaretli olduğunda oluşur ($\lambda_1 < 0 < \lambda_2$).

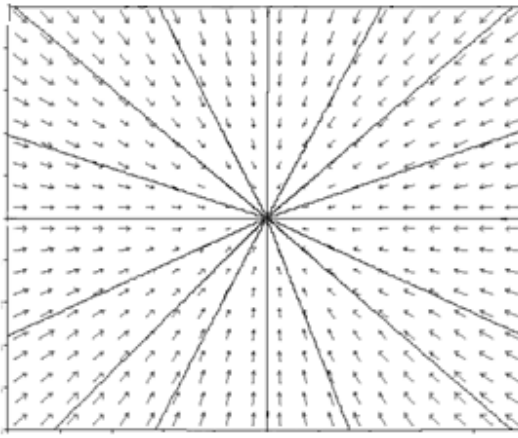
Tanım 3.2.14. Özdeğerler kompleks olsun. $\lambda_{1,2} = a \pm ib$, $b \neq 0$. $\frac{dX}{dt} = AX$ lineer denklem sisteminin çözümleri $\cos bt$ ve $\sin bt$ faktörlerini içerdiğinden denge noktası etrafında sarmal şekildedir. Bu sarmal noktalara odak noktası denir. Eğer gerçek kısım $a < 0$ ise $e^{at}\cos bt$ veya $e^{at}\sin bt$ içeren çözümler orijine doğru içe sarılır. Eğer

gerçek kısım pozitifse $a > 0$ ise çözümler dışa doğru sarmaldır. $a = 0$ olduğunda ise çözümler orijini çevreleyen kapalı eğri şeklindedir. Buna da merkez denir.

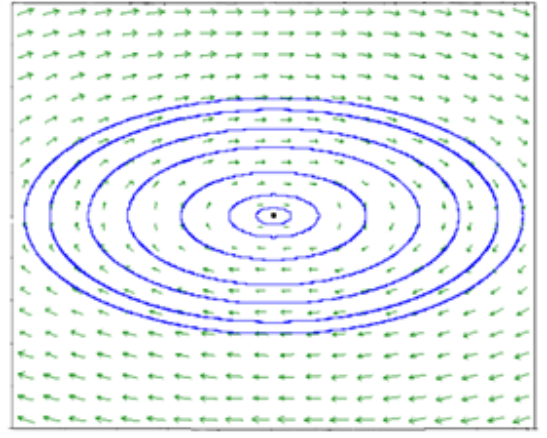
Düğüm veya sarmal noktalar özdeğerlerin işaretine bağlı olarak asimptotik kararlı veya kararsız olabilir. Eyer noktaları bir doğrultu boyunca yörüngeleri iter dolayısıyla daima kararsızdır. Merkez noktaları ise kararlıdır fakat asimptotik kararlı değildir.



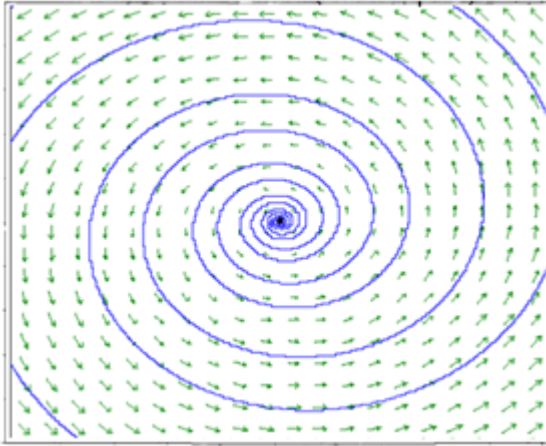
Şekil 3.7 Kararlı Uygun Olmayan Düğüm Noktası (Stable Improper Node) (Tseng, 2008)



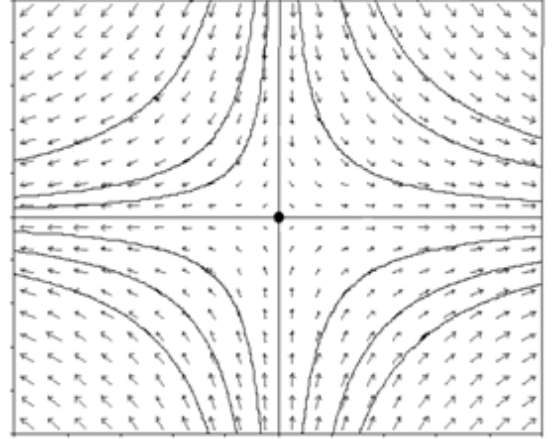
Şekil 3.8 Kararlı Uygun Nokta , Yıldız Nokta (Stable Proper Node) (Tseng, 2008)



Şekil 3.9 Merkez Noktası (Center) (Tseng, 2008)



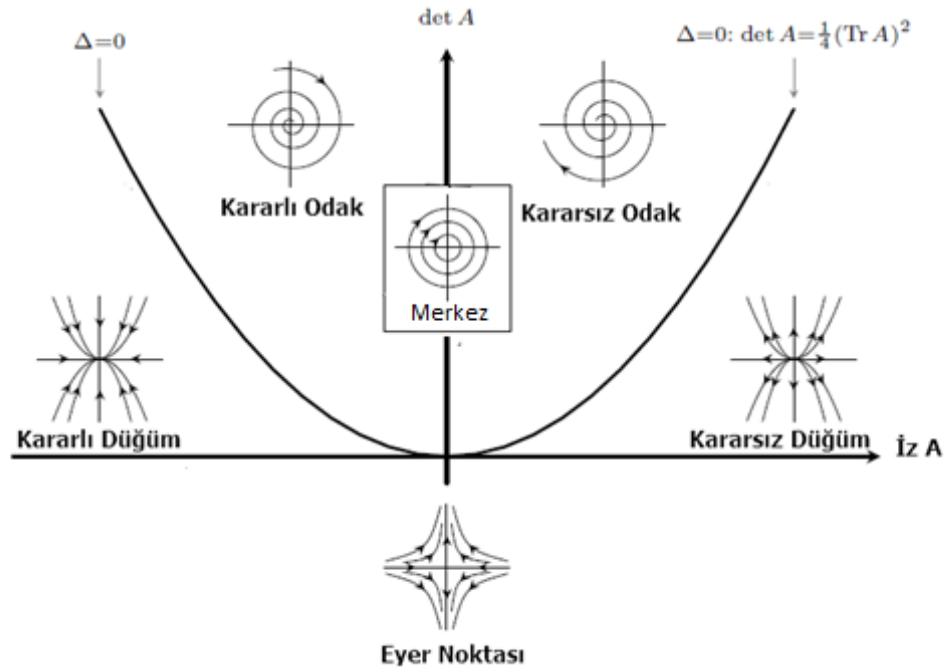
Şekil 3.10 Odak Noktası
(Stable Spiral)(Tseng, 2008)



Şekil 3.11 Eyer Noktası (Saddle)
(Tseng, 2008)

3.13 lineer diferansiyel denklem sisteminin karakteristik denklemi,
 $\lambda^2 - \text{İz}(A)\lambda + \det(A) = 0$ olmak üzere sınıflandırma işlemini $\det(A)$ ve $\text{İz}(A)$ ' ya
 $(\text{Tr } A)$ bağlı olarak yapabiliriz.

$\tau = \text{İz}(A)$ ve $\delta = \det(A)$ olsun. Karakteristik polinomunun kökleri,
 $\lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\delta}}{2}$ olur. Diskriminant $\gamma = \tau^2 - 4\delta$ şeklinde tanımlıdır. Buna göre
kararlılık şeması aşağıdaki gibi gösterilebilir. (Allen, 1990)



Şekil 3.12(Anonymous, 2019)

Örnek 3.2.17. Aşağıdaki diferansiyel denklem sisteminin sıfır kararlı odak denge noktasına sahip olabilmesi için a ne olmalıdır?

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x + ay$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix}$$

Sıfır denge noktasının kararlı odak noktası olabilmesi için diskriminantın ve $\text{İz}(A)$ 'nın sıfırdan küçük olması gerekir.

Bu durumda $\text{İz}(A) = a < 0$ ve $\det(A) = \delta = 1$ olduğundan $\gamma = \tau^2 - 4\delta = a^2 - 4 < 0$ bulunur. Böylece $-2 < a < 0$ elde edilir. (Allen, 1990)

3.2.3.2.3 Lyapunov Doğrudan Yöntemi

Aleksandr Mikhailovich Lyapunov tarafından 19. yüzyılın sonlarında geliştirilen yöntem hem diferansiyel denklemlerde hem de fark denklemlerinin kararlılık incelenmesinde kullanılmaktadır. Fark denklemlerinde belirtildiği gibi denklemleri çözmek yerine kritik bir noktanın kararlılığı veya dengesizliği ile ilgili sonuçlar uygun bir yardımcı fonksiyon kullanılarak elde edilir. Yöntemin tek sınırlılığı uygun fonksiyon bulmanın zor olmasıdır.

Bu yöntemin pratik bir önemi vardır çünkü dengenin çekim havzası için değerlendirmeler elde edilebilir. $U \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere U 'da başlayan her çözüm yine U 'nun içinde kalan denge noktasına yaklaşıyorsa U 'ya çekim havzası (basin of attraction) denir. Yöntem n diferansiyel denklemden oluşan otonom veya otonom olmayan sistemlere uygulanabilir. Bu bölümde yöntem aşağıdaki iki boyutlu otonom sistem için gösterilmektedir.

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y) \text{ ve } \frac{dy}{dt} = g(x, y) \quad (3.14)$$

Amaç bu denklem sistemiyle ilgili belirli özelliklere sahip Lyapunov fonksiyonunu bulmaktır. Burada denge noktasının orijin olduğu kabul edilmektedir. Denge noktasının orijin olmadığı durumlarda $u = x - x^*$, $v = y - y^*$ şeklinde değişken değişikliği yapılarak denge noktası orijine taşınabilir. (Allen, 1990)

Tanım 3.2.15. (Pozitif Definit) $U, \mathbb{R}^2$ 'de tanımlı orijini içeren açık aralık olsun. Reel değerli V fonksiyonu, $V: U \rightarrow \mathbb{R}$ $[(x, y) \in U, V(x, y) \in \mathbb{R}]$ aşağıdaki koşulları sağladığı

takdirde pozitif definit olarak adlandırılır.

$$(i) V(0,0) = 0$$

$$(ii) \forall (x, y) \in U \text{ için } (x, y) \neq 0 \text{ ise } V(x, y) > 0$$

$-V$ pozitif definit olduğunda V 'ye negatif definit denir. (Allen, 1990)

Tanım 3.2.16. V orijinin açık komşuluğunda pozitif definit bir fonksiyon ve

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y), \frac{dy}{dt} = g(x, y) \text{ olmak üzere } \forall (x, y) \in U - \{(0,0)\} \text{ için } \frac{dV(x,y)}{dt} \leq 0 \text{ oluyorsa}$$

V fonksiyonu Lyapunov fonksiyonu olarak tanımlanır.

Teorem 3.2.11 $(0,0)$ noktası (3.14) sisteminin denge noktası ve V ise orijinin U komşuluğunda pozitif definit bir C^1 fonksiyonu olsun.

$$(i) (x, y) \in U - \{(0,0)\} \text{ için } \frac{dV(x,y)}{dt} \leq 0 \text{ ise } (0,0) \text{ denge noktası kararlıdır.}$$

$$(ii) (x, y) \in U - \{(0,0)\} \text{ için } \frac{dV(x,y)}{dt} < 0 \text{ ise } (0,0) \text{ denge noktası asimptotik kararlıdır.}$$

$$(iii) (x, y) \in U - \{(0,0)\} \text{ için } \frac{dV(x,y)}{dt} > 0 \text{ ise } (0,0) \text{ denge noktası kararsızdır.}$$

İspat: (i) Yeterince küçük $\varepsilon > 0$ için $\|(x, y)\| \leq \varepsilon$ orijinin U komşuluğunda bulunur.

Komşuluğun sınırındaki minimum V değeri m olsun ($\|(x, y)\| = \varepsilon$). V pozitif definit ve

$\|(x, y)\| = \varepsilon$ dizisi kapalı ve sınırlı olduğundan $m > 0$ olur. $V(x, y) < m$ için

$\|(x, y)\| < \delta$ olacak şekilde $0 < \delta \leq \varepsilon$ seçelim. V sürekli ve $V(0,0) = 0$ olduğundan

böyle bir $\delta > 0$ mevcuttur. (x_0, y_0) başlangıç değerleri olmak üzere $\|(x_0, y_0)\| < \delta$

ise $t \geq 0$ olduğunda, $\|(x_0, y_0)\| \leq \varepsilon$ sağlar çünkü $\frac{dV}{dt} \leq 0$ ise $t \geq 0$ için

$V(x(t), y(t)) \leq V(x_0, y_0) < m$ olur. Orijin kararlıdır.

(ii) $V(x(t), y(t))$ fonksiyonu U da bulunan çözümler boyunca azalır. Bu nedenle

$t \rightarrow \infty$, $V(x(t), y(t))$ limite yakınsar. Varsayalım $V \rightarrow l > 0$ olsun. $\frac{dV(x(t), y(t))}{dt}$ düzgün

sürekliliğinden $\frac{dV(x(t), y(t))}{dt} \rightarrow 0$ orijin dışındaki dairesel bölgede devam etmesi gerekir.

$-\frac{dV}{dt}$ pozitif definit ve sadece orijinde $\frac{dV}{dt} = 0$ olduğundan $V \rightarrow l$ ise $V(x(t), y(t))$ orijine

eğilim gösteremez. Bu ise mümkün değildir. Dolayısıyla $(x(t), y(t)) \rightarrow (0,0)$ iken

$V(x(t), y(t))$ orijine yakınsar. Bu durumda orijin asimptotik kararlıdır. (Allen, 1990)

Örnek 3.2.18

Lotka-Volterra av avcı sistemini göz önüne alalım.

$$\frac{dx}{dt} = x(a - y)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(-b + x), \quad a, b > 0$$

Denge noktası $(x^*, y^*) = (b, a)$ olur. Denge noktası karardlıdır fakat asimptotik karardlı değildir. Bu sistem için kurulan sürekli ve $x, y > 0$ için türevlenebilen $V(x, y)$ Lyapunov fonksiyonu $V(x, y) = (x - b - b \ln(\frac{x}{b})) + (y - a - a \ln(\frac{y}{a}))$ şeklindedir. $V(b, a) = 0$. $V(x, y)$ fonksiyonunun pozitif definit olduğunu gösterelim. $V(x, y)$ fonksiyonunun kısmi türevlerini alırsak,

$$V_x = 1 - \frac{b}{x}, \quad V_{xx} = \frac{b}{x^2}, \quad V_{xy} = 0$$

$$V_y = 1 - \frac{a}{y}, \quad V_{yy} = \frac{a}{y^2}$$

$V_x = V_y = 0$ kritik noktalardır. $x = b$ ve $y = a$. $V(b, a) = 0$ noktası $V_{xx}V_{yy} - V_{xy}^2 > 0$ ve $V_{xx} = \frac{b}{x^2} > 0$ olduğundan yerel minimumdur. Bu nedenle $x, y > 0$ için $V(x, y) > 0$ $x \neq b, y \neq a$ olmak üzere $V(x, y)$, $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) | x > 0, y > 0\}$ kümesinde pozitif definittir.

$$\frac{dV}{dt} = V_x \frac{dx}{dt} + V_y \frac{dy}{dt}$$

$$= \left(1 - \frac{b}{x}\right)x(a - y) + \left(1 - \frac{a}{y}\right)y(-b + x) = (x - b)(a - y) + (y - a)(x - b) = 0$$

Bu durumda Teorem 3.2.11 (i) gereği (b, a) denge noktası $\mathbb{R}_+^2$ bölgesinde karardlıdır. (Allen, 1990)

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

4.1 Diferansiyel Denklemlerle İki Tür Rekabetinin Modellenmesi ve Kararlılığın Araştırılması

Bazı kapalı ortamlarda sınırlı bulunan gıda için rekabet eden benzer iki tür olduğunu varsayalım; örneğin, bir havuzda bulunan ve birbirlerini avlamayan, ancak mevcut yiyecekler için rekabet eden iki tür balık olsun. x ve y , t zamanındaki popülasyonlarını gösterebilir. Türlerin her birinin popülasyonunun diğerinin yokluğunda lojistik denklem tarafından kontrol edildiğini varsayalım.

$$\frac{dx}{dt} = x(\epsilon_1 - \sigma_1 x) \quad (4.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(\epsilon_2 - \sigma_2 y) \quad (4.2)$$

Burada ϵ_1 ve ϵ_2 iki popülasyonun büyüme oranını, $\frac{\epsilon_1}{\sigma_1}$ ve $\frac{\epsilon_2}{\sigma_2}$ ise iki popülasyonun doyma seviyesini temsil eder. Her iki tür mevcut olduğunda, her bir tür diğer türün gıda tedarikini etkileyecektir. Birbirlerinin büyüme oranını ve doyma seviyelerini azaltacaklardır. y türlerinin varlığından dolayı x türlerinin azalmasını açıklamak için (4.1) denklemindeki $(\epsilon_1 - \sigma_1 x)$ ifadesi yerine $(\epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y)$ ifadesi kullanılır. Benzer şekilde $(\epsilon_2 - \sigma_2 y)$ ifadesi yerine de $(\epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x)$ ifadesi kullanılacaktır.

Buna göre denklem sistemi düzenlenirse,

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(\epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y) \\ \frac{dy}{dt} &= y(\epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x) \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

sistemi elde edilir.

Buradaki pozitif sabitlerin değerleri $(\epsilon_1, \sigma_1, \alpha_1, \epsilon_2, \sigma_2, \alpha_2)$ değerlendirilen belirli türlere bağlıdır ve genel olarak gözlemlerden tespit edilmelidir.

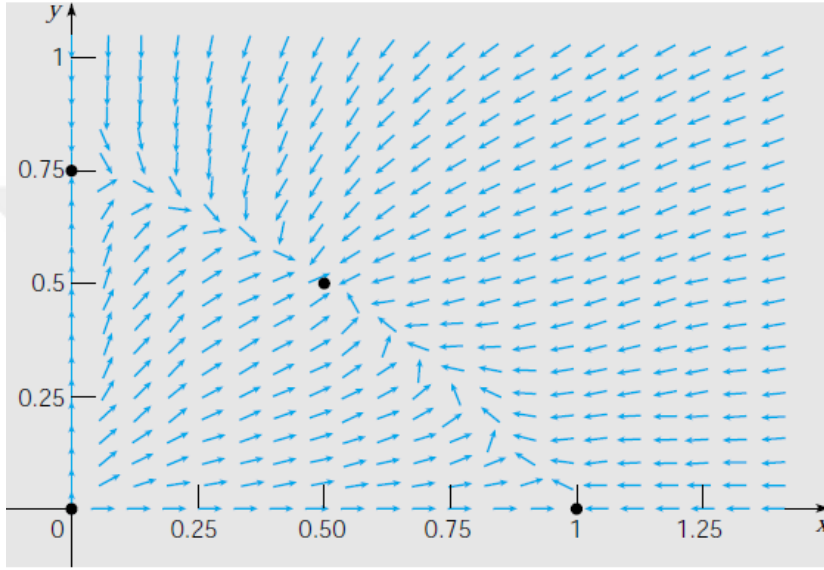
Bazı sabitler için (4.3) denklem sisteminin çözümünü araştıracağız. (Boyce ve DiPrima, 2005)

Örnek 4.1

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(1 - x - y) \\ \frac{dy}{dt} &= y(0.75 - y - 0.5x) \end{aligned} \quad (4.4)$$

sisteminin çözümlerinin nitel davranışlarını araştıralım.

Öncelikle $x(1 - x - y) = 0$ ve $y(0.75 - y - 0.5x) = 0$ cebirsel ifadeleri çözülerek sistemin kritik noktaları bulunur. Bu noktalar, $(0,0)$, $(0, 0.75)$, $(1,0)$ ve $(0.5, 0.5)$ noktalarıdır. Bu noktalardan ilk üçü bir veya iki türün soyunun tükenmesini belirtir. Sadece son nokta her iki türün de uzun süre hayatta kalmasına karşılık gelir. Diğer çözümler popülasyonların zaman içindeki gelişimlerini $x - y$ düzleminde eğriler ya da yörüngeler olarak temsil ederler.



Şekil 4.1 (Boyce ve DiPrima, 2005)

Yukarıdaki şekilde kritik noktaların davranışlarını görebiliriz. Koyu renkle gösterilen noktalar kritik noktalardır. $(0.5, 0.5)$ noktası diğer çözümleri çektiği için asimptotik kararlı noktadır. Diğer üç nokta ise kararsız noktalardır. Kritik noktaların yakınlardaki noktaların davranışlarını inceleyerek bu sonuca ulaşabiliriz.

Lineer sistemin kritik notası (X, Y) olsun.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(X, Y) & F_y(X, Y) \\ G_x(X, Y) & G_y(X, Y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} F(x, y) &= x(1 - x - y) \\ G(x, y) &= y(0.75 - y - 0.5x) \end{aligned} \quad (4.6)$$

(4.5) denklem sistemini düzenlersek,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2X - Y & -X \\ -0.5Y & 0.75 - 2Y - 0.5X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

şeklinde olur.

$(0,0)$ kritik noktasını incelersek, bu kritik nokta her iki türün de rekabetlerinin sonucu öldüğü duruma karşılık gelir.

Benzer şekilde (4.6) sisteminde $(X, Y) = (0, 0)$ yazarsak, orijin yakınında karşılık gelen lineer sistem,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0.75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

şeklindedir.

Bu sistemin özdeğerleri ve özvektörleri, $\lambda_1 = 1$, $\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 0.75$, $\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dir.

Sistemin genel çözümü, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{0.75t}$

(4.4) sisteminde orijin kararsız düğüm noktasıdır.

$(x, y) = (1, 0)$ kritik noktasını inceleyelim. Rekabette x türünün hayatta kaldığı fakat y türünün hayatta kalmadığı duruma karşılık gelir. Duruma karşılık gelen lineer sistem aşağıdaki gibidir.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Özdeğerler ve özvektörler: $\lambda_1 = -1$, $\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 0.25$, $\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$

Genel çözüm: $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} e^{0.25t}$ dir.

$(1, 0)$ komşuluğundaki yörüngelerin hareketini incelemek için genel çözüme bakabiliriz. $c_2 = 0$ olduğunda x eksenini boyunca kritik noktaya yaklaşan bir çift yörünge vardır. Diğer yörüngeler $(1, 0)$ komşuluğundan uzaklaşmaktadır. Özdeğerler zıt işaretli olduğundan $(1, 0)$ noktası eyer noktasıdır.

$(x, y) = (0, 0.75)$ kritik noktasını inceleyelim. Bu nokta y türünün hayatta kaldığı fakat x türünün hayatta kalmadığı duruma karşılık gelir. Karşılık gelen lineer denklem sistemi aşağıdaki gibidir.

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.25 & 0 \\ -0.375 & -0.75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Özdeğerler ve özvektörler: $\lambda_1 = 0.25$, $\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = -0.75$, $\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

olduğundan sistemin genel çözümü, $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix} e^{0.25t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-0.75t}$ şeklindedir.

$(1, 0)$ noktasında olduğu gibi $(0, 0.75)$ noktasında da özdeğerler zıt işaretlidir. Kritik nokta kararsız eyer noktasıdır. y eksenini boyunca yaklaşan bir çift yörüngenin dışında diğer yörüngeler bu noktanın komşuluğundan uzaklaşmaktadır.

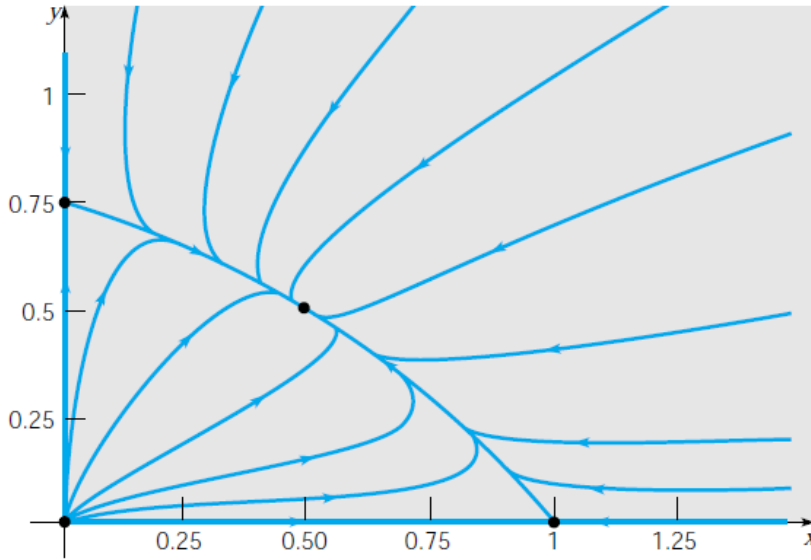
$(0.5, 0.5)$ kritik noktasını inceleyelim. Bu nokta her iki türün birlikte yaşadığı duruma karşılık gelir.

Lineer denklem sistemi $\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 & -0.5 \\ -0.25 & -0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ şeklindedir. Özdeğerler ve

özvektörler: $\lambda_1 = \frac{-2+\sqrt{2}}{4} \cong -0.146$, $\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = \frac{-2-\sqrt{2}}{4} \cong -0.854$, $\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Genel çözüm: $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} e^{-0.146t} + c_2 \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-0.854t}$ olur.

Özdeğerlerin her ikisinin de negatif olması kritik noktanın asimptotik kararlı olduğunu göstermektedir. Tüm yörüngeler $t \rightarrow \infty$ için $(0.5, 0.5)$ kritik noktasına yakınsamaktadır. (4.4) sisteminin faz portresi aşağıdaki Şekil 4.2’ de gösterilmiştir. Her kritik noktaya yakınındaki yörüngelere bakarsak tahmin edilen şekilde davrandıklarını görebiliriz. (4.4) denkleminin sağ tarafında ikinci dereceden terimlerin olduğunu ve bu terimlerin de negatif olduğunu göz önüne alırsak, x ve y ’nin büyük ve pozitif değerleri için x' ve y' negatiftir. Bu durumda yörüngeler içe yönelir. (Boyce ve DiPrima, 2005)



Şekil 4.2 Faz Portresi (Boyce ve DiPrima, 2005)

4.2 Yıllık İki Bitki Türünde Rekabet ve Kararlılık Analizi

Yıllık bitkiler yaz sonunda tohum üretir. Çiçekli bitkiler solgunlaşıp ölürken tohumlarını kışın hayatta kalıp yeni nesil üretmesi için bırakır. Takip eden baharda bu tohumlardan belirli bir kısmı çimlenir. Bazı tohumlar canlanmadan önce bir yıl ya da daha

uzun süre hareketsiz kalabilir. Diğerleri avlanma, hastalık veya hava nedeniyle kaybedilebilir. Ancak bitkilerin bir tür olarak hayatta kalabilmeleri için, yıldan yıla yeterince büyük bir nüfusun yenilenmesi gerekir. (Keshet, L. 2005)

Pakes ve Maller, De Wit'in rekabet halindeki türlerin modellenmesi için oluşturdukları formülasyona dayanan ayrık zamanlı bir model geliştirmiştir. Ayrık zamanlı modeller, mevsimsel üreme düzenine sahip organizmalar için daha uygundur. 50'lerin başında Hollanda hükümetinin tarımsal uzantısı yulaf ve arpa ekimi ile ilgili saha deneyleri yapmıştır. Pakes ve Maller bu deneylerden toplanan verilerin sonuçlarını De Wit model formülasyonu için kullanmıştır. Mekansal konum bitki topluluklarında özellikle önemli olduğundan, rekabet katsayıları yerine etkileşimleri tanımlamak için katsayıları kullanılmıştır.

De Wit modeli için gerekli parametreler aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

S_1 ve S_2 iki bitki türünü göstermektedir.

A_1 ve A_2 sırasıyla her bir tür için uygun olan alanı temsil eder.

Z_1 ve Z_2 her bir türün ekilen tohum sayısını temsil eder.

O_1 ve O_2 her bir türün tohum verimidir.

M_1 ve M_2 sırasıyla S_1 ve S_2 'nin monokültürel verimleridir.

$$I. \quad A_1 + A_2 = 1$$

$$II. \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{b_1 Z_1}{b_2 Z_2}$$

Eşitlikleri sağlanır. Buradaki b_1, b_2 katsayıları çoğalma katsayılarıdır. Bu katsayıların oranına bağlı çoğalma katsayısı denir.

$$k_{12} = b_1 b_2^{-1} \quad S_1 \text{'in } S_2 \text{'ye göre bağlı çoğalma sayıdır.}$$

$$k_{21} = b_2 b_1^{-1} \quad S_2 \text{'nin } S_1 \text{'e göre bağlı çoğalma sayıdır.}$$

I ve II numaralı denklemlerden aşağıdaki eşitliğe ulaşılır.

$$A_1 = b_1 Z_1 [b_1 Z_1 + b_2 Z_2]^{-1} = k_{12} Z_1 [k_{12} Z_1 + Z_2]^{-1}$$

$$A_2 = b_2 Z_2 [b_1 Z_1 + b_2 Z_2]^{-1} = k_{21} Z_2 [k_{21} Z_2 + Z_1]^{-1}$$

$$z_1 = Z_1 (Z_1 + Z_2)^{-1}$$

$$z_2 = Z_2 (Z_1 + Z_2)^{-1} \text{ her iki türün de bağlı tohum sıklığı olmak üzere;}$$

Verimler her tür için mevcut alanla orantılıdır.

$$O_1 = b_1 Z_1 [b_1 Z_1 + b_2 Z_2]^{-1} M_1 = k_{12} z_1 [k_{12} z_1 + z_2]^{-1} M_1$$

$$O_2 = b_2 Z_2 [b_1 Z_1 + b_2 Z_2]^{-1} M_2 = k_{21} z_2 [k_{21} z_2 + z_1]^{-1} M_2$$

Pakes ve Maller rekabet modeli için gerekli bazı parametreleri tanımlayalım:

r_t, s_t : 1 ve 2 numaralı türler için yıl içindeki artık tohum yoğunluğu

x_t, y_t : 1 ve 2 numaralı türler için t yılında üretilen yeni tohum yoğunluğu

P_W, Q_W : Bir tohumun kışın hayatta kalma olasılığı

P_G, Q_G : Tohumların çimlenme olasılığı

P_E, Q_E : Bitkilerin yerleşme olasılığı

P_A, Q_A : Yerleşmiş bitkilerin yetişkin olma olasılığı

Genel olarak P_W, P_G, P_E, P_A parametreleri sıcaklığa, toprak koşullarına ve çevresel değişkenlere bağlıdır. (1. Tür için P 'li olasılıklar, 2. tür için ise Q 'lu olasılıklar geçerlidir.)

t yılındaki artık tohumlar, kıştan sağ kalan, kış aylarında çimlenmemiş yeni tohumların yanı sıra kışta hayatta kalan ve uykuda kalan önceki yıllardan kalan tohumlardan oluşur.

$$r_t = P_W(1 - P_G)[x_{t-1} + r_{t-1}]$$

$$s_t = Q_W(1 - Q_G)[y_{t-1} + s_{t-1}]$$

De Wit modelini uygularsak t yılındaki birinci tür için maksimum tohum havuzuna aşağıda gösterilen şekilde ulaşılabilir.

$$p_t = x_t + r_t = \frac{k_{12}M_1P_AP_WP_EP_Gp_{t-1}}{k_{12}P_AP_WP_EP_Gp_{t-1} + Q_EQ_AQ_WQ_Gq_{t-1}} + P_S(1 - P_G)p_{t-1}$$

İkinci tür için maksimum tohum havuzu:

$$q_t = y_t + s_t = \frac{k_{21}M_2Q_EQ_AQ_WQ_Gq_{t-1}}{P_AP_WP_WP_EP_Gp_{t-1} + k_{21}Q_EQ_AQ_WQ_Gq_{t-1}} + Q_S(1 - Q_G)q_{t-1}$$

Yetişkin bitkiler t yılında kışın hayatta kalıp $t + 1$ yılına girenler, çimlenip kurulup ve son olarak yetişkinliğe ulaşan p_t ve q_t tohumları tarafından oluşturulur. t yılındaki yetişkin i bitki türünü A_i , $i = 1, 2, \dots$ şeklinde gösterelim.

$$A_1(t + 1) = \frac{a_1k_{12}M_1A_1(t)}{k_{12}A_1(t) + A_2(t)} + b_1A_1(t)$$

$$A_2(t + 1) = \frac{a_2k_{21}M_2A_2(t)}{A_1(t) + k_{21}A_2(t)} + b_2A_2(t)$$

Burada $a_1 = P_AP_WP_WP_EP_G$, $a_2 = Q_EQ_AQ_WQ_G$,

$$b_1 = P_W(1 - P_G), \quad b_2 = Q_W(1 - Q_G)$$

Yukarıdaki denklemlerde $A_i(t)$ yerine $c \tilde{A}_i(t)$, $c = (1 - b_1)/a_1M_1$ yazıldığında değişken sayısı beşe düşürülmüş olur.

$$A_1(t + 1) = (1 - \alpha) \frac{k_{12}A_1(t)}{k_{12}A_1(t) + A_2(t)} + \alpha A_1(t)$$

$$A_2(t+1) = \rho(1-\beta) \frac{k_{21}A_2(t)}{A_1(t) + k_{21}A_2(t)} + \beta A_2(t)$$

$$\alpha = b_1, \quad \beta = b_2, \quad \rho = \frac{\alpha_2 M_2 (1 - b_1)}{\alpha_1 M_1 (1 - b_2)}$$

Yıllık İki Bitki Türünde Kararlılık Analizi

Ayrık modellerde kararlılık durumu incelemek için kullanılan yöntemler sürekli modellerin çözümünde kullanılan yöntemlerle karşılaştırılabilir. Sürekli modellerde kararlı durum çözümünde popülasyon büyüme oranı sıfır kabul edilebildiği gibi bu modelde de $A_1(t+1) = A_1(t)$ yazılabilir. ($\Delta A_1 = 0$)

İki tür modelinde kararlılık için üç durum söz konusudur. İlk iki durumda türlerden biri taşıma kapasitesine ulaşır ve diğer türün nesli tükenir. Üçüncü kararlılık durumu ise iki türün birlikte yaşaması mümkün olduğunda ortaya çıkar.

Birinci popülasyonun taşıma kapasitesine ulaştığında ve ikinci popülasyonun nesli tükendiğinde $(A_1, 0)$ çözüm $A_1 = 1$ değerini verir.

Birinci popülasyonun nesli tükendiğinde ve ikinci popülasyonun taşıma kapasitesine ulaştığında $(0, A_2)$ çözüm $A_2 = \rho$ değerini verir.

Üçüncü durumu göz önüne aldığımızda, kararlı hal iki türün birlikte yaşaması mümkün olduğunda (A_1, A_2)

A_1 için fark denklemi çözülürse aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$A_1 = (1 - \alpha) \frac{k_{12}A_1}{k_{12}A_1 + A_2} + \alpha A_1$$

$$1 = \frac{k_{12}}{k_{12}A_1 + A_2}$$

$$k_{12} = k_{12}A_1 + A_2$$

$$A_2 = k_{12}(1 - A_1) \tag{4.8}$$

$$A_1 = 1 - \frac{A_2}{k_{12}} \tag{4.9}$$

A_2 için fark denklemi çözülürse:

$$A_2 = \rho(1 - \beta) \frac{k_{21}A_2}{A_1 + k_{21}A_2} + \beta A_2$$

$$1 = \rho \frac{k_{21}}{A_1 + k_{21}A_2}$$

$$\rho k_{21} = A_1 + k_{21}A_2$$

$$A_2 = \rho - \frac{A_1}{k_{21}} \quad (4.10)$$

$$A_1 = k_{21}(\rho - A_2) \quad (4.11)$$

(4.8) ve (4.10) un eşitliğinden yararlanırsak

$$k_{12}(1 - A_1) = \rho - \frac{A_1}{k_{21}} \quad A_1 = \frac{k_{21}(\rho - k_{12})}{1 - k_{12}k_{21}} \text{ elde edilir.}$$

Aynı şekilde (4.9) ve (4.11) eşitliklerinden yararlanarak A_2 'yi hesaplayacak olursak;

$$1 - \frac{A_2}{k_{12}} = k_{21}(\rho - A_2) \quad A_2 = \frac{k_{12}(1 - \rho k_{21})}{1 - k_{12}k_{21}} \text{ bulunur.}$$

Bu durumda üç kararlılık durumunu $(1,0), (0,\rho), (\frac{k_{21}(\rho - k_{12})}{1 - k_{12}k_{21}}, \frac{k_{12}(1 - \rho k_{21})}{1 - k_{12}k_{21}})$ şeklindedir.

Yerel Kararlılık: Yerel kararlılık durumu için Jacobian matrisi kullanılabilir. Jacobian matrisi her değişkene göre denklemlerin kısmi türevlerinden oluşan matristir.

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial F(A_1, A_2)}{\partial A_1} & \frac{\partial F(A_1, A_2)}{\partial A_2} \\ \frac{\partial G(A_1, A_2)}{\partial A_1} & \frac{\partial G(A_1, A_2)}{\partial A_2} \end{pmatrix}$$

Burada $A_1(t+1) = F(A_1(t), A_2(t)), A_2(t+1) = G(A_1(t), A_2(t))$ dir.

Jacobian matrisi denge noktasında değerlendirilir.

$X(t+1) = (A_1(t+1) - A_1, A_2(t+1) - A_2)^T$ ve J matrisi $(A_1, A_2)^T$ denge durumunda değerlendirildiğinde lineerleştirilen sistem $X(t+1) = JX(t)$ şeklindedir. $A_i(t+1)$ $i = 1,2$ için yalnız ve yalnız denge noktasında yakınsarken lineerleştirilen sistem orijine yakınsar.

J 'nin özdeğerleri $i = 1,2$ için $|\lambda_i| < 1$, $X(t+1)$ orijine yakınsar.

$\text{İz}(J)$ J matrisinin izi olmak üzere $|\text{İz}(J)| < 1 + \det(J) < 2$ eşitsizliği sağlanıyorsa J matrisinin özdeğerleri $|\lambda_i| < 1$ eşitsizliğini sağlar.

$$A_1(t+1) = (1 - \alpha) \frac{k_{12}A_1(t)}{k_{12}A_1(t) + A_2(t)} + \alpha A_1(t)$$

$$A_2(t+1) = \rho(1 - \beta) \frac{k_{21}A_2(t)}{A_1(t) + k_{21}A_2(t)} + \beta A_2(t)$$

Sisteminin özdeğerleri;

$A_1(t+1) = F(A_1(t), A_2(t))$ olmak üzere,

$$= \begin{pmatrix} (1-\alpha) \frac{k_{12}(k_{12}A_1 + A_2) - k_{12}(k_{12}A_1)}{(k_{12}A_1 + A_2)^2} + \alpha & (\alpha-1) \frac{k_{12}A_1}{(k_{12}A_1 + A_2)^2} \\ \rho(\beta-1) \frac{k_{21}A_2}{(A_1 + k_{21}A_2)^2} & \rho(1-\beta) \frac{k_{21}(k_{21}A_2 + A_1) - k_{21}(k_{21}A_1)}{(A_1 + k_{21}A_2)^2} + \beta \end{pmatrix}$$

(1,0) kararlılık halinde tek tür için kararlılık değerlendirmesi yapıldığında Jacobian matrisi (1,0) da değerlendirilir.

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & (\alpha-1) \frac{1}{k_{12}} \\ 0 & \rho(1-\beta)k_{21} + \beta \end{pmatrix}$$

Matris üst üçgensel olduğundan öz değerleri köşegen üzerindedir.

$$\lambda_1 = \alpha, \lambda_2 = \rho(1-\beta)k_{21} + \beta$$

Açıkça $\alpha < 1$ olduğundan kararlılık λ_2 tarafından belirlenir. $\lambda_2 < 1$ olması için

$$\rho < \frac{1}{k_{21}} \text{ olmalıdır.}$$

$$(0, \rho) \text{ denge durumunda Jacobian matrisi, } J = \begin{pmatrix} (1-\alpha) \frac{k_{12}}{p} + \alpha & 0 \\ -(1-\beta)k_{21} & \beta \end{pmatrix}$$

Elde ettiğimiz Jacobian matrisi alt üçgensel olduğu için öz değerler esas köşegene eşittir.

$$\lambda_1 = (1-\alpha) \frac{k_{12}}{p} + \alpha, \lambda_2 = \beta$$

Açıkça, $\lambda_2 = \beta < 1$ olduğundan kararlılık λ_1 'e bağlıdır. $\lambda_1 < 1$ olması için $\rho < k_{12}$ olmalıdır.

(A_1, A_2) denge durumu göz alındığında Jacobian matrisi,

$$J = \begin{pmatrix} (1-\alpha) \frac{k_{12}A_1}{(k_{12}A_1 + A_2)^2} + \alpha & (\alpha-1) \frac{k_{12}A_1}{(k_{12}A_1 + A_2)^2} \\ \rho(\beta-1) \frac{k_{21}A_2}{(A_1 + k_{21}A_2)^2} & \rho(1-\beta) \frac{k_{21}A_2}{(A_1 + k_{21}A_2)^2} + \beta \end{pmatrix}$$

$$1 = \frac{k_{12}}{k_{12}A_1 - A_2} \text{ ve } 1 = \rho \frac{k_{21}}{k_{21}A_2 - A_1} \text{ olduğu hatırlanırsa matris}$$

$$J = \begin{pmatrix} (1-\alpha) \frac{A_2}{k_{12}} + \alpha & (\alpha-1) \frac{A_1}{k_{12}} \\ (\beta-1) \frac{A_2}{pk_{21}} & (1-\beta) \frac{A_1}{pk_{21}} + \beta \end{pmatrix} \text{ şeklinde sade hale getirilir.}$$

Kararlılık matris izine ve determinantına bağlı olacaktır.

$\dot{I}z(J) = (1 - \alpha) \frac{A_2}{k_{12}} + \alpha + (1 - \beta) \frac{A_1}{pk_{21}} + \beta$ olduğundan $\dot{I}z(J) > 0$ diyebiliriz.

$$\det(J) = \left((1 - \alpha) \frac{A_2}{k_{12}} + \alpha \right) \left((1 - \beta) \frac{A_1}{pk_{21}} + \beta \right) - \left((\alpha - 1) \frac{A_1}{k_{12}} \right) \left((\beta - 1) \frac{A_2}{pk_{21}} \right)$$

Gerekli düzenlemelerden sonra $\det(J) = \frac{(1-\alpha)A_2\beta}{k_{12}} + \frac{\alpha(1-\beta)A_1}{pk_{21}} + \alpha\beta$

Kararlı olması için $\dot{I}z(J) < 1 + \det(J) < 2$ olduğunu göstermek gerekir.

Öncelikle ilk kısmı ele alalım. $\dot{I}z(J) < 1 + \det(J)$

$$(1 - \alpha) \frac{A_2}{k_{12}} + \alpha + (1 - \beta) \frac{A_1}{\rho k_{21}} + \beta < 1 + \frac{(1 - \alpha)A_2\beta}{k_{12}} + \frac{\alpha(1 - \beta)A_1}{\rho k_{21}} + \alpha\beta$$

Sadeleştirmenin ardından, $\frac{A_2}{k_{12}} + \frac{A_1}{\rho k_{21}} < 1$ (4.8)'i uygularsak $1 - A_1 + \frac{A_1}{\rho k_{21}} < 1$

veya $\frac{1}{k_{21}} < \rho$ olur.

Kararlılık koşulunun ikinci eşitsizliğini incelersek, $1 + \det(J) < 2$

$$1 + \frac{(1 - \alpha)A_2\beta}{k_{12}} + \frac{\alpha(1 - \beta)A_1}{\rho k_{21}} + \alpha\beta < 2$$

Yine (4.8) uygulanırsa $(1 - \alpha)(1 - A_1)\beta + \frac{\alpha(1 - \beta)A_1}{\rho k_{21}} + \alpha\beta < 1$

$$\beta - A_1\beta + \alpha\beta A_1 + \frac{\alpha(1 - \beta)A_1}{\rho k_{21}} < 1$$

$$-A_1\beta(1 - \alpha) < (1 - \beta) \left(1 - \frac{\alpha A_1}{\rho k_{21}} \right)$$

Son durumda eşitsizliğin sol tarafının negatif sağ tarafının pozitif olduğu görülmektedir.

Bu durumda $1 + \det(J) < 2$ eşitsizliği sağlanmıştır.

(4.11) özelliğinden yararlanarak $\alpha A_1 = \alpha k_{21}(\rho - A_2) < k_{21}\rho$ veya $0 < 1 - \frac{\alpha A_2}{\rho k_{21}}$

Denge noktası değerleri pozitif olmalı bu durumda $\rho > \frac{1}{k_{21}}$ eşitsizliği $k_{21}k_{12} > 1$,

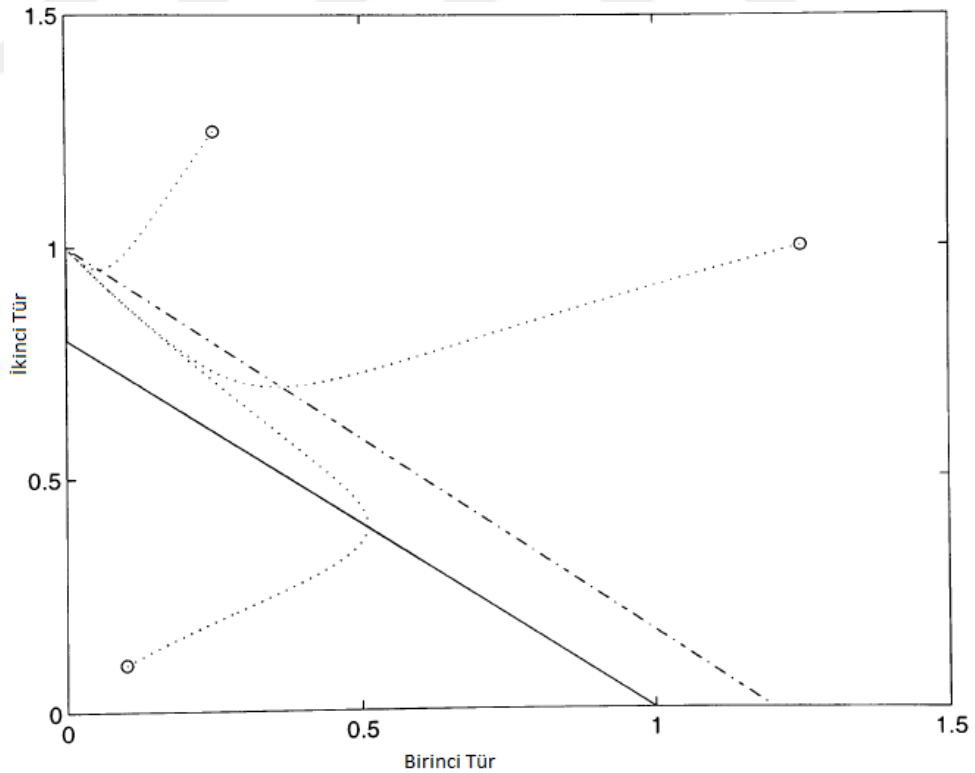
$k_{12} > \rho$ 'yi sağlar. Bu durumda (A_1, A_2) denge noktası sadece ve sadece $k_{12} > \rho > \frac{1}{k_{21}}$

olduğunda yerel kararlıdır.

Çizelge 4.1 İki türün kararlılık şartları

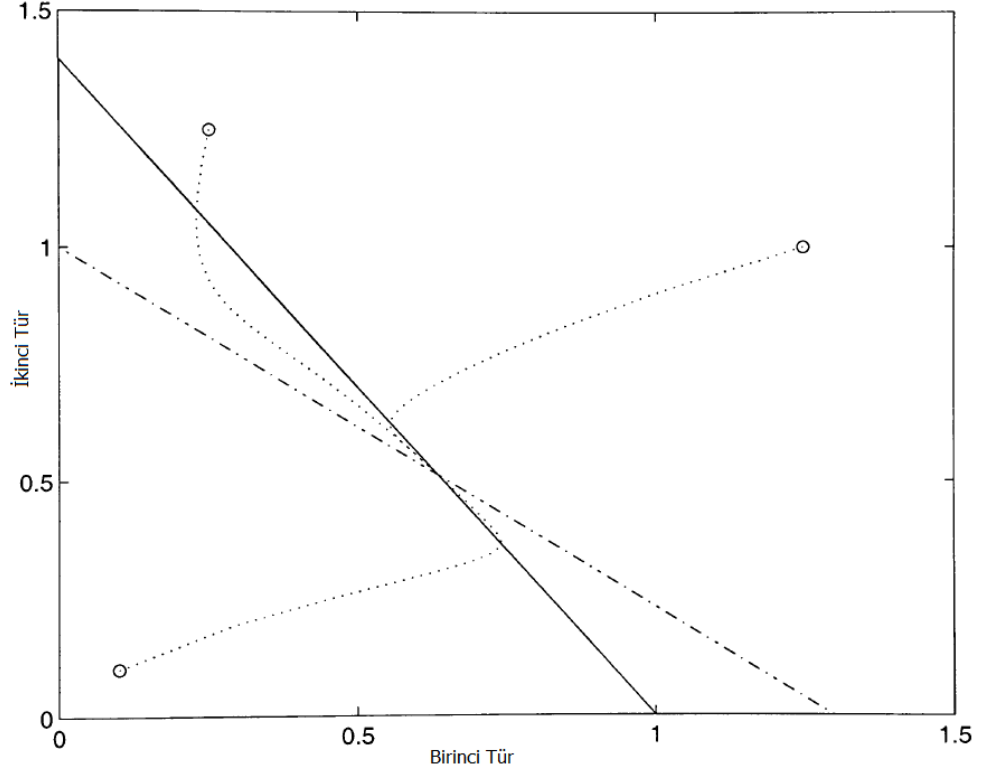
Denge Noktası	1. Koşul	2. Koşul
$(1,0)$	$\rho < \frac{1}{k_{21}}$	$\rho < k_{12}$
$(0,\rho)$	$\rho > k_{12}$	$\rho > \frac{1}{k_{21}}$
$(\frac{k_{21}(\rho-k_{12})}{1-k_{12}k_{21}}, \frac{k_{12}(1-\rho k_{21})}{1-k_{12}k_{21}})$	$k_{12} > \rho$	$\rho > \frac{1}{k_{21}}$

Bu bölümde, sayısal simülasyonlar belirli parametre değerleri için deneylerin sonucunu göstermektedir. Bu parametreler başlangıç koşullarıyla birlikte rekabetin sonuçlarını belirler. Grafiklerdeki düz çizgi birinci türün büyüme eğrisini kısa çizgi çizgi ikinci türün büyüme eğrisini ifade eder. Açık daireler ilk popülasyon yoğunluklarına karşılık gelirken, noktalı çizgiler popülasyondaki zamana göre değişimi temsil eder. Sayısal simülasyonun sonuçları analitik olarak tahmin edilen sonuçlarla aynıdır, yani denge noktası çözümü $(0, \rho)$ tüm pozitif başlangıç koşulları için kararlıdır.



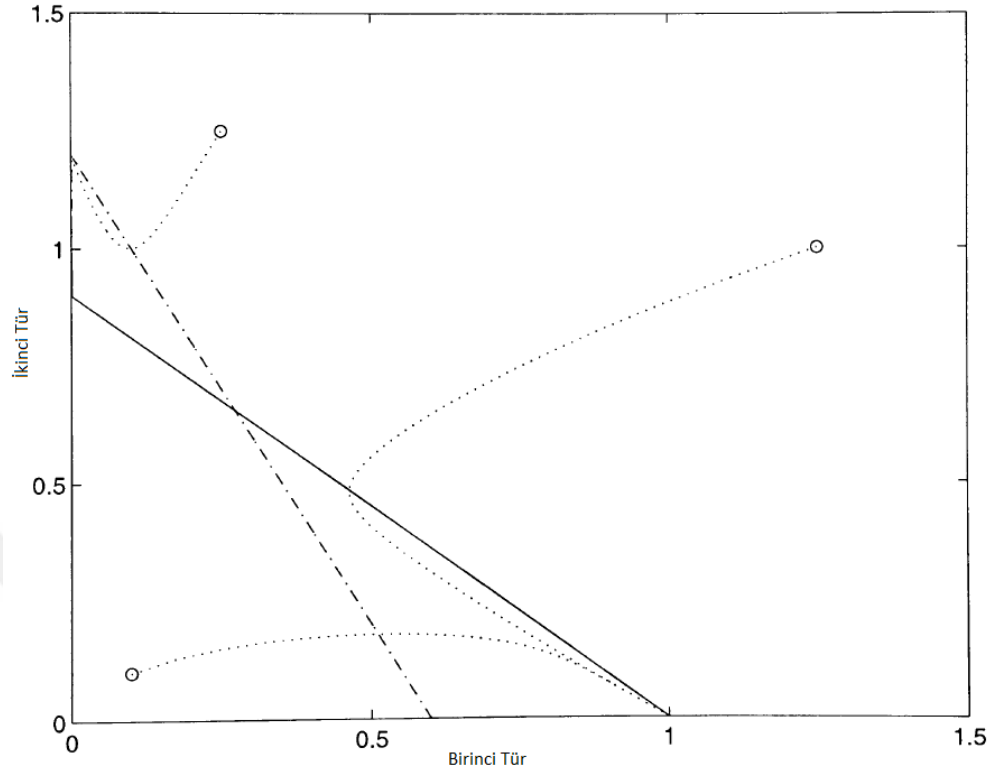
Şekil 4.3 (Atkinson, 1997)

Şekil 4.3 $(0, \rho)$ denge noktasının kararlılığını göstermektedir. Bu şekilde parametre değerleri, $\rho > k_{12}$, $\rho > \frac{1}{k_{21}}$ olacak şekilde seçildi. $\alpha = 0.8$, $\beta = 0.9$, $k_{12} = 0.8$, $k_{21} = 1.2$ ve $\rho = 1$ değerleri alındı.



Şekil 4.4 (Atkinson, 1997)

Şekil 4.4 her iki türün hayatta kaldığı durumu temsil eder. Parametreler $\frac{1}{k_{21}} < \rho < k_{12}$ olacak şekilde seçilmiştir. Seçilen değerler: $\alpha = 0.6$, $\beta = 0.8$, $k_{12} = 1.4$, $k_{21} = 1.3$ ve $\rho = 1$ 'dir. $(\frac{k_{21}(\rho - k_{12})}{1 - k_{12}k_{21}}, \frac{k_{12}(1 - \rho k_{21})}{1 - k_{12}k_{21}})$ noktası tüm başlangıç değerler için kararlıdır.



Şekil 4.5 (Atkinson, 1997)

Şekil 4.5 te parametreler kararlılık durumunu sağlayan değerlerin dışında seçilmiştir. $k_{12} < \rho < \frac{1}{k_{21}}$ eşitsizliğini sağlar. $\alpha = 0.8$, $\beta = 0.9$, $k_{12} = 0.9$, $k_{21} = 0.5$ ve $\rho = 1.2$ dir. Bu şekilde çözümler hem $(1,0)$ noktasına hem de $(0,\rho)$ noktasına yakınsamıştır. (Atkinson, 1997)

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu çalışmada biyolojik olayların modellenmesinde kullanılan fark denklemleri ve diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemleri, çözümlerinin denge noktasındaki davranışları ve kararlılıkları incelenmiştir.

Lojistik denklem aracılığı ile aynı alanı paylaşan iki türün rekabeti diferansiyel denklemleri kullanarak matematiksel olarak modellenmiş ve oluşturulan bu modelin bazı sabitler için kararlılık kriterleri belirlenmiştir. Benzer şekilde fark denklemlerinde de Wit formüllerini kullanarak iki bitki türü rekabeti için matematiksel model oluşturulmuş ve bazı sabitler için denge noktalarının kararlılığı incelenmiştir.

Bu tezde fark denklemleri ve diferansiyel denklemler çözüm yönleriyle ve kullanıldıkları problem türüne göre karşılaştırılmıştır.

KAYNAKLAR

- Agarwal, R. P., 2000. Difference Equations and Inequalities. Marcel Dekker yayınevi, 971 s, ISBN 0-8247-9007-3, Amerika Birleşik Devletleri.
- Allen, L.J.S., 2007. An introduction to mathematical biology. Pearson Yayınları, 365 s, ISBN: 0-13-035216-0, Amerika Birleşik Devletleri.
- Anonymous, 2019. <http://www.texample.net/tikz/examples/poincare/> Erişim tarihi: 30.12.2019
- Atkinson, D. N., 1997. Mathematical models for plant competition and dispersal. Texas Tech Üniversitesi Yüksek Lisans Tezi.
- Bereketoğlu, H. ve Kutay, V., 2012. Fark denklemleri. Gazi Kitabevi, 303 s, ISBN: 978-605-4562-40-4, Ankara.
- Boyce, W. E., Diprima, R.C., Meade, D.B., 2017. Elementary differential equations and boundary value problems. John Wiley, 610 s, ISBN-13 978-1-119-37792-4, Amerika Birleşik Devletleri.
- Clinger, R.A., 2007. Stability analysis of systems of difference equations. Virjinya Commonwealth Üniversitesi Yüksek Lisans Tezi.
- Elyadi, S., 2005. An introduction to difference equations. Springer Science+Business Media. 539s, ISBN 0-387-23059-9, Amerika Birleşik Devletleri.
- Jackson, T., 2005. http://www.math.lsa.umich.edu/~tjacks/MATH463_1.ppt. Erişim tarihi:30.12.2019
- Keshet, L. E., 2005. Mathematical models in biology. Siam (Society Industrial and Applied Mathematics., 586 s, ISBN 0-89871-554-7, Canada.
- Kutay, V., 2010. Fark denklemleri. Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi.
- Lakshmikantham, V., Trigiante D., Dekker, M., 2003. Theory of difference equations. Bulltein (New Series) of the American Mathematical Society, 40 (2):259-262.
- Leipholtz, H., 1970. Stability theory. Academic Press, 277s, Amerika Birleşik Devletleri.
- Murray, J.D., 2002. Mathematical Biology. Springer-Verlag , 551s, ISBN 0-387-95223-3, Amerika Birleşik Devletleri
- Nisa, M.B., 2014. Applications of ordinary differential equations. Yaşar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi.
- Soykan, Y., Göcen, M., Gümüş, M., 2017. Lineer fark denklemleri. Nobel Yayıncılık, 231 s, ISBN: 978-605-320-704-7, Ankara.
- Tseng, Z., 2008. <http://www.personal.psu.edu/sxt104/class/Math251/Notes-PhasePlane.pdf>. Erişim tarihi:30.12.2019