



T.C.
HATAY MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**($G'/G, 1/G$) AÇILIM YÖNTEMİ ile KESİRLİ MERTEBEDEN KISMÎ
DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN TAM ÇÖZÜMLERİ**

Emrah BOZDOĞAN

ENFORMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HATAY
TEMMUZ - 2023



T.C.
HATAY MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**(G'/G , $1/G$) AÇILIM YÖNTEMİ ile KESİRLİ MERTEBEDEN KISMÎ
DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN TAM ÇÖZÜMLERİ**

Emrah BOZDOĞAN
ORCID:0009-0002-4548-2202

ENFORMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman
Doç. Dr. Orkun TAŞBOZAN
ORCID: 0000-0001-5003-6341

HATAY
TEMMUZ - 2023

T.C.
HATAY MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**(G'/G, 1/G) AÇILIM YÖNTEMİ ile KESİRLİ MERTEBEDEN KISMÎ
DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN TAM ÇÖZÜMLERİ**

Emrah BOZDOĞAN

ENFORMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Doç. Dr. Orkun TAŞBOZAN danışmanlığında hazırlanan bu tez **07/07/2023**
tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından **OYBİRLİĞİ** ile kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Orkun TAŞBOZAN
Başkan

Doç. Dr. Ali KURT
Üye

Dr. Öğr. Üyesi Mehmet VURAL
Üye

Kod No:1446

Doç. Dr. Cengiz KARACA
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

07/07/2023

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını ve tez üzerinde Yükseköğretim Kurulu tarafından hiçbir değişiklik yapılamayacağı için tezin bilgisayar ekranında görüntülendiğinde asıl nüsha ile aynı olması sorumluluğunun tarafıma ait olduğunu beyan ederim.

Emrah BOZDOĞAN

ÖZET

($G'/G, 1/G$) AÇILIM YÖNTEMİ ile KESİRLİ MERTEBEDEN KISMÎ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN TAM ÇÖZÜMLERİ

Beş bölümden oluşan bu tezde birinci bölüm olan Giriş başlığı altında konu ile ilgili literatür bilgisi verildi.

İkinci bölüm olan Önceki Çalışmalar başlığı altında daha önce ($G'/G, 1/G$) açılım yöntemi kullanılarak yapılan çalışmalarla ilgili literatür taraması verildi.

Üçüncü bölüm olan Materyal ve Yöntem başlığı altında conformable kesirli türev yaklaşımı ve ($G'/G, 1/G$) açılım yöntemi verildi.

Dördüncü bölüm olan Araştırma Bulgular ve Tartışma başlığı altında kesirli mertebeden Dodd - Bullough - Mikhailov, kesirli mertebeden Kolmogorov - Petrovskii - Piskunov, kesirli mertebeden Oskolkov ve kesirli mertebeden Benny Luke denklemlerine ($G'/G, 1/G$) açılım yönteminin uygulanması sonucu elde edilen analitik çözümler verildi.

Beşinci bölüm olan Sonuç ve Öneriler başlığı altında çalışma sonucu elde edilen bulgular ve bu bulgular doğrultusunda önerilere yer verildi.

2023, 54 sayfa

Anahtar Kelimeler: ($G'/G, 1/G$) açılım yöntemi, Kesirli Mertebeden Dodd - Bullough - Mikhailov Denklemi, Kesirli Mertebeden Kolmogorov - Petrovskii - Piskunov Denklemi, Kesirli Mertebeden Oskolkov Denklemi, Kesirli Mertebeden Benny Luke Denklemi

ABSTRACT

EXACT SOLUTIONS of FRACTIONAL ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS with $(G'/G, 1/G)$ EXPANSION METHOD

In this thesis, which consists of five chapters, the literature on the subject is given under the title of Introduction, which is the first chapter.

In the second section, under the title of Previous Studies, a literature review was given about the studies carried out using the $(G'/G, 1/G)$ expansion method.

In the third chapter, under the title of Materials and Methods, conformable fractional derivative approach and $(G'/G, 1/G)$ expansion method are given.

In the fourth chapter, Research Findings and Discussion, analytical solutions obtained by applying the $(G'/G, 1/G)$ expansion method to fractional order Dodd - Bullough - Mikhailov, fractional order Kolmogorov - Petrovskii - Piskunov, fractional order Oskolkov and fractional order Benny Luke equations are given.

In the fifth chapter, under the title of Conclusion and Suggestions, the findings obtained as a result of the study and suggestions in line with these findings were included.

2023, 54 pages

Key Words: $(G'/G, 1/G)$ Expansion Method, Fractional Order Dodd - Bullough - Mikhailov Equation, Fractional Order Kolmogorov - Petrovskii - Piskunov Equation, Fractional Order Oskolkov Equation, Fractional Order Benny Luke Equation

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez konumun belirlenmesinden yazımına kadar her aşamasında benden desteğini ve zamanını esirgemeyen danışman hocam Doç. Dr. Orkun TAŞBOZAN’a saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca beni her konuda destekleyen annem, babam ve ablama sevgilerinden ve desteklerinden dolayı minnet ve şükranlarımı; eşim Kübra EREN BOZDOĞAN’a sabrı ve desteğinden dolayı teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca yüksek lisans eğitiminin tüm aşamalarını düzenleyen FBE Müdürlüğüne teşekkürü borç bilirim.



İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	I
ABSTRACT.....	II
TEŞEKKÜR.....	III
İÇİNDEKİLER	IV
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	V
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....	3
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	5
3.1. Materyal.....	5
3.2. Yöntem	7
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA	10
4.1. Kesirli Mertebeden Dodd - Bullough - Mikhailov Denkleminin Çözümleri	10
4.2. Kesirli Mertebeden Kolmogorov - Petrovskii - Piskunov Denkleminin Çözümleri	26
4.3. Kesirli Mertebeden Oskolkov Denkleminin Çözümleri.....	34
4.4. Kesirli Mertebeden Benny Luke Denkleminin Çözümleri.....	42
5. SONUÇ ve ÖNERİLER.....	50
KAYNAKLAR	51
ÖZGEÇMİŞ	54

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

$\Gamma(t)$	: Gama fonksiyonu
$T_n(h)(t)$	: $h(t)$ fonksiyonunun n . mertebeden conformable kesirli türevi
$h^{(n)}(t)$	: $h(t)$ fonksiyonunun n . mertebeden türevi
$\frac{d^n h(t)}{dt^n}$	: $h(t)$ fonksiyonunun n . mertebeden türevi

KISALTMALAR

DBM	: Dodd - Bullough - Mikhailov
KPP	: Kolmogorov - Petrovskii - Piskunov
BL	: Benny Luke

1. GİRİŞ

Türev operatörü temel matematikle ilgilenen herkes tarafından bilinen bir kavramdır ve n pozitif bir tam sayı olmak üzere, uygun bir f fonksiyonunun n . mertebeden türevi $\left(\frac{d^n f}{dx^n}\right)$ iyi tanımlıdır (Miller ve Ross, 1993). n sayısının tam sayı olmayan durumlara genelleştirilmesi fikri temel matematik kavramlarının ortaya çıktığı ilk zamanlara kadar uzanır (Oldham ve Spanier, 1974). Kesirli mertebeden türeve dair ilk tartışmalara Leibniz'in yazışmalarında rastlanmaktadır. Bu yazışmalardan biri Bernoulli ve Leibniz arasındadır. Söz konusu yazışmada Bernoulli, çarpımın türeviyle ilgili bir teoreme türevin tam sayı olmayan bir mertebe olması durumunda bunun ne anlama geleceğini Leibniz'e sormaktadır (Samko ve ark., 1993). 1695 yılında geçen bir başka yazışmada ise L'Hôpital'in, n sayısının bir kesir olması durumunda n . mertebeden türevin ne anlama geleceğini Leibniz'e sorduğu bilinmektedir. Bundan sonraki süreçte kesirli türev kavramı Euler, Laplace, Fourier, Liouville, Riemann ve Laurent gibi pek çok ünlü matematikçinin ilgisini çekmiştir (Miller ve Ross, 1993). Bu doğrultuda uzun bir süre matematikçiler arasında yeni bir kavram olarak gelişen kesirli türev kavramı sonunda keyfi mertebeden türev ve integral teorisinin ortaya çıkmasına neden olmuştur. Son yıllarda gerçek hayat durumlarını modellemede tam sayı mertebeden türev ve integrale göre kesirli mertebeden türev ve integralin daha yeterli olduğu yapılan çalışmalarda görülmüştür. Kesirli türev - integral kavramları matematiğin yanında pek çok bilim dalında kullanılmakta, bunun bir yansıması olarak kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemler matematiksel modeller oluşturmada sık sık kullanılmaktadır (Podlubny, 1999). Gerçek hayatta karşılaşılan pek çok doğal sürecin modellenmesinde kısmi diferansiyel denklemler kullanılır. Bu duruma hava akımının uçak gövdesi etrafındaki hareketinin modellenmesi, metallerin ısınma ve erimesinin tahmin ve kontrolünün modellenmesi, bir yapının statik ve dinamik özelliklerinin modellenmesi gibi örnekler verilebilir (Şolín, 2006). Bu durum kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin önemini arttırmaktadır.

Lineer ve lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerinin bulunmasında farklı yöntemler geliştirilmiştir. Değiştirilmiş genişletilmiş tanh fonksiyon yöntemi (Seadawy ve ark., 2017), Sine - Gordon açılım yöntemi (Taşbozan ve ark., 2018), genelleştirilmiş Kudryashov yöntemi (Islam ve ark., 2019), geliştirilmiş F - açılım yöntemi (Islam ve ark., 2019), değiştirilmiş $\exp(-\phi(n))$ açılım fonksiyonu yöntemi

(İlhan ve ark., 2018), $(1/G')$ açılım yöntemi (Durur ve ark., 2021), (G'/G) açılım yöntemi (Feng ve ark., 2011), homotopi pertürbasyon yöntemi (Gepreel, 2011), $\tanh - \coth$ yöntemi (Gözükızıl ve Akçağıl, 2013), Jakobi eliptik açılım yöntemi (Taşbozan ve ark., 2016), $(G'/G, 1/G)$ açılım yöntemi (Li ve ark., 2010) bu yöntemlerden bazılarıdır.

Bu tezde kesirli mertebeden Dodd - Bullough - Mikhailov, kesirli mertebeden Kolmogorov - Petrovskii - Piskunov, kesirli mertebeden Oskolkov ve kesirli mertebeden Benny Luke denklemlerinin analitik çözümleri $(G'/G, 1/G)$ açılım yöntemi kullanılarak elde edilmiştir.



2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Li ve ark. (2010) yaptıkları çalışmada $(G'/G, 1/G)$ açılım yöntemini Zakharov denkleminde uygulayarak keyfi parametreler için analitik çözümler elde etmişlerdir.

Zayed ve Abdelaziz (2012) yaptıkları çalışmada KdV - mKdV denkleminde $(G'/G, 1/G)$ açılım yöntemini uygulayarak analitik çözümler elde etmişlerdir.

Ghafoor ve ark. (2013) genelleştirilmiş Zakharov - Kuznetsov denklemi, değiştirilmiş Zakharov - Kuznetsov denklemi ve Sharma - Tasso - Olver denkleminde $(G'/G, 1/G)$ açılım yöntemini uygulayarak analitik çözümlerini elde etmişlerdir.

Demiray ve ark. (2014) Boussinesq denklemi ve varyant Boussinesq denklemleri sistemine $(G'/G, 1/G)$ açılım yöntemini uygulayarak analitik çözümlerini elde etmişlerdir.

İnan ve ark. (2015) yaptıkları çalışmada yeni beşinci mertebeden oluşum denklemi ve Burgers KP denkleminde $(G'/G, 1/G)$ açılım yöntemini uygulayarak genel çözümler elde etmişlerdir.

Ayhan (2015) tarafından yapılan çalışmada $(2+1)$ boyutlu KdV4, KdV6, $(1+1)$ boyutlu KdV8 ve $(2+1)$ boyutlu KdV8 denklemlerine $(G'/G, 1/G)$ açılım yöntemini uygulayarak analitik çözümler elde etmiştir.

Yaşar ve Giresunlu (2016), yaptıkları çalışmada $(G'/G, 1/G)$ açılım yöntemini kullanarak $(2+1)$ boyutlu Konopelchenko - Dubrovsky sistemi için analitik çözümler elde etmişlerdir.

Miah ve ark. (2017) yaptıkları çalışmada, $(G'/G, 1/G)$ açılım yöntemini kullanarak $(2+1)$ boyutlu tipik kırılma soliton denklemi ve $(1+1)$ boyutlu klasik Boussinesq denklemi için analitik çözümler elde etmişlerdir.

Kuzu (2018) yaptığı çalışmada Burgers - Like denklemi ve Zakharov - Kuznetsov denkleminde $(G'/G, 1/G)$ açılım yöntemini uygulayarak analitik çözümler elde etmiştir.

Esen (2018) farklı yöntemlere yer verdiği çalışmasında Drinfeld - Sokolov denklem sistemi, değiştirilmiş Benjamin - Bona - Mahony denklemi ve Boito - Leon -Manna - Pempinelli denkleminde $(G'/G, 1/G)$ açılım yöntemini uygulayarak çözümler elde etmiştir.

Bulut (2019) yaptığı çalışmada $(G'/G, 1/G)$ açılım yöntemini Tipik Kırılma denklemi ve Burger - Huxley denkleminde uygulayarak analitik çözümler elde etmiştir.

Yokuş ve ark. (2019) farklı yöntemlere yer verdikleri çalışmalarında $(G'/G, 1/G)$

açılım yöntemini (3+1) boyutlu Zakharov - Kuznetsov denkleminde uygulayarak analitik çözümler elde etmişlerdir.

Yokuş ve ark. (2020a) iki farklı açılım yöntemine yer verdikleri çalışmalarında $(G'/G, 1/G)$ açılım yöntemini Bogoyavlenskii denkleminde uygulayarak denklemin tam çözümlerini elde etmişlerdir.

Yokuş ve ark. (2020b) Gilson - Pickering denkleminin çözümlerini elde etmek için iki farklı yöntemine yer verdikleri çalışmalarında $(G'/G, 1/G)$ açılım yöntemini uygulayarak çözümler elde etmişlerdir.

Yokuş ve ark. (2020c) iki farklı açılım yöntemine yer verdikleri çalışmalarında Zhiber - Shabat denkleminde $(G'/G, 1/G)$ açılım yöntemini uygulayarak çözümler elde etmişlerdir.

Duran (2020) iki farklı yöntemine yer verdiği çalışmasında birleştirilmiş Konno - Oono denkleminde $(G'/G, 1/G)$ açılım yöntemini uygulayarak analitik çözümler elde etmiştir.

Duran (2021) yaptığı çalışmasında (2+1) boyutlu Boiti - Leon - Pempinelli (BLP) sisteminin analitik çözümlerini $(G'/G, 1/G)$ açılım yöntemini kullanarak elde etmiştir.

Yokuş ve Durur (2021) (3+1) boyutlu Jimba - Miwa denkleminde $(G'/G, 1/G)$ açılım yöntemini uygulayarak analitik çözümler elde etmişlerdir (Yokuş ve Durur, 2021).

Ünal ve Ekici (2021) yaptıkları çalışmada $(G'/G, 1/G)$ açılım yöntemini birleşik KdV denkleminde, negatif sıralı KdV denkleminde (KdV - nKdV) ve kesirli mertebeden Calogero - Bogoyavlinskii - Schiff denkleminde uygulayarak analitik çözümler elde etmişlerdir.

Sadaf ve ark. (2022) iki farklı yöntemine yer verdikleri çalışmalarında Fokas sisteminin analitik çözümlerini elde etmek için $(G'/G, 1/G)$ açılım yöntemini kullanmıştır.

Miah (2022) yaptığı çalışmasında beşinci dereceden Caodrey - Dodd - Gibbon denkleminde $(G'/G, 1/G)$ açılım yöntemini uygulayarak analitik çözümler elde etmiştir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde, conformable kesirli mertebeden türev yaklaşımının tanımı verildikten sonra $(G'/G, 1/G)$ açılım yöntemi tanıtıldı.

3.1. Materyal

k pozitif tam sayı olmak üzere $n \in [k-1, k)$ için bir h fonksiyonunun n . mertebeden Riemann - Liouville türevi

$$D_a^n[h(t)] = \frac{1}{\Gamma(k-n)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t \frac{h(x)}{(t-x)^{n-k+1}} dx \quad (3.1)$$

şeklindedir (Khalil ve ark., 2014).

$n \in [k-1, k)$ olmak üzere bir h fonksiyonunun n . mertebeden Caputo türevi

$$D_a^n[h(t)] = \frac{1}{\Gamma(k-n)} \int_a^t \frac{h^k(x)}{(t-x)^{n-k+1}} dx \quad (3.2)$$

ile tanımlıdır (Khalil ve ark., 2014).

Riemann - Liouville ve Caputo kesirli türev yaklaşımların lineer olma özelliğini sağladıkları yukarıda verilen tanımlarından kolayca görülmektedir (Khalil ve ark., 2014). Bu iki kesirli türev yaklaşımının da bazı dezavantajları aşağıdaki gibidir (Khalil ve ark., 2014).

- i. Herhangi bir sabit fonksiyonun Riemann - Liouville kesirli türevi sıfıra eşit değildir.
- ii. Her iki kesirli türev yaklaşımı da iki fonksiyonun çarpımının türev formülünü sağlamamaktadır.
- iii. Her iki kesirli türev yaklaşımı da iki fonksiyonun bölümünün türev formülünü sağlamamaktadır. Her iki kesirli türev yaklaşımı

$$D_a^n((f \circ h)(t)) = f^p(h(t))h^n(t)$$

eşitliği ile verilen zincir kuralını sağlamamaktadır.

- iv. Her iki kesirli türev yaklaşımı da

$$D^n D^k f(t) = D^{n+k} f(t)$$

eşitliğini sağlamamaktadır.

Khalil ve ark. tarafından 2014 yılında conformable kesirli türev yaklaşımı olarak adlandırılan türev yaklaşımı verildi. Bu türev yaklaşımı, Riemann - Liouville ve Caputo kesirli türev yaklaşımlarının sağlamadığı özellikleri sağlamaktadır (Khalil ve ark., 2014).

Tanım 3.1: $h: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $t > 0$ ve $n \in (0,1)$

olmak üzere n . mertebeden bir h fonksiyonunun conformable kesirli mertebeden türevi

$$T_n(h)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{h(t + \varepsilon t^{1-n}) - h(t)}{\varepsilon}$$

ile tanımlıdır. $\lim_{t \rightarrow 0^+} h^{(n)}(t)$ limiti mevcut ve $a > 0$ için $(0, a)$ aralığında $h(t)$ fonksiyonu

n . mertebeden diferansiyellenebilir ise

$$h^{(n)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} h^{(n)}(t)$$

eşitliği sağlanmaktadır (Khalil ve ark., 2014).

Teorem 3.1: $h: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $t_0 > 0$ ve $n \in (0, 1]$ olmak üzere bir h fonksiyonu n . mertebeden diferansiyellenebilir ise h fonksiyonu t_0 noktasında süreklidir (Khalil ve ark., 2014).

Teorem 3.2: $n \in (0, 1]$ için h, g fonksiyonları $t > 0$ noktasında n . mertebeden diferansiyellenebilir olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitlikler geçerlidir (Khalil ve ark., 2014).

- 1) Her $a, b \in \mathbb{R}$ için $T_n(ah(t) + bg(t)) = aT_n(h(t)) + bT_n(g(t))$
- 2) Her $q \in \mathbb{R}$ için $T_n(t^q) = qt^{q-n}$
- 3) Her $h(t) = d$ sabit fonksiyonu için $T_n(d) = 0$
- 4) $T_n(h(t)g(t)) = h(t)T_n(g(t)) + g(t)T_n(h(t))$
- 5) $T_n\left(\frac{h(t)}{g(t)}\right) = \frac{g(t)T_n(h(t)) - h(t)T_n(g(t))}{(g(t))^2}$
- 6) $T_n(h(t)) = t^{1-n} \frac{dh(t)}{dt}$

3.2. Yöntem

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek amacıyla, 2010 yılında Li ve ark. tarafından $(G'/G, 1/G)$ açılım yöntemi önerildi. (G'/G) açılım yönteminin genişletilmiş hali olan yöntemde ana fikir analitik çözümlerin (G'/G) ve $(1/G)$ değişkenlerini içeren bir fonksiyonla ifade edilmesidir (Li ve ark., 2010).

λ, μ keyfi sabitler ve $G = G(\xi)$,

$$G''(\xi) + \lambda G(\xi) = \mu \quad (3.3)$$

şeklindeki ikinci mertebeden adi türevli diferansiyel denklemin çözümü olmak üzere

$$\phi = G'/G \text{ ve } \psi = 1/G \quad (3.4)$$

biçiminde tanımlanırsa, ϕ ile ψ fonksiyonlarının türevleri (3.3) ve (3.4) eşitliklerinin yardımıyla

$$\begin{aligned} \phi' &= \frac{G''G - G'G'}{G^2} \\ &= \frac{G''}{G} - \left(\frac{G'}{G}\right)^2 \\ &= \frac{\mu - \lambda G}{G} - \phi^2 \\ &= \mu \frac{1}{G} - \lambda - \phi^2 \\ &= \mu\psi - \lambda - \phi^2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

ve

$$\begin{aligned} \psi' &= -\frac{G'}{G^2} \\ &= -\frac{G'}{G} \frac{1}{G} \\ &= -\phi\psi \end{aligned} \quad (3.6)$$

olarak elde edilir. (3.5) ve (3.6) denklemlerinin kullanılmasıyla (3.3) ile verilen ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemin analitik çözümü λ değişkeninin durumuna göre üç farklı durum için incelenir.

1.durum: $\lambda < 0$ ise (3.3) denkleminin genel çözümü

$$G(\xi) = A_1 \sinh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_2 \cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + \frac{\mu}{\lambda} \quad (3.7)$$

biçimindedir. Burada A_1 ve A_2 keyfi sabitler ve $\sigma = A_1^2 - A_2^2$ şeklindedir.

(3.7) eşitliğinin yardımıyla

$$\psi^2 = \frac{-\lambda(\phi^2 - 2\mu\psi + \lambda)}{\lambda^2\sigma + \mu^2} \quad (3.8)$$

eşitliği elde edilir.

2.durum: $\lambda > 0$ ise (3.3) denkleminin genel çözümü

$$G(\xi) = A_1 \sin(\sqrt{\lambda}\xi) + A_2 \cos(\sqrt{\lambda}\xi) + \frac{\mu}{\lambda} \quad (3.9)$$

biçimindedir. Burada A_1 ve A_2 keyfi sabitler ve $\rho = A_1^2 + A_2^2$ şeklindedir.

(3.9) eşitliğinin yardımıyla

$$\psi^2 = \frac{\lambda(\phi^2 - 2\mu\psi + \lambda)}{\lambda^2\rho - \mu^2} \quad (3.10)$$

eşitliği elde edilir.

3.durum: $\lambda = 0$ ise (3.3) denkleminin genel çözümü

$$G(\xi) = \frac{\mu}{2}\xi^2 + A_1\xi + A_2 \quad (3.11)$$

biçimindedir. Burada A_1 ve A_2 keyfi sabitlerdir. (3.11) eşitliğinin yardımıyla

$$\psi^2 = \frac{\phi^2 - 2\mu\psi}{A_1^2 - 2\mu A_2} \quad (3.12)$$

eşitliği elde edilir.

$(G'/G, 1/G)$ açılım yöntemi ile kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerinin bulunabilmesi için aşağıdaki adımlar takip edilir (Li ve ark., 2010). Conformable kesirli mertebeden türev içeren lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemin genel formu

$$Q\left(\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \dots\right) = 0 \quad (3.13)$$

biçimindedir. Burada α , conformable anlamında kesirli mertebeden türevi göstermektedir.

1.adım: (3.13) ile verilen kesirli mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemde $\xi = x + w \frac{t^\alpha}{\alpha}$ olmak üzere $u(x, t) = U(\xi)$ dönüşümü uygulanırsa (3.13) denklemi

$$G(U, U_\xi, U_{\xi\xi}, \dots) = 0 \quad (3.14)$$

biçiminde adi diferansiyel denkleme dönüşür.

2.adım: (3.14) denkleminin analitik çözümü ϕ ve ψ fonksiyonlarını içeren

$$U(\xi) = \sum_{i=0}^N a_i \phi^i + \sum_{i=1}^N b_i \phi^{i-1} \psi \quad (3.15)$$

formundaki fonksiyon şeklinde aranır. (3.15) eşitliğinde yer alan a_i ($i = 0, \dots, N$), b_i ($i = 1, \dots, N$), w , λ ve μ sonradan hesaplanacak sabitler olup, N pozitif tam sayısı ise (3.14) denkleminde bulunan en yüksek mertebeden türev içeren terim ile en yüksek dereceden lineer olmayan terimin karşılaştırılması sonucu elde edilen homojen dengeleme terimidir. N homojen dengeleme terimi; en yüksek mertebeden türev içeren terim yardımı ile elde edilen

$$O\left(\frac{\partial^p u}{\partial \xi^p}\right) = N + p, \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

ve en yüksek dereceden lineer olmayan terimin yardımı ile bulunan

$$O\left(u^q \frac{\partial^p u}{\partial \xi^p}\right) = qN + p, \quad q, p = 0, 1, 2, \dots$$

ifadelerinin birbirine eşitlenmesi ile bulunur (Lai ve ark., 2009).

3.adım: (3.5), (3.6) denklemleri ve λ değerinin aldığı değere göre (3.8), (3.10) veya (3.12) denklemlerinden birinin (3.14) denkleminde yerlerine yazılmasıyla, (3.14) denklemi ϕ ve ψ fonksiyonlarına bağlı bir eşitliğe dönüşür. Elde edilen eşitlikteki ψ fonksiyonunun kuvvetinin 1 den büyük olmamasına dikkat edilmelidir. Eşitlikteki ϕ ve ψ fonksiyonlarının katsayıları sıfıra eşitlenerek cebirsel denklem sistemi elde edilir.

4.adım: 3.adımda elde edilen cebirsel denklem sistemi çözülerek a_i , b_i , w , λ , μ , A_1 ve A_2 değerleri bulunur ve λ değerinin farklı durumları için (3.13) denkleminin hiperbolik, trigonometrik ve rasyonel analitik çözümleri elde edilir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

4.1. Kesirli Mertebeden Dodd - Bullough - Mikhailov Denkleminin Çözümleri

Bu kısımda, conformable kesirli mertebeden Dodd - Bullough - Mikhailov (DBM) denkleminin $(G'/G, 1/G)$ açılım yöntemi uygulanarak açık çözümler elde edilmiştir.

Zin ve arkadaşları, 2017 yılında tam sayı mertebeden türev içeren

$$u_{xt} + ae^u + de^{-2u} = 0 \quad (4.1)$$

DBM denkleminin analitik çözümünü elde ettiler (Zin ve ark., 2017). (4.1) ile verilen kısmi diferansiyel denklemin conformable kesirli mertebeden formu

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} \right) + ae^u + de^{-2u} = 0 \quad (4.2)$$

şeklindedir. Burada α conformable kesirli mertebeden türevi göstermekte olup, $0 < \alpha < 1$ şeklindedir.

(4.2) ile verilen denkleme $u(x, t) = U(\xi)$, $\xi = x + w \frac{t^\alpha}{\alpha}$ dönüşümü uygulanırsa, conformable kesirli mertebeden denklem

$$wU_{\xi\xi} + ae^U + de^{-2U} = 0 \quad (4.3)$$

formundaki adi türevli diferansiyel denkleme dönüşür. (4.3) ile verilen adi diferansiyel denkleme

$$V = e^U \quad (4.4)$$

dönüşümü yani eşdeğeri olarak

$$U = \ln V \quad (4.5)$$

dönüşümü uygulansın. Bu dönüşüm yardımı ile

$$U_\xi = \frac{V'}{V} \quad (4.6)$$

$$U_{\xi\xi} = \frac{V''V - (V')^2}{V^2} \quad (4.7)$$

eşitlikleri elde edilir. (4.4) dönüşümünden elde edilen (4.5) ve (4.7) eşitlikleri (4.3) ile verilen adi türevli diferansiyel denkleminde uygulanırsa

$$w \left(\frac{V''V - (V')^2}{V^2} \right) + aV + \frac{d}{V^2} = 0 \quad (4.8)$$

elde edilir. (4.8) ile verilen denklem düzenlendiğinde

$$w(V''V - (V')^2) + aV^3 + d = 0 \quad (4.9)$$

bulunur. (4.9) denkleminde en yüksek mertebeden türev içeren terim $V'''V$ ile en yüksek dereceden lineer olmayan terim V^3 ifadelerinin kullanılmasıyla homojen dengeleme terimi olan N değeri $2N + 2 = 3N$ eşitliğinden $N = 2$ olarak bulunur. Dolayısıyla (4.3) denklemi için

$$V(\xi) = a_0 + a_1\phi(\xi) + a_2\phi^2(\xi) + b_1\psi(\xi) + b_2\phi(\xi)\psi(\xi) \quad (4.10)$$

formunda bir analitik çözüm fonksiyonu elde edilir. (4.10) eşitliğinden $V'(\xi), V''(\xi)$ hesaplanarak (4.9) denkleminde yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa $\phi(\xi)$ ve $\psi(\xi)$ fonksiyonlarının kuvvetlerinden oluşan bir denklem sistemi elde edilir. Elde edilen denklem sistemindeki $\phi(\xi)$ ve $\psi(\xi)$ fonksiyonlarının kuvvetlerinin katsayıları

$$\begin{aligned} \text{Sabit:} \quad & aa_0^3 + d - a_1^2w\lambda^2 + 2a_0a_2w\lambda^2 \\ \phi(\xi): \quad & 3aa_0^2a_1 + 2a_0a_1w\lambda - 2a_1a_2w\lambda^2 \\ \phi^2(\xi): \quad & 3aa_0a_1^2 + 3aa_0^2a_2 + 8a_0a_2w\lambda - 2a_2^2w\lambda^2 \\ \phi^3(\xi): \quad & aa_1^3 + 6aa_0a_1a_2 + 2a_0a_1w + 2a_1a_2w\lambda \\ \phi^4(\xi): \quad & 3aa_1^2a_2 + 3aa_0a_2^2 + a_1^2w + 6a_0a_2w \\ \phi^5(\xi): \quad & 3aa_1a_2^2 + 4a_1a_2w \\ \phi^6(\xi): \quad & aa_2^3 + 2a_2^2w \\ \psi(\xi): \quad & 3aa_0^2b_1 + a_0b_1w\lambda + 2a_2b_1w\lambda^2 - 2a_1b_2w\lambda^2 + 2a_1^2w\lambda\mu - 4a_0a_2w\lambda\mu \\ \phi(\xi)\psi(\xi): \quad & 6aa_0a_1b_1 + 3aa_0^2b_2 + a_1b_1w\lambda + 5a_0b_2w\lambda - 2a_2b_2w\lambda^2 - 3a_0a_1w\mu + \\ & 4a_1a_2w\lambda\mu \\ \phi^2(\xi)\psi(\xi): \quad & 3aa_1^2b_1 + 6aa_0a_2b_1 + 6aa_0a_1b_2 + 2a_0b_1w + 5a_2b_1w\lambda + a_1b_2w\lambda - \\ & a_1^2w\mu - 10a_0a_2w\mu + 4a_2^2w\lambda\mu \\ \phi^3(\xi)\psi(\xi): \quad & 6aa_1a_2b_1 + 3aa_1^2b_2 + 6aa_0a_2b_2 + 2a_1b_1w + 6a_0b_2w + a_2b_2w\lambda - \\ & 5a_1a_2w\mu \\ \phi^4(\xi)\psi(\xi): \quad & 3aa_2^2b_1 + 6aa_1a_2b_2 + 4a_2b_1w + 4a_1b_2w - 2a_2^2w\mu \\ \phi^5(\xi)\psi(\xi): \quad & 3aa_2^2b_2 + 4a_2b_2w \\ \psi^2(\xi): \quad & 3aa_0b_1^2 + b_1^2w\lambda - b_2^2w\lambda^2 - a_0b_1w\mu - 4a_2b_1w\lambda\mu + 4a_1b_2w\lambda\mu - \\ & a_1^2w\mu^2 + 2a_0a_2w\mu^2 \\ \phi(\xi)\psi^2(\xi): \quad & 3aa_1b_1^2 + 6aa_0b_1b_2 + 4b_1b_2w\lambda - 2a_1b_1w\mu - 6a_0b_2w\mu + 4a_2b_2w\lambda\mu - \\ & 2a_1a_2w\mu^2 \\ \phi^2(\xi)\psi^2(\xi): \quad & 3aa_2b_1^2 + 6aa_1b_1b_2 + 3aa_0b_2^2 + b_1^2w + b_2^2w\lambda - 7a_2b_1w\mu - \\ & 3a_1b_2w\mu - 2a_2^2w\mu^2 \\ \phi^3(\xi)\psi^2(\xi): \quad & 6aa_2b_1b_2 + 3aa_1b_2^2 + 4b_1b_2w - 4a_2b_2w\mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi^4(\xi)\psi^2(\xi): & 3aa_2b_2^2 + 2b_2^2w \\
\psi^3(\xi): & ab_1^3 - b_1^2w\mu + 2b_2^2w\lambda\mu + 2a_2b_1w\mu^2 - 2a_1b_2w\mu^2 \\
\phi(\xi)\psi^3(\xi): & 3ab_1^2b_2 - 5b_1b_2w\mu - 2a_2b_2w\mu^2 \\
\phi^2(\xi)\psi^3(\xi): & 3ab_1b_2^2 - 2b_2^2w\mu \\
\phi^3(\xi)\psi^3(\xi): & ab_2^3 \\
\psi^4(\xi): & -b_2^2w\mu^2
\end{aligned} \tag{4.11}$$

biçimindedir.

1.durum: $\lambda < 0$ için (3.8) eşitliği kullanılarak $\psi(\xi)$ fonksiyonunun kuvvetleri $\psi(\xi)$ fonksiyonuna kadar indirgenirse, $\phi(\xi)$ ve $\psi(\xi)$ fonksiyonlarının kuvvetlerinin yeni katsayıları

$$\begin{aligned}
\text{Sabit:} \quad & aa_0^3 + d - a_1^2w\lambda^2 + 2a_0a_2w\lambda^2 + \frac{4b_2^2w\lambda^4\mu^4}{(\mu^2 + \lambda^2\sigma)^3} - \frac{2ab_1^3\lambda^3\mu}{(\mu^2 + \lambda^2\sigma)^2} \\
& + \frac{2b_1^2w\lambda^3\mu^2}{(\mu^2 + \lambda^2\sigma)^2} - \frac{5b_2^2w\lambda^4\mu^2}{(\mu^2 + \lambda^2\sigma)^2} - \frac{4a_2b_1w\lambda^3\mu^3}{(\mu^2 + \lambda^2\sigma)^2} \\
& + \frac{4a_1b_2w\lambda^3\mu^3}{(\mu^2 + \lambda^2\sigma)^2} - \frac{3aa_0b_1^2\lambda^2}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} - \frac{b_1^2w\lambda^3}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} + \frac{b_2^2w\lambda^4}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} \\
& + \frac{a_0b_1w\lambda^2\mu}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} + \frac{4a_2b_1w\lambda^3\mu}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} - \frac{4a_1b_2w\lambda^3\mu}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} + \frac{a_1^2w\lambda^2\mu^2}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} \\
& - \frac{2a_0a_2w\lambda^2\mu^2}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} \\
\phi(\xi): \quad & 3aa_0^2a_1 + 2a_0a_1w\lambda - 2a_1a_2w\lambda^2 - \frac{6ab_1^2b_2\lambda^3\mu}{(\mu^2 + \lambda^2\sigma)^2} + \frac{10b_1b_2w\lambda^3\mu^2}{(\mu^2 + \lambda^2\sigma)^2} \\
& + \frac{4a_2b_2w\lambda^3\mu^3}{(\mu^2 + \lambda^2\sigma)^2} - \frac{3aa_1b_1^2\lambda^2}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} - \frac{6aa_0b_1b_2\lambda^2}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} - \frac{4b_1b_2w\lambda^3}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} \\
& + \frac{2a_1b_1w\lambda^2\mu}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} + \frac{6a_0b_2w\lambda^2\mu}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} - \frac{4a_2b_2w\lambda^3\mu}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} + \frac{2a_1a_2w\lambda^2\mu^2}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} \\
\phi^2(\xi): \quad & 3aa_0a_1^2 + 3aa_0^2a_2 + 8a_0a_2w\lambda - 2a_2^2w\lambda^2 + \frac{4b_2^2w\lambda^3\mu^4}{(\mu^2 + \lambda^2\sigma)^3} \\
& - \frac{2ab_1^3\lambda^2\mu}{(\mu^2 + \lambda^2\sigma)^2} - \frac{6ab_1b_2^2\lambda^3\mu}{(\mu^2 + \lambda^2\sigma)^2} + \frac{2b_1^2w\lambda^2\mu^2}{(\mu^2 + \lambda^2\sigma)^2} \\
& - \frac{2b_2^2w\lambda^3\mu^2}{(\mu^2 + \lambda^2\sigma)^2} - \frac{4a_2b_1w\lambda^2\mu^3}{(\mu^2 + \lambda^2\sigma)^2} + \frac{4a_1b_2w\lambda^2\mu^3}{(\mu^2 + \lambda^2\sigma)^2} - \frac{3aa_0b_1^2\lambda}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} \\
& - \frac{3aa_2b_1^2\lambda^2}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} - \frac{6aa_1b_1b_2\lambda^2}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} - \frac{3aa_0b_2^2\lambda^2}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} - \frac{2b_1^2w\lambda^2}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} \\
& + \frac{a_0b_1w\lambda\mu}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} + \frac{11a_2b_1w\lambda^2\mu}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} - \frac{a_1b_2w\lambda^2\mu}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} + \frac{a_1^2w\lambda\mu^2}{\mu^2 + \lambda^2\sigma}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2a_0a_2w\lambda\mu^2}{\mu^2+\lambda^2\sigma} + \frac{2a_2^2w\lambda^2\mu^2}{\mu^2+\lambda^2\sigma} \\
\phi^3(\xi): & \quad aa_1^3 + 6aa_0a_1a_2 + 2a_0a_1w + 2a_1a_2w\lambda - \frac{6ab_1^2b_2\lambda^2\mu}{(\mu^2+\lambda^2\sigma)^2} - \frac{2ab_2^3\lambda^3\mu}{(\mu^2+\lambda^2\sigma)^2} \\
& + \frac{10b_1b_2w\lambda^2\mu^2}{(\mu^2+\lambda^2\sigma)^2} + \frac{4a_2b_2w\lambda^2\mu^3}{(\mu^2+\lambda^2\sigma)^2} - \frac{3aa_1b_1^2\lambda}{\mu^2+\lambda^2\sigma} - \frac{6aa_0b_1b_2\lambda}{\mu^2+\lambda^2\sigma} \\
& - \frac{6aa_2b_1b_2\lambda^2}{\mu^2+\lambda^2\sigma} - \frac{3aa_1b_2^2\lambda^2}{\mu^2+\lambda^2\sigma} - \frac{8b_1b_2w\lambda^2}{\mu^2+\lambda^2\sigma} + \frac{2a_1b_1w\lambda\mu}{\mu^2+\lambda^2\sigma} \\
& + \frac{6a_0b_2w\lambda\mu}{\mu^2+\lambda^2\sigma} + \frac{2a_1a_2w\lambda\mu^2}{\mu^2+\lambda^2\sigma} \\
\phi^4(\xi): & \quad 3aa_1^2a_2 + 3aa_0a_2^2 + a_1^2w + 6a_0a_2w - \frac{6ab_1b_2^2\lambda^2\mu}{(\mu^2+\lambda^2\sigma)^2} + \frac{3b_2^2w\lambda^2\mu^2}{(\mu^2+\lambda^2\sigma)^2} \\
& - \frac{3aa_2b_1^2\lambda}{\mu^2+\lambda^2\sigma} - \frac{6aa_1b_1b_2\lambda}{\mu^2+\lambda^2\sigma} - \frac{3aa_0b_2^2\lambda}{\mu^2+\lambda^2\sigma} - \frac{b_1^2w\lambda}{\mu^2+\lambda^2\sigma} \\
& - \frac{3aa_2b_2^2\lambda^2}{\mu^2+\lambda^2\sigma} - \frac{3b_2^2w\lambda^2}{\mu^2+\lambda^2\sigma} + \frac{7a_2b_1w\lambda\mu}{\mu^2+\lambda^2\sigma} + \frac{3a_1b_2w\lambda\mu}{\mu^2+\lambda^2\sigma} \\
& + \frac{2a_2^2w\lambda\mu^2}{\mu^2+\lambda^2\sigma} \\
\phi^5(\xi): & \quad 3aa_1a_2^2 + 4a_1a_2w - \frac{2ab_2^3\lambda^2\mu}{(\mu^2+\lambda^2\sigma)^2} - \frac{6aa_2b_1b_2\lambda}{\mu^2+\lambda^2\sigma} - \frac{3aa_1b_2^2\lambda}{\mu^2+\lambda^2\sigma} - \frac{4b_1b_2w\lambda}{\mu^2+\lambda^2\sigma} \\
& + \frac{4a_2b_2w\lambda\mu}{\mu^2+\lambda^2\sigma} \\
\phi^6(\xi): & \quad aa_2^3 + 2a_2^2w - \frac{3aa_2b_2^2\lambda}{\mu^2+\lambda^2\sigma} - \frac{2b_2^2w\lambda}{\mu^2+\lambda^2\sigma} \\
\psi(\xi): & \quad 3aa_0^2b_1 + a_0b_1w\lambda + 2a_2b_1w\lambda^2 - 2a_1b_2w\lambda^2 + 2a_1^2w\lambda\mu - 4a_0a_2w\lambda\mu \\
& - \frac{8b_2^2w\lambda^3\mu^5}{(\mu^2+\lambda^2\sigma)^3} + \frac{4ab_1^3\lambda^2\mu^2}{(\mu^2+\lambda^2\sigma)^2} - \frac{4b_1^2w\lambda^2\mu^3}{(\mu^2+\lambda^2\sigma)^2} \\
& + \frac{12b_2^2w\lambda^3\mu^3}{(\mu^2+\lambda^2\sigma)^2} + \frac{8a_2b_1w\lambda^2\mu^4}{(\mu^2+\lambda^2\sigma)^2} - \frac{8a_1b_2w\lambda^2\mu^4}{(\mu^2+\lambda^2\sigma)^2} - \frac{ab_1^3\lambda^2}{\mu^2+\lambda^2\sigma} \\
& + \frac{6aa_0b_1^2\lambda\mu}{\mu^2+\lambda^2\sigma} + \frac{3b_1^2w\lambda^2\mu}{\mu^2+\lambda^2\sigma} - \frac{4b_2^2w\lambda^3\mu}{\mu^2+\lambda^2\sigma} - \frac{2a_0b_1w\lambda\mu^2}{\mu^2+\lambda^2\sigma} \\
& - \frac{10a_2b_1w\lambda^2\mu^2}{\mu^2+\lambda^2\sigma} + \frac{10a_1b_2w\lambda^2\mu^2}{\mu^2+\lambda^2\sigma} - \frac{2a_1^2w\lambda\mu^3}{\mu^2+\lambda^2\sigma} \\
& + \frac{4a_0a_2w\lambda\mu^3}{\mu^2+\lambda^2\sigma}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi(\xi)\psi(\xi): & 6aa_0a_1b_1 + 3aa_0^2b_2 + a_1b_1w\lambda + 5a_0b_2w\lambda - 2a_2b_2w\lambda^2 - 3a_0a_1w\mu \\
& + 4a_1a_2w\lambda\mu + \frac{12ab_1^2b_2\lambda^2\mu^2}{(\mu^2 + \lambda^2\sigma)^2} - \frac{20b_1b_2w\lambda^2\mu^3}{(\mu^2 + \lambda^2\sigma)^2} \\
& - \frac{8a_2b_2w\lambda^2\mu^4}{(\mu^2 + \lambda^2\sigma)^2} - \frac{3ab_1^2b_2\lambda^2}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} + \frac{6aa_1b_1^2\lambda\mu}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} \\
& + \frac{12aa_0b_1b_2\lambda\mu}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} + \frac{13b_1b_2w\lambda^2\mu}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} - \frac{4a_1b_1w\lambda\mu^2}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} \\
& - \frac{12a_0b_2w\lambda\mu^2}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} + \frac{10a_2b_2w\lambda^2\mu^2}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} - \frac{4a_1a_2w\lambda\mu^3}{\mu^2 + \lambda^2\sigma}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi^2(\xi)\psi(\xi): & 3aa_1^2b_1 + 6aa_0a_2b_1 + 6aa_0a_1b_2 + 2a_0b_1w + 5a_2b_1w\lambda + a_1b_2w\lambda \\
& - a_1^2w\mu - 10a_0a_2w\mu + 4a_2^2w\lambda\mu + \frac{12ab_1b_2^2\lambda^2\mu^2}{(\mu^2 + \lambda^2\sigma)^2} \\
& - \frac{4b_2^2w\lambda^2\mu^3}{(\mu^2 + \lambda^2\sigma)^2} - \frac{ab_1^3\lambda}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} - \frac{3ab_1b_2^2\lambda^2}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} + \frac{6aa_2b_1^2\lambda\mu}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} \\
& + \frac{12aa_1b_1b_2\lambda\mu}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} + \frac{6aa_0b_2^2\lambda\mu}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} + \frac{3b_1^2w\lambda\mu}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} + \frac{2b_2^2w\lambda^2\mu}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} \\
& - \frac{16a_2b_1w\lambda\mu^2}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} - \frac{4a_1b_2w\lambda\mu^2}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} - \frac{4a_2^2w\lambda\mu^3}{\mu^2 + \lambda^2\sigma}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi^3(\xi)\psi(\xi): & 6aa_1a_2b_1 + 3aa_1^2b_2 + 6aa_0a_2b_2 + 2a_1b_1w + 6a_0b_2w + a_2b_2w\lambda \\
& - 5a_1a_2w\mu + \frac{4ab_2^3\lambda^2\mu^2}{(\mu^2 + \lambda^2\sigma)^2} - \frac{3ab_1^2b_2\lambda}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} - \frac{ab_2^3\lambda^2}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} \\
& + \frac{12aa_2b_1b_2\lambda\mu}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} + \frac{6aa_1b_2^2\lambda\mu}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} + \frac{13b_1b_2w\lambda\mu}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} \\
& - \frac{6a_2b_2w\lambda\mu^2}{\mu^2 + \lambda^2\sigma}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi^4(\xi)\psi(\xi): & 3aa_2^2b_1 + 6aa_1a_2b_2 + 4a_2b_1w + 4a_1b_2w - 2a_2^2w\mu - \frac{3ab_1b_2^2\lambda}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} \\
& + \frac{6aa_2b_2^2\lambda\mu}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} + \frac{6b_2^2w\lambda\mu}{\mu^2 + \lambda^2\sigma}
\end{aligned}$$

$$\phi^5(\xi)\psi(\xi): 3aa_2^2b_2 + 4a_2b_2w - \frac{ab_2^3\lambda}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} \quad (4.12)$$

olarak elde edilir. (4.12) ile verilen katsayıların sıfıra eşitlenmesi ve denklem sisteminin Mathematica yardımıyla çözülmesi sonucu elde edilen parametrelerin birbiri cinsinden değerlerinden biri

$$\begin{aligned}
a_0 &= -\frac{2\sqrt{3}\sqrt{d}}{\sqrt{w}\sqrt{-\lambda}}, & a_1 &= 0, & a_2 &= \frac{3\sqrt{3}\sqrt{d}}{\sqrt{w}(-\lambda)^{3/2}}, \\
b_1 &= 0, & b_2 &= \frac{3\sqrt{3}\sqrt{d}\sqrt{\sigma}}{\sqrt{w}\lambda}, \\
a &= \frac{-w^{3/2}(-\lambda)^{3/2}}{3\sqrt{3}\sqrt{d}}, & \mu &= 0
\end{aligned} \tag{4.13}$$

şeklinde olup bir diğeri ise

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{\sqrt{3}\sqrt{d}}{4\sqrt{w}\sqrt{-\lambda}}, & a_1 &= 0, & a_2 &= -\frac{3\sqrt{3}\sqrt{d}}{4\sqrt{w}(-\lambda)^{3/2}}, \\
b_1 &= 0, & b_2 &= 0, \\
a &= \frac{8w^{3/2}(-\lambda)^{3/2}}{3\sqrt{3}\sqrt{d}}, & \mu &= 0
\end{aligned} \tag{4.14}$$

biçimindedir.

(3.7) eşitliği (3.4) eşitliğinde yazılarak düzenlendiğinde

$$\begin{aligned}
\phi(\xi) &= \frac{A_1\sqrt{-\lambda}\cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_2\sqrt{-\lambda}\sinh(\sqrt{-\lambda}\xi)}{\frac{\mu}{\lambda} + A_2\cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_1\sinh(\sqrt{-\lambda}\xi)}, \\
\psi(\xi) &= \frac{1}{\frac{\mu}{\lambda} + A_2\cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_1\sinh(\sqrt{-\lambda}\xi)}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

eşitlikleri elde edilir. (4.15) eşitlikleri (4.10) ile verilen denklemde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
V(\xi) &= a_0 + \frac{b_1}{\frac{\mu}{\lambda} + A_2\cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_1\sinh(\sqrt{-\lambda}\xi)} \\
&+ \frac{b_2 \left(A_1\sqrt{-\lambda}\cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_2\sqrt{-\lambda}\sinh(\sqrt{-\lambda}\xi) \right)}{\left(\frac{\mu}{\lambda} + A_2\cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_1\sinh(\sqrt{-\lambda}\xi) \right)^2} \\
&+ \frac{a_1 \left(A_1\sqrt{-\lambda}\cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_2\sqrt{-\lambda}\sinh(\sqrt{-\lambda}\xi) \right)}{\frac{\mu}{\lambda} + A_2\cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_1\sinh(\sqrt{-\lambda}\xi)} \\
&+ \frac{a_2 \left(A_1\sqrt{-\lambda}\cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_2\sqrt{-\lambda}\sinh(\sqrt{-\lambda}\xi) \right)^2}{\left(\frac{\mu}{\lambda} + A_2\cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_1\sinh(\sqrt{-\lambda}\xi) \right)^2}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Mathematica yardımı ile elde edilen a_0 , a_1 , a_2 , b_1 , b_2 , a , w ve μ parametreleri ve $\xi = x + w \frac{t^\alpha}{\alpha}$ değeri $V(\xi)$ ifadesinde yerlerine yazılıp, (4.5) eşitliğinin

kullanılmasıyla (4.2) ile verilen conformable kesirli mertebeden DBM denkleminin analitik çözümleri elde edilir. (4.13) ile verilen parametrelerin değerleri için elde edilen analitik çözüm

$$\xi = x + w \frac{t^\alpha}{\alpha} \quad \text{ve} \quad \sigma = A_1^2 - A_2^2 \text{ olmak üzere}$$

$$u(x, t) = \ln \left(-\frac{2\sqrt{3}\sqrt{d}}{\sqrt{w}\sqrt{-\lambda}} + \frac{3\sqrt{3}\sqrt{d}\sqrt{\sigma} \left(A_1\sqrt{-\lambda}\cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_2\sqrt{-\lambda}\sinh(\sqrt{-\lambda}\xi) \right)}{\sqrt{w}\lambda \left(A_2\cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_1\sinh(\sqrt{-\lambda}\xi) \right)^2} + \frac{3\sqrt{3}\sqrt{d} \left(A_1\sqrt{-\lambda}\cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_2\sqrt{-\lambda}\sinh(\sqrt{-\lambda}\xi) \right)^2}{\sqrt{w}(-\lambda)^{3/2} \left(A_2\cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_1\sinh(\sqrt{-\lambda}\xi) \right)^2} \right)$$

biçimindedir. Burada (4.14) ile verilen parametrelerin değerleri için elde edilen analitik çözüm ise

$$\xi = x + w \frac{t^\alpha}{\alpha} \quad \text{ve} \quad \sigma = A_1^2 - A_2^2 \text{ olmak üzere}$$

$$u(x, t) = \ln \left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{d}}{4\sqrt{w}\sqrt{-\lambda}} - \frac{3\sqrt{3}\sqrt{d} \left(A_1\sqrt{-\lambda}\cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_2\sqrt{-\lambda}\sinh(\sqrt{-\lambda}\xi) \right)^2}{4\sqrt{w}(-\lambda)^{3/2} \left(A_2\cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_1\sinh(\sqrt{-\lambda}\xi) \right)^2} \right)$$

biçiminde olacaktır.

2.durum: $\lambda > 0$ için (3.10) eşitliği kullanılarak $\psi(\xi)$ fonksiyonunun kuvvetleri $\psi(\xi)$ fonksiyonuna kadar indirgenirse, $\phi(\xi)$ ve $\psi(\xi)$ fonksiyonlarının kuvvetlerinin yeni katsayıları

$$\begin{aligned} \text{Sabit:} \quad & aa_0^3 + d - a_1^2 w \lambda^2 + 2a_0 a_2 w \lambda^2 - \frac{4b_2^2 w \lambda^4 \mu^4}{(-\mu^2 + \lambda^2 \rho)^3} - \frac{2ab_1^3 \lambda^3 \mu}{(-\mu^2 + \lambda^2 \rho)^2} \\ & + \frac{2b_1^2 w \lambda^3 \mu^2}{(-\mu^2 + \lambda^2 \rho)^2} - \frac{5b_2^2 w \lambda^4 \mu^2}{(-\mu^2 + \lambda^2 \rho)^2} - \frac{4a_2 b_1 w \lambda^3 \mu^3}{(-\mu^2 + \lambda^2 \rho)^2} \\ & + \frac{4a_1 b_2 w \lambda^3 \mu^3}{(-\mu^2 + \lambda^2 \rho)^2} + \frac{3aa_0 b_1^2 \lambda^2}{-\mu^2 + \lambda^2 \rho} + \frac{b_1^2 w \lambda^3}{-\mu^2 + \lambda^2 \rho} - \frac{b_2^2 w \lambda^4}{-\mu^2 + \lambda^2 \rho} \\ & - \frac{a_0 b_1 w \lambda^2 \mu}{-\mu^2 + \lambda^2 \rho} - \frac{4a_2 b_1 w \lambda^3 \mu}{-\mu^2 + \lambda^2 \rho} + \frac{4a_1 b_2 w \lambda^3 \mu}{-\mu^2 + \lambda^2 \rho} - \frac{a_1^2 w \lambda^2 \mu^2}{-\mu^2 + \lambda^2 \rho} \\ & + \frac{2a_0 a_2 w \lambda^2 \mu^2}{-\mu^2 + \lambda^2 \rho} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi(\xi): \quad & 3aa_0^2a_1 + 2a_0a_1w\lambda - 2a_1a_2w\lambda^2 - \frac{6ab_1^2b_2\lambda^3\mu}{(-\mu^2 + \lambda^2\rho)^2} + \frac{10b_1b_2w\lambda^3\mu^2}{(-\mu^2 + \lambda^2\rho)^2} \\
& + \frac{4a_2b_2w\lambda^3\mu^3}{(-\mu^2 + \lambda^2\rho)^2} + \frac{3aa_1b_1^2\lambda^2}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} + \frac{6aa_0b_1b_2\lambda^2}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} + \frac{4b_1b_2w\lambda^3}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} \\
& - \frac{2a_1b_1w\lambda^2\mu}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} - \frac{6a_0b_2w\lambda^2\mu}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} + \frac{4a_2b_2w\lambda^3\mu}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} - \frac{2a_1a_2w\lambda^2\mu^2}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} \\
\phi^2(\xi): \quad & 3aa_0a_1^2 + 3aa_0^2a_2 + 8a_0a_2w\lambda - 2a_2^2w\lambda^2 - \frac{4b_2^2w\lambda^3\mu^4}{(-\mu^2 + \lambda^2\rho)^3} \\
& - \frac{2ab_1^3\lambda^2\mu}{(-\mu^2 + \lambda^2\rho)^2} - \frac{6ab_1b_2^2\lambda^3\mu}{(-\mu^2 + \lambda^2\rho)^2} + \frac{2b_1^2w\lambda^2\mu^2}{(-\mu^2 + \lambda^2\rho)^2} \\
& - \frac{2b_2^2w\lambda^3\mu^2}{(-\mu^2 + \lambda^2\rho)^2} - \frac{4a_2b_1w\lambda^2\mu^3}{(-\mu^2 + \lambda^2\rho)^2} + \frac{4a_1b_2w\lambda^2\mu^3}{(-\mu^2 + \lambda^2\rho)^2} \\
& + \frac{3aa_0b_1^2\lambda}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} + \frac{3aa_2b_1^2\lambda^2}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} + \frac{6aa_1b_1b_2\lambda^2}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} + \frac{3aa_0b_2^2\lambda^2}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} \\
& + \frac{2b_1^2w\lambda^2}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} - \frac{a_0b_1w\lambda\mu}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} - \frac{11a_2b_1w\lambda^2\mu}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} + \frac{a_1b_2w\lambda^2\mu}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} \\
& - \frac{a_1^2w\lambda\mu^2}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} + \frac{2a_0a_2w\lambda\mu^2}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} - \frac{2a_2^2w\lambda^2\mu^2}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} \\
\phi^3(\xi): \quad & aa_1^3 + 6aa_0a_1a_2 + 2a_0a_1w + 2a_1a_2w\lambda - \frac{6ab_1^2b_2\lambda^2\mu}{(-\mu^2 + \lambda^2\rho)^2} - \frac{2ab_2^3\lambda^3\mu}{(-\mu^2 + \lambda^2\rho)^2} \\
& + \frac{10b_1b_2w\lambda^2\mu^2}{(-\mu^2 + \lambda^2\rho)^2} + \frac{4a_2b_2w\lambda^2\mu^3}{(-\mu^2 + \lambda^2\rho)^2} + \frac{3aa_1b_1^2\lambda}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} \\
& + \frac{6aa_0b_1b_2\lambda}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} + \frac{6aa_2b_1b_2\lambda^2}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} + \frac{3aa_1b_2^2\lambda^2}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} + \frac{8b_1b_2w\lambda^2}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} \\
& - \frac{2a_1b_1w\lambda\mu}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} - \frac{6a_0b_2w\lambda\mu}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} - \frac{2a_1a_2w\lambda\mu^2}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} \\
\phi^4(\xi): \quad & 3aa_1^2a_2 + 3aa_0a_2^2 + a_1^2w + 6a_0a_2w - \frac{6ab_1b_2^2\lambda^2\mu}{(-\mu^2 + \lambda^2\rho)^2} + \frac{3b_2^2w\lambda^2\mu^2}{(-\mu^2 + \lambda^2\rho)^2} \\
& + \frac{3aa_2b_1^2\lambda}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} + \frac{6aa_1b_1b_2\lambda}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} + \frac{3aa_0b_2^2\lambda}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} + \frac{b_1^2w\lambda}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} \\
& + \frac{3aa_2b_2^2\lambda^2}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} + \frac{3b_2^2w\lambda^2}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} - \frac{7a_2b_1w\lambda\mu}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} - \frac{3a_1b_2w\lambda\mu}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} \\
& - \frac{2a_2^2w\lambda\mu^2}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} \\
\phi^5(\xi): \quad & 3aa_1a_2^2 + 4a_1a_2w - \frac{2ab_2^3\lambda^2\mu}{(-\mu^2 + \lambda^2\rho)^2} + \frac{6aa_2b_1b_2\lambda}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} + \frac{3aa_1b_2^2\lambda}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} \\
& + \frac{4b_1b_2w\lambda}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} - \frac{4a_2b_2w\lambda\mu}{-\mu^2 + \lambda^2\rho}
\end{aligned}$$

$$\phi^6(\xi): \quad aa_2^3 + 2a_2^2w + \frac{3aa_2b_2^2\lambda}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} + \frac{2b_2^2w\lambda}{-\mu^2 + \lambda^2\rho}$$

$$\begin{aligned} \psi(\xi): \quad & 3aa_0^2b_1 + a_0b_1w\lambda + 2a_2b_1w\lambda^2 - 2a_1b_2w\lambda^2 + 2a_1^2w\lambda\mu - 4a_0a_2w\lambda\mu \\ & + \frac{8b_2^2w\lambda^3\mu^5}{(-\mu^2 + \lambda^2\rho)^3} + \frac{4ab_1^3\lambda^2\mu^2}{(-\mu^2 + \lambda^2\rho)^2} - \frac{4b_1^2w\lambda^2\mu^3}{(-\mu^2 + \lambda^2\rho)^2} \\ & + \frac{12b_2^2w\lambda^3\mu^3}{(-\mu^2 + \lambda^2\rho)^2} + \frac{8a_2b_1w\lambda^2\mu^4}{(-\mu^2 + \lambda^2\rho)^2} - \frac{8a_1b_2w\lambda^2\mu^4}{(-\mu^2 + \lambda^2\rho)^2} \\ & + \frac{ab_1^3\lambda^2}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} - \frac{6aa_0b_1^2\lambda\mu}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} - \frac{3b_1^2w\lambda^2\mu}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} + \frac{4b_2^2w\lambda^3\mu}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} \\ & + \frac{2a_0b_1w\lambda\mu^2}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} + \frac{10a_2b_1w\lambda^2\mu^2}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} - \frac{10a_1b_2w\lambda^2\mu^2}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} \\ & + \frac{2a_1^2w\lambda\mu^3}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} - \frac{4a_0a_2w\lambda\mu^3}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi(\xi)\psi(\xi): \quad & 3aa_0^2b_2 + 6aa_0a_1b_1 - \frac{12aa_0b_1b_2\lambda\mu}{\lambda^2\rho - \mu^2} - \frac{6aa_1b_1^2\lambda\mu}{\lambda^2\rho - \mu^2} + \frac{12ab_1^2b_2\lambda^2\mu^2}{(\lambda^2\rho - \mu^2)^2} \\ & + \frac{3ab_1^2b_2\lambda^2}{\lambda^2\rho - \mu^2} - 3a_0a_1\mu w + \frac{12a_0b_2\lambda\mu^2w}{\lambda^2\rho - \mu^2} + 5a_0b_2\lambda w \\ & + \frac{4a_1a_2\lambda\mu^3w}{\lambda^2\rho - \mu^2} + 4a_1a_2\lambda\mu w + \frac{4a_1b_1\lambda\mu^2w}{\lambda^2\rho - \mu^2} + a_1b_1\lambda w \\ & - \frac{10a_2b_2\lambda^2\mu^2w}{\lambda^2\rho - \mu^2} - \frac{8a_2b_2\lambda^2\mu^4w}{(\lambda^2\rho - \mu^2)^2} - 2a_2b_2\lambda^2w \\ & - \frac{13b_1b_2\lambda^2\mu w}{\lambda^2\rho - \mu^2} - \frac{20b_1b_2\lambda^2\mu^3w}{(\lambda^2\rho - \mu^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi^2(\xi)\psi(\xi): \quad & 3aa_1^2b_1 + 6aa_0a_2b_1 + 6aa_0a_1b_2 + 2a_0b_1w + 5a_2b_1w\lambda + a_1b_2w\lambda \\ & - a_1^2w\mu - 10a_0a_2w\mu + 4a_2^2w\lambda\mu + \frac{12ab_1b_2^2\lambda^2\mu^2}{(-\mu^2 + \lambda^2\rho)^2} \\ & - \frac{4b_2^2w\lambda^2\mu^3}{(-\mu^2 + \lambda^2\rho)^2} + \frac{ab_1^3\lambda}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} + \frac{3ab_1b_2^2\lambda^2}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} - \frac{6aa_2b_1^2\lambda\mu}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} \\ & - \frac{12aa_1b_1b_2\lambda\mu}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} - \frac{6aa_0b_2^2\lambda\mu}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} - \frac{3b_1^2w\lambda\mu}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} - \frac{2b_2^2w\lambda^2\mu}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} \\ & + \frac{16a_2b_1w\lambda\mu^2}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} + \frac{4a_1b_2w\lambda\mu^2}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} + \frac{4a_2^2w\lambda\mu^3}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi^3(\xi)\psi(\xi): \quad & 6aa_1a_2b_1 + 3aa_1^2b_2 + 6aa_0a_2b_2 + 2a_1b_1w + 6a_0b_2w + a_2b_2w\lambda \\ & - 5a_1a_2w\mu + \frac{4ab_2^3\lambda^2\mu^2}{(-\mu^2 + \lambda^2\rho)^2} + \frac{3ab_1^2b_2\lambda}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} + \frac{ab_2^3\lambda^2}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} \\ & - \frac{12aa_2b_1b_2\lambda\mu}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} - \frac{6aa_1b_2^2\lambda\mu}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} - \frac{13b_1b_2w\lambda\mu}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{6a_2b_2w\lambda\mu^2}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} \\
\phi^4(\xi)\psi(\xi): & 3aa_2^2b_1 + 6aa_1a_2b_2 + 4a_2b_1w + 4a_1b_2w - 2a_2^2w\mu + \frac{3ab_1b_2^2\lambda}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} \\
& - \frac{6aa_2b_2^2\lambda\mu}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} - \frac{6b_2^2w\lambda\mu}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} \\
\phi^5(\xi)\psi(\xi): & 3aa_2^2b_2 + 4a_2b_2w + \frac{ab_2^3\lambda}{-\mu^2 + \lambda^2\rho}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

olarak elde edilir. (4.16) ile verilen katsayıların sıfıra eşitlenmesi ve denklem sisteminin Mathematica yardımıyla çözülmesi sonucu elde edilen parametrelerin birbiri cinsinden değerlerinden biri

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2d^{1/3}}{a^{1/3}}, & a_1 &= 0, & a_2 &= \frac{3d^{1/3}}{a^{1/3}\lambda}, \\
b_1 &= 0, & b_2 &= \frac{3d^{1/3}\sqrt{\rho}}{a^{1/3}\sqrt{\lambda}}, \\
w &= -\frac{3a^{2/3}d^{1/3}}{\lambda}, & \mu &= 0
\end{aligned} \tag{4.17}$$

şeklinde olup bir diğeri ise

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2d^{1/3}}{a^{1/3}}, & a_1 &= 0, & a_2 &= \frac{3d^{1/3}}{a^{1/3}\lambda}, \\
b_1 &= -\frac{3d^{1/3}\mu}{a^{1/3}\lambda}, & b_2 &= -\frac{3\sqrt{-\frac{a^{4/3}d^{2/3}\mu^2}{\lambda^2} + a^{4/3}d^{2/3}\rho}}{a\sqrt{\lambda}}, \\
w &= -\frac{3a^{2/3}d^{1/3}}{\lambda}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

biçimindedir.

(3.9) eşitliği (3.4) eşitliğinde yazılarak düzenlendiğinde

$$\begin{aligned}
\phi(\xi) &= \frac{A_1\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\xi) - A_2\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\xi)}{\frac{\mu}{\lambda} + A_2\cos(\sqrt{\lambda}\xi) + A_1\sin(\sqrt{\lambda}\xi)}, \\
\psi(\xi) &= \frac{1}{\frac{\mu}{\lambda} + A_2\cos(\sqrt{\lambda}\xi) + A_1\sin(\sqrt{\lambda}\xi)}
\end{aligned} \tag{4.19}$$

eşitlikleri elde edilir. (4.19) eşitlikleri (4.10) ile verilen denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
V(\xi) = & a_0 + \frac{b_1}{\frac{\mu}{\lambda} + A_2 \cos(\sqrt{\lambda}\xi) + A_1 \sin(\sqrt{\lambda}\xi)} \\
& + \frac{b_2 \left(A_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}\xi) - A_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}\xi) \right)}{\left(\frac{\mu}{\lambda} + A_2 \cos(\sqrt{\lambda}\xi) + A_1 \sin(\sqrt{\lambda}\xi) \right)^2} \\
& + \frac{a_1 \left(A_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}\xi) - A_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}\xi) \right)}{\frac{\mu}{\lambda} + A_2 \cos(\sqrt{\lambda}\xi) + A_1 \sin(\sqrt{\lambda}\xi)} \\
& + \frac{a_2 \left(A_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}\xi) - A_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}\xi) \right)^2}{\left(\frac{\mu}{\lambda} + A_2 \cos(\sqrt{\lambda}\xi) + A_1 \sin(\sqrt{\lambda}\xi) \right)^2}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Mathematica yardımı ile elde edilen a_0 , a_1 , a_2 , b_1 , b_2 , w ve μ parametreleri ve $\xi = x + w \frac{t^\alpha}{\alpha}$ değeri $V(\xi)$ ifadesinde yerine yazılıp, (4.5) eşitliğinin kullanılmasıyla (4.2) ile verilen conformable kesirli mertebeden DBM denkleminin analitik çözümleri elde edilir. (4.17) ile verilen parametrelerin değerleri için elde edilen analitik çözüm

$$\begin{aligned}
\xi = x + \left(-\frac{3a^{2/3}d^{1/3}}{\lambda} \right) \frac{t^\alpha}{\alpha} \quad \text{ve} \quad \rho = A_1^2 + A_2^2 \text{ olmak üzere} \\
u(x, t) = \ln \left(\frac{2d^{1/3}}{a^{1/3}} + \frac{3d^{1/3}\sqrt{\rho} \left(A_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}\xi) - A_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}\xi) \right)}{a^{1/3}\sqrt{\lambda} \left(A_2 \cos(\sqrt{\lambda}\xi) + A_1 \sin(\sqrt{\lambda}\xi) \right)^2} \right. \\
\left. + \frac{3d^{1/3} \left(A_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda}\xi) - A_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda}\xi) \right)^2}{a^{1/3}\lambda \left(A_2 \cos(\sqrt{\lambda}\xi) + A_1 \sin(\sqrt{\lambda}\xi) \right)^2} \right)
\end{aligned}$$

biçimindedir. Burada (4.18) ile verilen parametrelerin değerleri için elde edilen analitik çözüm ise

$$\begin{aligned}
\xi = x + \left(-\frac{3a^{2/3}d^{1/3}}{\lambda} \right) \frac{t^\alpha}{\alpha} \quad \text{ve} \quad \rho = A_1^2 + A_2^2 \text{ olmak üzere} \\
u(x, t) = \ln \left(\frac{2d^{1/3}}{a^{1/3}} - \frac{3d^{1/3}\mu}{a^{1/3}\lambda \left(\frac{\mu}{\lambda} + A_2 \cos(\sqrt{\lambda}\xi) + A_1 \sin(\sqrt{\lambda}\xi) \right)} \right)
\end{aligned}$$

$$- \frac{3\sqrt{-\frac{a^{4/3}d^{2/3}\mu^2}{\lambda^2} + a^{4/3}d^{2/3}\rho \left(A_1\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\xi) - A_2\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\xi) \right)}}{a\sqrt{\lambda} \left(\frac{\mu}{\lambda} + A_2\cos(\sqrt{\lambda}\xi) + A_1\sin(\sqrt{\lambda}\xi) \right)^2} + \frac{3d^{1/3} \left(A_1\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\xi) - A_2\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\xi) \right)^2}{a^{1/3}\lambda \left(\frac{\mu}{\lambda} + A_2\cos(\sqrt{\lambda}\xi) + A_1\sin(\sqrt{\lambda}\xi) \right)^2}$$

biçiminde olacaktır.

3.durum: $\lambda = 0$ için (3.12) eşitliği kullanılarak $\psi(\xi)$ fonksiyonunun kuvvetleri $\psi(\xi)$ fonksiyonuna kadar indirgenirse, $\phi(\xi)$ ve $\psi(\xi)$ fonksiyonlarının kuvvetlerinin yeni katsayıları

Sabit: $aa_0^3 + d$

$\phi(\xi)$: $3aa_0^2a_1$

$\phi^2(\xi)$: $3aa_0a_1^2 + 3aa_0^2a_2 - \frac{4b_2^2w\mu^4}{(A_1^2 - 2A_2\mu)^3} - \frac{2ab_1^3\mu}{(A_1^2 - 2A_2\mu)^2} + \frac{2b_1^2w\mu^2}{(A_1^2 - 2A_2\mu)^2} - \frac{4a_2b_1w\mu^3}{(A_1^2 - 2A_2\mu)^2} + \frac{4a_1b_2w\mu^3}{(A_1^2 - 2A_2\mu)^2} + \frac{3aa_0b_1^2}{A_1^2 - 2A_2\mu} - \frac{a_0b_1w\mu}{A_1^2 - 2A_2\mu} - \frac{a_1^2w\mu^2}{A_1^2 - 2A_2\mu} + \frac{2a_0a_2w\mu^2}{A_1^2 - 2A_2\mu}$

$\phi^3(\xi)$: $aa_1^3 + 6aa_0a_1a_2 + 2a_0a_1w - \frac{6ab_1^2b_2\mu}{(A_1^2 - 2A_2\mu)^2} + \frac{10b_1b_2w\mu^2}{(A_1^2 - 2A_2\mu)^2} + \frac{4a_2b_2w\mu^3}{(A_1^2 - 2A_2\mu)^2} + \frac{3aa_1b_1^2}{A_1^2 - 2A_2\mu} + \frac{6aa_0b_1b_2}{A_1^2 - 2A_2\mu} - \frac{2a_1b_1w\mu}{A_1^2 - 2A_2\mu} - \frac{6a_0b_2w\mu}{A_1^2 - 2A_2\mu} - \frac{2a_1a_2w\mu^2}{A_1^2 - 2A_2\mu}$

$$\begin{aligned}
\phi^4(\xi): \quad & 3aa_1^2a_2 + 3aa_0a_2^2 + a_1^2w + 6a_0a_2w - \frac{6ab_1b_2^2\mu}{(A_1^2 - 2A_2\mu)^2} \\
& + \frac{3b_2^2w\mu^2}{(A_1^2 - 2A_2\mu)^2} + \frac{3aa_2b_1^2}{A_1^2 - 2A_2\mu} + \frac{6aa_1b_1b_2}{A_1^2 - 2A_2\mu} \\
& + \frac{3aa_0b_2^2}{A_1^2 - 2A_2\mu} + \frac{b_1^2w}{A_1^2 - 2A_2\mu} - \frac{7a_2b_1w\mu}{A_1^2 - 2A_2\mu} \\
& - \frac{3a_1b_2w\mu}{A_1^2 - 2A_2\mu} - \frac{2a_2^2w\mu^2}{A_1^2 - 2A_2\mu}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi^5(\xi): \quad & 3aa_1a_2^2 + 4a_1a_2w - \frac{2ab_2^3\mu}{(A_1^2 - 2A_2\mu)^2} + \frac{6aa_2b_1b_2}{A_1^2 - 2A_2\mu} + \frac{3aa_1b_2^2}{A_1^2 - 2A_2\mu} \\
& + \frac{4b_1b_2w}{A_1^2 - 2A_2\mu} - \frac{4a_2b_2w\mu}{A_1^2 - 2A_2\mu}
\end{aligned}$$

$$\phi^6(\xi): \quad aa_2^3 + 2a_2^2w + \frac{3aa_2b_2^2}{A_1^2 - 2A_2\mu} + \frac{2b_2^2w}{A_1^2 - 2A_2\mu}$$

$$\begin{aligned}
\psi(\xi): \quad & 3aa_0^2b_1 + \frac{8b_2^2w\mu^5}{(A_1^2 - 2A_2\mu)^3} + \frac{4ab_1^3\mu^2}{(A_1^2 - 2A_2\mu)^2} - \frac{4b_1^2w\mu^3}{(A_1^2 - 2A_2\mu)^2} \\
& + \frac{8a_2b_1w\mu^4}{(A_1^2 - 2A_2\mu)^2} - \frac{8a_1b_2w\mu^4}{(A_1^2 - 2A_2\mu)^2} - \frac{6aa_0b_1^2\mu}{A_1^2 - 2A_2\mu} \\
& + \frac{2a_0b_1w\mu^2}{A_1^2 - 2A_2\mu} + \frac{2a_1^2w\mu^3}{A_1^2 - 2A_2\mu} - \frac{4a_0a_2w\mu^3}{A_1^2 - 2A_2\mu}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi(\xi)\psi(\xi): \quad & 6aa_0a_1b_1 + 3aa_0^2b_2 - 3a_0a_1w\mu + \frac{12ab_1^2b_2\mu^2}{(A_1^2 - 2A_2\mu)^2} - \frac{20b_1b_2w\mu^3}{(A_1^2 - 2A_2\mu)^2} \\
& - \frac{8a_2b_2w\mu^4}{(A_1^2 - 2A_2\mu)^2} - \frac{6aa_1b_1^2\mu}{A_1^2 - 2A_2\mu} - \frac{12aa_0b_1b_2\mu}{A_1^2 - 2A_2\mu} \\
& + \frac{4a_1b_1w\mu^2}{A_1^2 - 2A_2\mu} + \frac{12a_0b_2w\mu^2}{A_1^2 - 2A_2\mu} + \frac{4a_1a_2w\mu^3}{A_1^2 - 2A_2\mu}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi^2(\xi)\psi(\xi): & 3aa_1^2b_1 + 6aa_0a_2b_1 + 6aa_0a_1b_2 + 2a_0b_1w - a_1^2w\mu - 10a_0a_2w\mu \\
& + \frac{12ab_1b_2^2\mu^2}{(A_1^2 - 2A_2\mu)^2} - \frac{4b_2^2w\mu^3}{(A_1^2 - 2A_2\mu)^2} + \frac{ab_1^3}{A_1^2 - 2A_2\mu} \\
& - \frac{6aa_2b_1^2\mu}{A_1^2 - 2A_2\mu} - \frac{12aa_1b_1b_2\mu}{A_1^2 - 2A_2\mu} - \frac{6aa_0b_2^2\mu}{A_1^2 - 2A_2\mu} \\
& - \frac{3b_1^2w\mu}{A_1^2 - 2A_2\mu} + \frac{16a_2b_1w\mu^2}{A_1^2 - 2A_2\mu} + \frac{4a_1b_2w\mu^2}{A_1^2 - 2A_2\mu} \\
& + \frac{4a_2^2w\mu^3}{A_1^2 - 2A_2\mu}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi^3(\xi)\psi(\xi): & 6aa_1a_2b_1 + 3aa_1^2b_2 + 6aa_0a_2b_2 + 2a_1b_1w + 6a_0b_2w - 5a_1a_2w\mu \\
& + \frac{4ab_2^3\mu^2}{(A_1^2 - 2A_2\mu)^2} + \frac{3ab_1^2b_2}{A_1^2 - 2A_2\mu} - \frac{12aa_2b_1b_2\mu}{A_1^2 - 2A_2\mu} \\
& - \frac{6aa_1b_2^2\mu}{A_1^2 - 2A_2\mu} - \frac{13b_1b_2w\mu}{A_1^2 - 2A_2\mu} + \frac{6a_2b_2w\mu^2}{A_1^2 - 2A_2\mu}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi^4(\xi)\psi(\xi): & 3aa_2^2b_1 + 6aa_1a_2b_2 + 4a_2b_1w + 4a_1b_2w - 2a_2^2w\mu + \frac{3ab_1b_2^2}{A_1^2 - 2A_2\mu} \\
& - \frac{6aa_2b_2^2\mu}{A_1^2 - 2A_2\mu} - \frac{6b_2^2w\mu}{A_1^2 - 2A_2\mu}
\end{aligned}$$

$$\phi^5(\xi)\psi(\xi): 3aa_2^2b_2 + 4a_2b_2w + \frac{ab_2^3}{A_1^2 - 2A_2\mu} \quad (4.20)$$

olarak elde edilir. (4.20) ile verilen katsayıların sıfıra eşitlenmesi ve denklem sisteminin Mathematica yardımıyla çözülmesi sonucu elde edilen parametrelerin birbiri cinsinden değerlerinden biri

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{-\frac{2A_2b_2\mu}{\sqrt{A_1^2 - 2A_2\mu}} - b_2\sqrt{A_1^2 - 2A_2\mu}}{A_1^2},$$

$$b_1 = \frac{b_2\mu}{\sqrt{A_1^2 - 2A_2\mu}},$$

$$a = \frac{w\sqrt{A_1^2 - 2A_2\mu}}{b_2}, \quad d = 0 \quad (4.21)$$

şeklinde olup bir diğeri ise

$$a_0 = 0 ,$$

$$a_1 = 0 ,$$

$$a_2 = -\frac{1}{6A_1^6} \left(-\frac{24A_1^4 A_2 b_2 \mu}{\sqrt{A_1^2 - 2A_2 \mu}} + \frac{16A_1^2 A_2^2 b_2 \mu^2}{\sqrt{A_1^2 - 2A_2 \mu}} + \frac{16A_2^3 b_2 \mu^3}{\sqrt{A_1^2 - 2A_2 \mu}} \right. \\ + \frac{11979A_1^8 b_2^4}{(A_1^2 - 2A_2 \mu)^{3/2} \left(2b_2 + \frac{9A_1^2 b_2}{A_1^2 - 2A_2 \mu} \right)^3} - \frac{13068A_1^6 A_2 b_2^4 \mu}{(A_1^2 - 2A_2 \mu)^{3/2} \left(2b_2 + \frac{9A_1^2 b_2}{A_1^2 - 2A_2 \mu} \right)^3} \\ + \frac{4752A_1^4 A_2^2 b_2^4 \mu^2}{(A_1^2 - 2A_2 \mu)^{3/2} \left(2b_2 + \frac{9A_1^2 b_2}{A_1^2 - 2A_2 \mu} \right)^3} - \frac{576A_1^2 A_2^3 b_2^4 \mu^3}{(A_1^2 - 2A_2 \mu)^{3/2} \left(2b_2 + \frac{9A_1^2 b_2}{A_1^2 - 2A_2 \mu} \right)^3} \\ - \frac{165A_1^6 b_2^2}{\sqrt{A_1^2 - 2A_2 \mu} \left(2b_2 + \frac{9A_1^2 b_2}{A_1^2 - 2A_2 \mu} \right)} + \frac{390A_1^4 A_2 b_2^2 \mu}{\sqrt{A_1^2 - 2A_2 \mu} \left(2b_2 + \frac{9A_1^2 b_2}{A_1^2 - 2A_2 \mu} \right)} \\ \left. - \frac{32A_1^2 A_2^2 b_2^2 \mu^2}{\sqrt{A_1^2 - 2A_2 \mu} \left(2b_2 + \frac{9A_1^2 b_2}{A_1^2 - 2A_2 \mu} \right)} - \frac{32A_2^3 b_2^2 \mu^3}{\sqrt{A_1^2 - 2A_2 \mu} \left(2b_2 + \frac{9A_1^2 b_2}{A_1^2 - 2A_2 \mu} \right)} \right) , \\ b_1 = -\frac{b_2 \mu}{\sqrt{A_1^2 - 2A_2 \mu}} , \quad a = \frac{-\frac{11A_1^2 w}{\sqrt{A_1^2 - 2A_2 \mu}} + \frac{4A_2 w \mu}{\sqrt{A_1^2 - 2A_2 \mu}}}{2b_2 + \frac{9A_1^2 b_2}{A_1^2 - 2A_2 \mu}} ,$$

$$d = 0$$

$$(4.22)$$

biçimindedir.

(3.11) eşitliği (3.4) eşitliğinde yazılarak düzenlendiğinde

$$\phi(\xi) = \frac{A_1 + \mu \xi}{A_2 + A_1 \xi + \frac{\mu \xi^2}{2}} , \\ \psi(\xi) = \frac{1}{A_2 + A_1 \xi + \frac{\mu \xi^2}{2}} \quad (4.23)$$

eşitlikleri elde edilir. (4.23) eşitlikleri (4.10) ile verilen denklemde yerlerine yazılırsa

$$V(\xi) = a_0 + \frac{b_2(A_1 + \mu\xi)}{\left(A_2 + A_1\xi + \frac{\mu\xi^2}{2}\right)^2} + \frac{a_2(A_1 + \mu\xi)^2}{\left(A_2 + A_1\xi + \frac{\mu\xi^2}{2}\right)^2} \\ + \frac{b_1}{A_2 + A_1\xi + \frac{\mu\xi^2}{2}} + \frac{a_1(A_1 + \mu\xi)}{A_2 + A_1\xi + \frac{\mu\xi^2}{2}}$$

olarak bulunur. Mathematica yardımı ile elde edilen a_0, a_1, a_2, b_1, a, d ve μ parametreleri

ve $\xi = x + w\frac{t^\alpha}{\alpha}$ değeri $V(\xi)$ ifadesinde yerine yazılıp, (4.5) eşitliğinin kullanılmasıyla

(4.2) ile verilen conformable kesirli mertebeden DBM denkleminin analitik çözümleri

elde edilir. (4.21) ile verilen parametrelerin değerleri için elde edilen analitik çözüm

$\xi = x + w\frac{t^\alpha}{\alpha}$ olmak üzere

$$u(x, t) = \ln \left(\frac{b_2(A_1 + \mu\xi)}{\left(A_2 + A_1\xi + \frac{\mu\xi^2}{2}\right)^2} + \frac{\left(-\frac{2A_2b_2\mu}{\sqrt{A_1^2 - 2A_2\mu}} - b_2\sqrt{A_1^2 - 2A_2\mu} \right) (A_1 + \mu\xi)^2}{A_1^2 \left(A_2 + A_1\xi + \frac{\mu\xi^2}{2}\right)^2} \right. \\ \left. + \frac{b_2\mu}{\sqrt{A_1^2 - 2A_2\mu} \left(A_2 + A_1\xi + \frac{\mu\xi^2}{2}\right)} \right)$$

biçimindedir. Burada (4.22) ile verilen parametrelerin değerleri için elde edilen analitik çözüm ise

$\xi = x + w\frac{t^\alpha}{\alpha}$ olmak üzere

$$u(x, t) = \ln \left(\frac{b_2(A_1 + \mu\xi)}{\left(A_2 + A_1\xi + \frac{\mu\xi^2}{2}\right)^2} - \frac{1}{6A_1^6 \left(A_2 + A_1\xi + \frac{\mu\xi^2}{2}\right)^2} \right. \\ \left(-\frac{24A_1^4A_2b_2\mu}{\sqrt{A_1^2 - 2A_2\mu}} + \frac{16A_1^2A_2^2b_2\mu^2}{\sqrt{A_1^2 - 2A_2\mu}} + \frac{16A_2^3b_2\mu^3}{\sqrt{A_1^2 - 2A_2\mu}} \right. \\ \left. + \frac{11979A_1^8b_2^4}{(A_1^2 - 2A_2\mu)^{3/2} \left(2b_2 + \frac{9A_1^2b_2}{A_1^2 - 2A_2\mu}\right)^3} - \frac{13068A_1^6A_2b_2^4\mu}{(A_1^2 - 2A_2\mu)^{3/2} \left(2b_2 + \frac{9A_1^2b_2}{A_1^2 - 2A_2\mu}\right)^3} \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{4752A_1^4 A_2^2 b_2^4 \mu^2}{(A_1^2 - 2A_2 \mu)^{3/2} \left(2b_2 + \frac{9A_1^2 b_2}{A_1^2 - 2A_2 \mu} \right)^3} - \frac{576A_1^2 A_2^3 b_2^4 \mu^3}{(A_1^2 - 2A_2 \mu)^{3/2} \left(2b_2 + \frac{9A_1^2 b_2}{A_1^2 - 2A_2 \mu} \right)^3} \\
& - \frac{165A_1^6 b_2^2}{\sqrt{A_1^2 - 2A_2 \mu} \left(2b_2 + \frac{9A_1^2 b_2}{A_1^2 - 2A_2 \mu} \right)} + \frac{390A_1^4 A_2 b_2^2 \mu}{\sqrt{A_1^2 - 2A_2 \mu} \left(2b_2 + \frac{9A_1^2 b_2}{A_1^2 - 2A_2 \mu} \right)} \\
& - \frac{32A_1^2 A_2^2 b_2^2 \mu^2}{\sqrt{A_1^2 - 2A_2 \mu} \left(2b_2 + \frac{9A_1^2 b_2}{A_1^2 - 2A_2 \mu} \right)} \\
& - \frac{32A_2^3 b_2^2 \mu^3}{\sqrt{A_1^2 - 2A_2 \mu} \left(2b_2 + \frac{9A_1^2 b_2}{A_1^2 - 2A_2 \mu} \right)} \Bigg) (A_1 + \mu \xi)^2 \\
& - \frac{b_2 \mu}{\sqrt{A_1^2 - 2A_2 \mu} \left(A_2 + A_1 \xi + \frac{\mu \xi^2}{2} \right)} \Bigg)
\end{aligned}$$

biçiminde olacaktır.

4.2. Kesirli Mertebeden Kolmogorov - Petrovskii - Piskunov Denkleminin Çözümleri

Bu kısımda, conformable kesirli mertebeden Kolmogorov - Petrovskii - Piskunov (KPP) denkleminin $(G'/G, 1/G)$ açılım yöntemi uygulanarak açık çözümler elde edilmiştir.

Zayed ve Ibrahim, 2014 yılında tam sayı mertebeden türev içeren

$$u_t - u_{xx} + au + bu^2 + cu^3 = 0 \quad (4.24)$$

KPP denkleminin analitik çözümlerini elde ettiler. Burada a, b ve c birer reel sayıdır (Zayed ve Ibrahim, 2014). (4.24) ile verilen kısmi diferansiyel denklemin conformable kesirli mertebeden formu

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au + bu^2 + cu^3 = 0 \quad (4.25)$$

şeklindedir. Burada α conformable kesirli mertebeden türevi göstermekte olup, $0 < \alpha < 1$ şeklindedir.

(4.25) ile verilen denkleme $u(x, t) = U(\xi)$, $\xi = x + w \frac{t^\alpha}{\alpha}$ dönüşümü uygulanırsa, conformable kesirli mertebeden denklem

$$wU_\xi - U_{\xi\xi} + aU + bU^2 + cU^3 = 0 \quad (4.26)$$

formundaki adi diferansiyel denkleme dönüşür. Burada en yüksek mertebeden türev içeren ifade $U_{\xi\xi}$ ile en yüksek dereceden lineer olmayan terim U^3 ifadelerinin kullanılmasıyla homojen dengeleme terimi olan N değeri $N + 2 = 3N$ eşitliğinden $N = 1$ bulunur. Dolayısıyla (4.26) denklemi için

$$U(\xi) = a_0 + a_1\phi(\xi) + b_1\psi(\xi) \quad (4.27)$$

formunda bir analitik çözüm fonksiyonu elde edilir. (4.27) eşitliği (4.26) denkleminde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa $\phi(\xi)$ ve $\psi(\xi)$ fonksiyonlarının kuvvetlerinden oluşan bir denklem sistemi elde edilir. Elde edilen denklem sistemindeki $\phi(\xi)$ ve $\psi(\xi)$ fonksiyonlarının kuvvetlerinin katsayıları

$$\begin{aligned} \text{Sabit:} & \quad aa_0 + a_0^2b + a_0^3c - a_1w\lambda \\ \phi(\xi): & \quad aa_1 + 2a_0a_1b + 3a_0^2a_1c - 2a_1\lambda \\ \phi^2(\xi): & \quad a_1^2b + 3a_0a_1^2c - a_1w \\ \phi^3(\xi): & \quad -2a_1 + a_1^3c \\ \psi(\xi): & \quad ab_1 + 2a_0bb_1 + 3a_0^2b_1c - b_1\lambda + a_1w\mu \\ \phi(\xi)\psi(\xi): & \quad 2a_1bb_1 + 6a_0a_1b_1c - b_1w + 3a_1\mu \\ \phi^2(\xi)\psi(\xi): & \quad -2b_1 + 3a_1^2b_1c \\ \psi^2(\xi): & \quad bb_1^2 + 3a_0b_1^2c + b_1\mu \\ \phi(\xi)\psi^2(\xi): & \quad 3a_1b_1^2c \\ \psi^3(\xi): & \quad b_1^3c \end{aligned} \quad (4.28)$$

biçimindedir.

1.durum: $\lambda < 0$ için (3.8) eşitliği kullanılarak $\psi(\xi)$ fonksiyonunun kuvvetleri $\psi(\xi)$ fonksiyonuna kadar indirgenirse, $\phi(\xi)$ ve $\psi(\xi)$ fonksiyonlarının kuvvetlerinin yeni katsayıları

$$\begin{aligned} \text{Sabit:} & \quad aa_0 + a_0^2b + a_0^3c - a_1w\lambda - \frac{2b_1^3c\lambda^3\mu}{(\mu^2 + \lambda^2\sigma)^2} - \frac{bb_1^2\lambda^2}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} - \frac{3a_0b_1^2c\lambda^2}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} \\ & \quad - \frac{b_1\lambda^2\mu}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} \\ \phi(\xi): & \quad aa_1 + 2a_0a_1b + 3a_0^2a_1c - 2a_1\lambda - \frac{3a_1b_1^2c\lambda^2}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi^2(\xi): & \quad a_1^2 b + 3a_0 a_1^2 c - a_1 w - \frac{2b_1^3 c \lambda^2 \mu}{(\mu^2 + \lambda^2 \sigma)^2} - \frac{b b_1^2 \lambda}{\mu^2 + \lambda^2 \sigma} - \frac{3a_0 b_1^2 c \lambda}{\mu^2 + \lambda^2 \sigma} \\
& \quad - \frac{b_1 \lambda \mu}{\mu^2 + \lambda^2 \sigma} \\
\phi^3(\xi): & \quad -2a_1 + a_1^3 c - \frac{3a_1 b_1^2 c \lambda}{\mu^2 + \lambda^2 \sigma} \\
\psi(\xi): & \quad ab_1 + 2a_0 b b_1 + 3a_0^2 b_1 c - b_1 \lambda + a_1 w \mu + \frac{4b_1^3 c \lambda^2 \mu^2}{(\mu^2 + \lambda^2 \sigma)^2} - \frac{b_1^3 c \lambda^2}{\mu^2 + \lambda^2 \sigma} \\
& \quad + \frac{2b b_1^2 \lambda \mu}{\mu^2 + \lambda^2 \sigma} + \frac{6a_0 b_1^2 c \lambda \mu}{\mu^2 + \lambda^2 \sigma} + \frac{2b_1 \lambda \mu^2}{\mu^2 + \lambda^2 \sigma} \\
\phi(\xi)\psi(\xi): & \quad 2a_1 b b_1 + 6a_0 a_1 b_1 c - b_1 w + 3a_1 \mu + \frac{6a_1 b_1^2 c \lambda \mu}{\mu^2 + \lambda^2 \sigma} \\
\phi^2(\xi)\psi(\xi): & \quad -2b_1 + 3a_1^2 b_1 c - \frac{b_1^3 c \lambda}{\mu^2 + \lambda^2 \sigma}
\end{aligned} \tag{4.29}$$

olarak elde edilir. (4.29) ile verilen katsayıların sıfıra eşitlenmesi ve denklem sisteminin Mathematica yardımıyla çözülmesi sonucu elde edilen parametrelerin birbiri cinsinden değerlerinden biri

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{b_1 w \sqrt{-\lambda}}{\sqrt{\mu^2 + \lambda^2 \sigma}}, & a_1 &= \frac{b_1 \sqrt{-\lambda}}{\sqrt{\mu^2 + \lambda^2 \sigma}}, \\
a &= \frac{1}{2}(w^2 + \lambda), & b &= -\frac{w \sqrt{\mu^2 + \lambda^2 \sigma}}{b_1 \sqrt{-\lambda}}, & c &= \frac{-\mu^2 - \lambda^2 \sigma}{2b_1^2 \lambda}
\end{aligned} \tag{4.30}$$

şeklinde olup ve bir diğeri ise

$$\begin{aligned}
a_0 &= -\frac{b_1 \lambda}{\sqrt{\mu^2 + \lambda^2 \sigma}}, & a_1 &= \frac{b_1 \sqrt{-\lambda}}{\sqrt{\mu^2 + \lambda^2 \sigma}}, \\
a &= -\lambda - w \sqrt{-\lambda}, & c &= \frac{-\mu^2 - \lambda^2 \sigma}{2b_1^2 \lambda}, \\
b &= \frac{1}{2} \left(\frac{w \sqrt{\mu^2 + \lambda^2 \sigma}}{b_1 \sqrt{-\lambda}} - \frac{3\mu^2}{b_1 \sqrt{\mu^2 + \lambda^2 \sigma}} - \frac{3\lambda^2 \sigma}{b_1 \sqrt{\mu^2 + \lambda^2 \sigma}} \right)
\end{aligned} \tag{4.31}$$

biçimindedir.

(3.7) eşitliği (3.4) eşitliğinde yazılarak düzenlendiğinde

$$\phi(\xi) = \frac{A_1 \sqrt{-\lambda} \cosh(\sqrt{-\lambda} \xi) + A_2 \sqrt{-\lambda} \sinh(\sqrt{-\lambda} \xi)}{\frac{\mu}{\lambda} + A_2 \cosh(\sqrt{-\lambda} \xi) + A_1 \sinh(\sqrt{-\lambda} \xi)},$$

$$\psi(\xi) = \frac{1}{\frac{\mu}{\lambda} + A_2 \cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_1 \sinh(\sqrt{-\lambda}\xi)} \quad (4.32)$$

eşitlikleri elde edilir. (4.32) eşitlikleri (4.27) ile verilen denklemde yerlerine yazılırsa

$$U(\xi) = a_0 + \frac{b_1}{\frac{\mu}{\lambda} + A_2 \cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_1 \sinh(\sqrt{-\lambda}\xi)} + \frac{a_1 \left(A_1 \sqrt{-\lambda} \cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_2 \sqrt{-\lambda} \sinh(\sqrt{-\lambda}\xi) \right)}{\frac{\mu}{\lambda} + A_2 \cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_1 \sinh(\sqrt{-\lambda}\xi)}$$

olarak bulunur. Mathematica yardımı ile elde edilen a_0 , a_1 , b_1 , a , b , c ve μ parametreleri ve $\xi = x + w \frac{t^\alpha}{\alpha}$ değerinin $U(\xi)$ ifadesinde yerine yazılmasıyla, (4.25) ile verilen conformable kesirli mertebeden KPP denkleminin analitik çözümleri elde edilir. (4.30) ile verilen parametrelerin değerleri için elde edilen analitik çözüm

$$\xi = x + w \frac{t^\alpha}{\alpha} \quad \text{ve} \quad \sigma = A_1^2 - A_2^2 \quad \text{olmak üzere}$$

$$u(x, t) = \frac{b_1 w \sqrt{-\lambda}}{\sqrt{\mu^2 + \lambda^2 \sigma}} + \frac{b_1}{\frac{\mu}{\lambda} + A_2 \cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_1 \sinh(\sqrt{-\lambda}\xi)} + \frac{b_1 \sqrt{-\lambda} \left(A_1 \sqrt{-\lambda} \cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_2 \sqrt{-\lambda} \sinh(\sqrt{-\lambda}\xi) \right)}{\sqrt{\mu^2 + \lambda^2 \sigma} \left(\frac{\mu}{\lambda} + A_2 \cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_1 \sinh(\sqrt{-\lambda}\xi) \right)}$$

biçimindedir. Burada (4.31) ile verilen parametrelerin değerleri için elde edilen analitik çözüm ise

$$\xi = x + w \frac{t^\alpha}{\alpha} \quad \text{ve} \quad \sigma = A_1^2 - A_2^2 \quad \text{olmak üzere}$$

$$u(x, t) = -\frac{b_1 \lambda}{\sqrt{\mu^2 + \lambda^2 \sigma}} + \frac{b_1}{\frac{\mu}{\lambda} + A_2 \cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_1 \sinh(\sqrt{-\lambda}\xi)} + \frac{b_1 \sqrt{-\lambda} \left(A_1 \sqrt{-\lambda} \cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_2 \sqrt{-\lambda} \sinh(\sqrt{-\lambda}\xi) \right)}{\sqrt{\mu^2 + \lambda^2 \sigma} \left(\frac{\mu}{\lambda} + A_2 \cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_1 \sinh(\sqrt{-\lambda}\xi) \right)}$$

biçiminde olacaktır.

2.durum: $\lambda > 0$ için (3.10) eşitliği kullanılarak $\psi(\xi)$ fonksiyonunun kuvvetleri $\psi(\xi)$ fonksiyonuna kadar indirgenirse, $\phi(\xi)$ ve $\psi(\xi)$ fonksiyonlarının kuvvetlerinin yeni katsayıları

$$\begin{aligned}
\text{Sabit:} \quad & aa_0 + a_0^2b + a_0^3c - a_1w\lambda - \frac{2b_1^3c\lambda^3\mu}{(-\mu^2 + \lambda^2\rho)^2} + \frac{bb_1^2\lambda^2}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} + \frac{3a_0b_1^2c\lambda^2}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} \\
& + \frac{b_1\lambda^2\mu}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} \\
\phi(\xi): \quad & aa_1 + 2a_0a_1b + 3a_0^2a_1c - 2a_1\lambda + \frac{3a_1b_1^2c\lambda^2}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} \\
\phi^2(\xi): \quad & a_1^2b + 3a_0a_1^2c - a_1w - \frac{2b_1^3c\lambda^2\mu}{(-\mu^2 + \lambda^2\rho)^2} + \frac{bb_1^2\lambda}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} + \frac{3a_0b_1^2c\lambda}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} \\
& + \frac{b_1\lambda\mu}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} \\
\phi^3(\xi): \quad & -2a_1 + a_1^3c + \frac{3a_1b_1^2c\lambda}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} \\
\psi(\xi): \quad & ab_1 + 2a_0bb_1 + 3a_0^2b_1c - b_1\lambda + a_1w\mu + \frac{4b_1^3c\lambda^2\mu^2}{(-\mu^2 + \lambda^2\rho)^2} + \frac{b_1^3c\lambda^2}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} \\
& - \frac{2bb_1^2\lambda\mu}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} - \frac{6a_0b_1^2c\lambda\mu}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} - \frac{2b_1\lambda\mu^2}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} \\
\phi(\xi)\psi(\xi): \quad & 2a_1bb_1 + 6a_0a_1b_1c - b_1w + 3a_1\mu - \frac{6a_1b_1^2c\lambda\mu}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} \\
\phi^2(\xi)\psi(\xi): \quad & -2b_1 + 3a_1^2b_1c + \frac{b_1^3c\lambda}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} \tag{4.33}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. (4.33) ile verilen katsayıların sıfıra eşitlenmesi ve denklem sisteminin Mathematica yardımıyla çözülmesi sonucu elde edilen parametrelerin birbiri cinsinden değerlerinden biri

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{c}}, \\
b_1 &= \frac{\sqrt{-\mu^2 + \lambda^2\rho}}{\sqrt{2}\sqrt{c}\sqrt{\lambda}}, \\
a &= \frac{1}{2}(2a_0^2c + \lambda), \quad b = -2a_0c, \quad w = \sqrt{2}a_0\sqrt{c} \tag{4.34}
\end{aligned}$$

şeklinde olup bir diğeri ise

$$\begin{aligned}
a_1 &= -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{c}}, \\
b_1 &= 0, \\
a &= a_0^2c + 2\lambda, \quad b = -2a_0c, \quad w = -\sqrt{2}a_0\sqrt{c}, \quad \mu = 0 \tag{4.35}
\end{aligned}$$

biçimindedir.

(3.9) eşitliği (3.4) eşitliğinde yazılarak düzenlendiğinde

$$\phi(\xi) = \frac{A_1\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\xi) - A_2\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\xi)}{\frac{\mu}{\lambda} + A_2\cos(\sqrt{\lambda}\xi) + A_1\sin(\sqrt{\lambda}\xi)},$$

$$\psi(\xi) = \frac{1}{\frac{\mu}{\lambda} + A_2\cos(\sqrt{\lambda}\xi) + A_1\sin(\sqrt{\lambda}\xi)} \quad (4.36)$$

eşitlikleri elde edilir. (4.36) eşitlikleri (4.27) ile verilen denklemde yerine yazılırsa

$$U(\xi) = a_0 + \frac{b_1}{\frac{\mu}{\lambda} + A_2\cos(\sqrt{\lambda}\xi) + A_1\sin(\sqrt{\lambda}\xi)} + \frac{a_1(A_1\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\xi) - A_2\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\xi))}{\frac{\mu}{\lambda} + A_2\cos(\sqrt{\lambda}\xi) + A_1\sin(\sqrt{\lambda}\xi)}$$

olarak bulunur. Mathematica yardımı ile elde edilen a_0 , a_1 , b_1 , a , b , w ve μ parametreleri ve $\xi = x + w\frac{t^\alpha}{\alpha}$ değerinin $U(\xi)$ ifadesinde yerine yazılmasıyla, (4.25) ile verilen conformable kesirli mertebeden KPP denkleminin analitik çözümleri elde edilir. (4.34) ile verilen parametrelerin değerleri için elde edilen analitik çözüm

$$\xi = x + (\sqrt{2}a_0\sqrt{c})\frac{t^\alpha}{\alpha} \quad \text{ve} \quad \rho = A_1^2 + A_2^2 \quad \text{olmak üzere}$$

$$u(x, t) = a_0 + \frac{\sqrt{-\mu^2 + \lambda^2\rho}}{\sqrt{2}\sqrt{c}\sqrt{\lambda}\left(\frac{\mu}{\lambda} + A_2\cos(\sqrt{\lambda}\xi) + A_1\sin(\sqrt{\lambda}\xi)\right)} + \frac{A_1\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\xi) - A_2\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\xi)}{\sqrt{2}\sqrt{c}\left(\frac{\mu}{\lambda} + A_2\cos(\sqrt{\lambda}\xi) + A_1\sin(\sqrt{\lambda}\xi)\right)}$$

biçimindedir. Burada (4.35) ile verilen parametrelerin değerleri için elde edilen analitik çözüm ise

$$\xi = x + (-\sqrt{2}a_0\sqrt{c})\frac{t^\alpha}{\alpha} \quad \text{ve} \quad \rho = A_1^2 + A_2^2 \quad \text{olmak üzere}$$

$$u(x, t) = a_0 - \frac{\sqrt{2}(A_1\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\xi) - A_2\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\xi))}{\sqrt{c}(A_2\cos(\sqrt{\lambda}\xi) + A_1\sin(\sqrt{\lambda}\xi))}$$

biçiminde olacaktır.

3.durum: $\lambda = 0$ için (3.12) eşitliği kullanılarak $\psi(\xi)$ fonksiyonunun kuvvetleri $\psi(\xi)$ fonksiyonuna kadar indirgenirse, $\phi(\xi)$ ve $\psi(\xi)$ fonksiyonlarının kuvvetlerinin yeni katsayıları

$$\text{Sabit: } aa_0 + a_0^2b + a_0^3c$$

$$\phi(\xi): aa_1 + 2a_0a_1b + 3a_0^2a_1c$$

$$\begin{aligned} \phi^2(\xi): \quad & a_1^2b + 3a_0a_1^2c - a_1w - \frac{2b_1^3c\mu}{(A_1^2 - 2A_2\mu)^2} + \frac{bb_1^2}{A_1^2 - 2A_2\mu} + \frac{3a_0b_1^2c}{A_1^2 - 2A_2\mu} \\ & + \frac{b_1\mu}{A_1^2 - 2A_2\mu} \end{aligned}$$

$$\phi^3(\xi): -2a_1 + a_1^3c + \frac{3a_1b_1^2c}{A_1^2 - 2A_2\mu}$$

$$\begin{aligned} \psi(\xi): \quad & ab_1 + 2a_0bb_1 + 3a_0^2b_1c + a_1w\mu + \frac{4b_1^3c\mu^2}{(A_1^2 - 2A_2\mu)^2} - \frac{2bb_1^2\mu}{A_1^2 - 2A_2\mu} \\ & - \frac{6a_0b_1^2c\mu}{A_1^2 - 2A_2\mu} - \frac{2b_1\mu^2}{A_1^2 - 2A_2\mu} \end{aligned}$$

$$\phi(\xi)\psi(\xi): 2a_1bb_1 + 6a_0a_1b_1c - b_1w + 3a_1\mu - \frac{6a_1b_1^2c\mu}{A_1^2 - 2A_2\mu}$$

$$\phi^2(\xi)\psi(\xi): -2b_1 + 3a_1^2b_1c + \frac{b_1^3c}{A_1^2 - 2A_2\mu} \quad (4.37)$$

olarak elde edilir. (4.37) ile verilen katsayıların sıfıra eşitlenmesi ve denklem sisteminin Mathematica yardımıyla çözülmesi sonucu elde edilen parametrelerin birbiri cinsinden değerlerinden biri

$$a_0 = 0, \quad a_1 = -\frac{b_1}{\sqrt{A_1^2 - 2A_2\mu}},$$

$$a = 0, \quad c = \frac{A_1^2 - 2A_2\mu}{2b_1^2}, \quad w = -\frac{2bb_1}{\sqrt{A_1^2 - 2A_2\mu}} \quad (4.38)$$

şeklinde olup bir diğeri ise

$$a_1 = -\frac{b_1}{\sqrt{A_1^2 - 2A_2\mu}},$$

$$a = \frac{a_0^2(A_1^2 - 2A_2\mu)}{2b_1^2}, \quad b = \frac{-a_0A_1^2 + 2a_0A_2\mu}{b_1^2}, \quad c = \frac{A_1^2 - 2A_2\mu}{2b_1^2},$$

$$w = \frac{-\frac{a_0 A_1^2}{\sqrt{A_1^2 - 2A_2\mu}} + \frac{2a_0 A_2\mu}{\sqrt{A_1^2 - 2A_2\mu}}}{b_1} \quad (4.39)$$

biçimindedir. (3.11) eşitliği (3.4) eşitliğinde yazılarak düzenlendiğinde

$$\begin{aligned} \phi(\xi) &= \frac{A_1 + \mu\xi}{A_2 + A_1\xi + \frac{\mu\xi^2}{2}}, \\ \psi(\xi) &= \frac{1}{A_2 + A_1\xi + \frac{\mu\xi^2}{2}} \end{aligned} \quad (4.40)$$

eşitlikleri elde edilir. (4.40) eşitlikleri (4.27) ile verilen denklemde yerlerine yazılırsa

$$U(\xi) = a_0 + \frac{b_1}{A_2 + A_1\xi + \frac{\mu\xi^2}{2}} + \frac{a_1(A_1 + \mu\xi)}{A_2 + A_1\xi + \frac{\mu\xi^2}{2}}$$

olarak bulunur. Mathematica yardımı ile elde edilen a_0 , a_1 , a , b , c , w ve μ parametreleri ve $\xi = x + w\frac{t^\alpha}{\alpha}$ değerinin $U(\xi)$ ifadesinde yerine yazılmasıyla, (4.25) ile verilen conformable kesirli mertebeden KPP denkleminin analitik çözümleri elde edilir. (4.38) ile verilen parametrelerin değerleri için elde edilen analitik çözüm

$$\xi = x + \left(-\frac{2bb_1}{\sqrt{A_1^2 - 2A_2\mu}} \right) \frac{t^\alpha}{\alpha} \quad \text{olmak üzere}$$

$$u(x, t) = \frac{b_1}{A_2 + A_1\xi + \frac{\mu\xi^2}{2}} - \frac{b_1(A_1 + \mu\xi)}{\sqrt{A_1^2 - 2A_2\mu} \left(A_2 + A_1\xi + \frac{\mu\xi^2}{2} \right)}$$

biçimindedir. Burada (4.39) ile verilen parametrelerin değerleri için elde edilen analitik çözüm ise

$$\xi = x + \left(\frac{-\frac{a_0 A_1^2}{\sqrt{A_1^2 - 2A_2\mu}} + \frac{2a_0 A_2\mu}{\sqrt{A_1^2 - 2A_2\mu}}}{b_1} \right) \frac{t^\alpha}{\alpha} \text{ olmak üzere}$$

$$u(x, t) = a_0 + \frac{b_1}{A_2 + A_1\xi + \frac{\mu\xi^2}{2}} - \frac{b_1(A_1 + \mu\xi)}{\sqrt{A_1^2 - 2A_2\mu} \left(A_2 + A_1\xi + \frac{\mu\xi^2}{2} \right)}$$

biçiminde olacaktır.

4.3. Kesirli Mertebeden Oskolkov Denkleminin Çözümleri

Bu kısımda, conformable kesirli mertebeden Oskolkov denkleminin $(G'/G, 1/G)$ açılım yöntemi uygulanarak açık çözümler elde edilmiştir.

Akçagil ve ark., 2017 yılında tam sayı mertebeden türev içeren

$$u_t - au_{xxt} - bu_{xx} + uu_x = 0 \quad (4.41)$$

Oskolkov denkleminin analitik çözümünü elde ettiler. Burada a ve b birer sabittir (Akçagil ve ark., 2016). (4.41) ile verilen kısmi diferansiyel denklemin conformable kesirli mertebeden formu

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} - a \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} \right) - b \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (4.42)$$

şeklindedir. Burada α conformable kesirli mertebeden türevi göstermekte olup $0 < \alpha < 1$ şeklindedir.

(4.42) ile verilen denkleme $u(x, t) = U(\xi)$, $\xi = x + w \frac{t^\alpha}{\alpha}$ dönüşümü uygulanırsa conformable kesirli mertebeden denklem

$$wU_\xi - awU_{\xi\xi\xi} - bU_{\xi\xi} + UU_\xi = 0 \quad (4.43)$$

formundaki adi türevli diferansiyel denkleme dönüşür. Elde edilen bu denklemin integral sabitini sıfır kabul ederek bir defa integrali alınır

$$wU - awU_{\xi\xi} - bU_\xi + \frac{U^2}{2} = 0 \quad (4.44)$$

formunda bir denklem elde edilir. Burada en yüksek mertebeden türev içeren ifade $U_{\xi\xi}$ ile en yüksek dereceden lineer olmayan terim U^2 ifadelerinin kullanılmasıyla homojen

dengeleme terimi olan N değeri $N + 2 = 2N$ eşitliğinden $N = 2$ bulunur. Dolayısıyla (4.44) denklemi için

$$U(\xi) = a_0 + a_1\phi(\xi) + a_2\phi^2(\xi) + b_1\psi(\xi) + b_2\phi(\xi)\psi(\xi) \quad (4.45)$$

formunda bir analitik çözüm fonksiyonu elde edilir. (4.45) eşitliği (4.44) denklemine yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa $\phi(\xi)$ ve $\psi(\xi)$ fonksiyonlarının kuvvetlerinden oluşan bir denklem sistemi elde edilir. Elde edilen denklem sistemindeki $\phi(\xi)$ ve $\psi(\xi)$ fonksiyonlarının kuvvetlerinin katsayıları

$$\begin{aligned} \text{Sabit:} & \quad \frac{a_0^2}{2} + a_0w + a_1b\lambda - 2aa_2w\lambda^2 \\ \phi(\xi): & \quad a_0a_1 + a_1w + 2a_2b\lambda - 2aa_1w\lambda \\ \phi^2(\xi): & \quad \frac{1}{2}a_1^2 + a_0a_2 + a_1b + a_2w - 8aa_2w\lambda \\ \phi^3(\xi): & \quad a_1a_2 + 2a_2b - 2aa_1w \\ \phi^4(\xi): & \quad \frac{1}{2}a_2^2 - 6aa_2w \\ \psi(\xi): & \quad a_0b_1 + b_1w + bb_2\lambda - ab_1w\lambda - a_1b\mu + 4aa_2w\lambda\mu \\ \phi(\xi)\psi(\xi): & \quad a_1b_1 + bb_1 + a_0b_2 + b_2w - 5ab_2w\lambda - 2a_2b\mu + 3aa_1w\mu \\ \phi^2(\xi)\psi(\xi): & \quad a_2b_1 + a_1b_2 + 2bb_2 - 2ab_1w + 10aa_2w\mu \\ \phi^3(\xi)\psi(\xi): & \quad a_2b_2 - 6ab_2w \\ \psi^2(\xi): & \quad \frac{1}{2}b_1^2 - bb_2\mu + ab_1w\mu - 2aa_2w\mu^2 \\ \phi(\xi)\psi^2(\xi): & \quad b_1b_2 + 6ab_2w\mu \\ \phi^2(\xi)\psi^2(\xi): & \quad \frac{1}{2}b_2^2 \end{aligned} \quad (4.46)$$

biçimindedir.

1.durum: $\lambda < 0$ için (3.8) eşitliği kullanılarak $\psi(\xi)$ fonksiyonunun kuvvetleri $\psi(\xi)$ fonksiyonuna kadar indirgenirse, $\phi(\xi)$ ve $\psi(\xi)$ fonksiyonlarının kuvvetlerinin yeni katsayıları

$$\begin{aligned} \text{Sabit:} & \quad \frac{a_0^2}{2} + a_0w + a_1b\lambda - 2aa_2w\lambda^2 - \frac{b_1^2\lambda^2}{2(\mu^2 + \lambda^2\sigma)} + \frac{bb_2\lambda^2\mu}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} - \frac{ab_1w\lambda^2\mu}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} \\ & \quad + \frac{2aa_2w\lambda^2\mu^2}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} \\ \phi(\xi): & \quad a_0a_1 + a_1w + 2a_2b\lambda - 2aa_1w\lambda - \frac{b_1b_2\lambda^2}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} - \frac{6ab_2w\lambda^2\mu}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi^2(\xi): & \quad \frac{1}{2}a_1^2 + a_0a_2 + a_1b + a_2w - 8aa_2w\lambda - \frac{b_1^2\lambda}{2(\mu^2 + \lambda^2\sigma)} - \frac{b_2^2\lambda^2}{2(\mu^2 + \lambda^2\sigma)} \\
& \quad + \frac{bb_2\lambda\mu}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} - \frac{ab_1w\lambda\mu}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} + \frac{2aa_2w\lambda\mu^2}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} \\
\phi^3(\xi): & \quad a_1a_2 + 2a_2b - 2aa_1w - \frac{b_1b_2\lambda}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} - \frac{6ab_2w\lambda\mu}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} \\
\phi^4(\xi): & \quad \frac{1}{2}a_2^2 - 6aa_2w - \frac{b_2^2\lambda}{2(\mu^2 + \lambda^2\sigma)} \\
\psi(\xi): & \quad a_0b_1 + b_1w + bb_2\lambda - ab_1w\lambda - a_1b\mu + 4aa_2w\lambda\mu + \frac{b_1^2\lambda\mu}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} \\
& \quad - \frac{2bb_2\lambda\mu^2}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} + \frac{2ab_1w\lambda\mu^2}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} - \frac{4aa_2w\lambda\mu^3}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} \\
\phi(\xi)\psi(\xi): & \quad a_1b_1 + bb_1 + a_0b_2 + b_2w - 5ab_2w\lambda - 2a_2b\mu + 3aa_1w\mu + \frac{2b_1b_2\lambda\mu}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} \\
& \quad + \frac{12ab_2w\lambda\mu^2}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} \\
\phi^2(\xi)\psi(\xi): & \quad a_2b_1 + a_1b_2 + 2bb_2 - 2ab_1w + 10aa_2w\mu + \frac{b_2^2\lambda\mu}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} \\
\phi^3(\xi)\psi(\xi): & \quad a_2b_2 - 6ab_2w
\end{aligned} \tag{4.47}$$

olarak elde edilir. (4.47) ile verilen katsayıların sıfıra eşitlenmesi ve denklem sisteminin Mathematica yardımıyla çözülmesi sonucu elde edilen parametrelerin birbiri cinsinden değerlerinden biri

$$\begin{aligned}
a_0 &= a_2\lambda, & a_1 &= 0, \\
b_1 &= -a_2\mu, & b_2 &= \frac{\sqrt{a_2^2\mu^2 + a_2^2\lambda^2\sigma}}{\sqrt{-\lambda}}, \\
a &= -\frac{1}{\lambda}, & b &= 0, & w &= -\frac{a_2\lambda}{6}
\end{aligned} \tag{4.48}$$

şeklinde olup bir diğeri ise

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0, & a_1 &= -a_2\sqrt{-\lambda}, \\
b_1 &= -a_2\mu - \sqrt{a_2^2(\mu^2 + \lambda^2\sigma)}, & b_2 &= \frac{\sqrt{a_2^2\mu^2 + a_2^2\lambda^2\sigma}}{\sqrt{-\lambda}}, \\
a &= \frac{1}{6\lambda}, & b &= \frac{5}{6}a_2\sqrt{-\lambda}, & w &= a_2\lambda
\end{aligned} \tag{4.49}$$

biçimindedir.

(3.7) eşitliği (3.4) eşitliğinde yazılarak düzenlendiğinde

$$\begin{aligned}\phi(\xi) &= \frac{A_1\sqrt{-\lambda}\cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_2\sqrt{-\lambda}\sinh(\sqrt{-\lambda}\xi)}{\frac{\mu}{\lambda} + A_2\cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_1\sinh(\sqrt{-\lambda}\xi)}, \\ \psi(\xi) &= \frac{1}{\frac{\mu}{\lambda} + A_2\cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_1\sinh(\sqrt{-\lambda}\xi)}\end{aligned}\quad (4.50)$$

eşitlikleri elde edilir. (4.50) eşitlikleri (4.45) ile verilen denklemde yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}U(\xi) &= a_0 + \frac{b_1}{\frac{\mu}{\lambda} + A_2\cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_1\sinh(\sqrt{-\lambda}\xi)} \\ &+ \frac{b_2 \left(A_1\sqrt{-\lambda}\cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_2\sqrt{-\lambda}\sinh(\sqrt{-\lambda}\xi) \right)}{\left(\frac{\mu}{\lambda} + A_2\cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_1\sinh(\sqrt{-\lambda}\xi) \right)^2} \\ &+ \frac{a_1 \left(A_1\sqrt{-\lambda}\cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_2\sqrt{-\lambda}\sinh(\sqrt{-\lambda}\xi) \right)}{\frac{\mu}{\lambda} + A_2\cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_1\sinh(\sqrt{-\lambda}\xi)} \\ &+ \frac{a_2 \left(A_1\sqrt{-\lambda}\cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_2\sqrt{-\lambda}\sinh(\sqrt{-\lambda}\xi) \right)^2}{\left(\frac{\mu}{\lambda} + A_2\cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_1\sinh(\sqrt{-\lambda}\xi) \right)^2}\end{aligned}$$

olarak bulunur. Mathematica yardımı ile elde edilen a_0 , a_1 , b_1 , b_2 , a , b , w ve μ parametreleri ve $\xi = x + w\frac{t^\alpha}{\alpha}$ değerinin $U(\xi)$ ifadesinde yerine yazılmasıyla (4.42) ile verilen conformable kesirli mertebeden Oskolkov denkleminin analitik çözümleri elde edilir. (4.48) ile verilen parametrelerin değerleri için elde edilen analitik çözüm

$$\xi = x + \left(-\frac{a_2\lambda}{6} \right) \frac{t^\alpha}{\alpha} \quad \text{ve} \quad \sigma = A_1^2 - A_2^2 \text{ olmak üzere}$$

$$\begin{aligned}u(x, t) &= a_2\lambda - \frac{a_2\mu}{\frac{\mu}{\lambda} + A_2\cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_1\sinh(\sqrt{-\lambda}\xi)} \\ &+ \frac{\sqrt{a_2^2\mu^2 + a_2^2\lambda^2\sigma} \left(A_1\sqrt{-\lambda}\cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_2\sqrt{-\lambda}\sinh(\sqrt{-\lambda}\xi) \right)}{\sqrt{-\lambda} \left(\frac{\mu}{\lambda} + A_2\cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_1\sinh(\sqrt{-\lambda}\xi) \right)^2} \\ &+ \frac{a_2 \left(A_1\sqrt{-\lambda}\cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_2\sqrt{-\lambda}\sinh(\sqrt{-\lambda}\xi) \right)^2}{\left(\frac{\mu}{\lambda} + A_2\cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_1\sinh(\sqrt{-\lambda}\xi) \right)^2}\end{aligned}$$

biçimindedir. Burada (4.49) ile verilen parametrelerin değerleri için elde edilen analitik

çözüm ise

$$\xi = x + (a_2\lambda) \frac{t^\alpha}{\alpha} \quad \text{ve} \quad \sigma = A_1^2 - A_2^2 \text{ olmak üzere}$$

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \frac{-a_2\mu - \sqrt{a_2^2(\mu^2 + \lambda^2\sigma)}}{\frac{\mu}{\lambda} + A_2\cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_1\sinh(\sqrt{-\lambda}\xi)} \\ & + \frac{\sqrt{a_2^2\mu^2 + a_2^2\lambda^2\sigma} \left(A_1\sqrt{-\lambda}\cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_2\sqrt{-\lambda}\sinh(\sqrt{-\lambda}\xi) \right)}{\sqrt{-\lambda} \left(\frac{\mu}{\lambda} + A_2\cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_1\sinh(\sqrt{-\lambda}\xi) \right)^2} \\ & - \frac{a_2\sqrt{-\lambda} \left(A_1\sqrt{-\lambda}\cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_2\sqrt{-\lambda}\sinh(\sqrt{-\lambda}\xi) \right)}{\frac{\mu}{\lambda} + A_2\cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_1\sinh(\sqrt{-\lambda}\xi)} \\ & + \frac{a_2 \left(A_1\sqrt{-\lambda}\cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_2\sqrt{-\lambda}\sinh(\sqrt{-\lambda}\xi) \right)^2}{\left(\frac{\mu}{\lambda} + A_2\cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_1\sinh(\sqrt{-\lambda}\xi) \right)^2} \end{aligned}$$

biçiminde olacaktır.

2.durum: $\lambda > 0$ için (3.10) eşitliği kullanılarak $\psi(\xi)$ fonksiyonunun kuvvetleri $\psi(\xi)$ fonksiyonuna kadar indirgenirse, $\phi(\xi)$ ve $\psi(\xi)$ fonksiyonlarının kuvvetlerinin yeni katsayıları

$$\begin{aligned} \text{Sabit:} \quad & \frac{a_0^2}{2} + a_0w + a_1b\lambda - 2aa_2w\lambda^2 + \frac{b_1^2\lambda^2}{2(-\mu^2 + \lambda^2\rho)} - \frac{bb_2\lambda^2\mu}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} \\ & + \frac{ab_1w\lambda^2\mu}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} - \frac{2aa_2w\lambda^2\mu^2}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} \end{aligned}$$

$$\phi(\xi): \quad a_0a_1 + a_1w + 2a_2b\lambda - 2aa_1w\lambda + \frac{b_1b_2\lambda^2}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} + \frac{6ab_2w\lambda^2\mu}{-\mu^2 + \lambda^2\rho}$$

$$\begin{aligned} \phi^2(\xi): \quad & \frac{1}{2}a_1^2 + a_0a_2 + a_1b + a_2w - 8aa_2w\lambda + \frac{b_1^2\lambda}{2(-\mu^2 + \lambda^2\rho)} + \frac{b_2^2\lambda^2}{2(-\mu^2 + \lambda^2\rho)} \\ & - \frac{bb_2\lambda\mu}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} + \frac{ab_1w\lambda\mu}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} - \frac{2aa_2w\lambda\mu^2}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} \end{aligned}$$

$$\phi^3(\xi): \quad a_1a_2 + 2a_2b - 2aa_1w + \frac{b_1b_2\lambda}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} + \frac{6ab_2w\lambda\mu}{-\mu^2 + \lambda^2\rho}$$

$$\phi^4(\xi): \quad \frac{1}{2}a_2^2 - 6aa_2w + \frac{b_2^2\lambda}{2(-\mu^2 + \lambda^2\rho)}$$

$$\begin{aligned}
\psi(\xi): \quad & a_0 b_1 + b_1 w + b b_2 \lambda - a b_1 w \lambda - a_1 b \mu + 4 a a_2 w \lambda \mu - \frac{b_1^2 \lambda \mu}{-\mu^2 + \lambda^2 \rho} \\
& + \frac{2 b b_2 \lambda \mu^2}{-\mu^2 + \lambda^2 \rho} - \frac{2 a b_1 w \lambda \mu^2}{-\mu^2 + \lambda^2 \rho} + \frac{4 a a_2 w \lambda \mu^3}{-\mu^2 + \lambda^2 \rho} \\
\phi(\xi) \psi(\xi): \quad & a_1 b_1 + b b_1 + a_0 b_2 + b_2 w - 5 a b_2 w \lambda - 2 a_2 b \mu + 3 a a_1 w \mu - \frac{2 b_1 b_2 \lambda \mu}{-\mu^2 + \lambda^2 \rho} \\
& - \frac{12 a b_2 w \lambda \mu^2}{-\mu^2 + \lambda^2 \rho} \\
\phi^2(\xi) \psi(\xi): \quad & a_2 b_1 + a_1 b_2 + 2 b b_2 - 2 a b_1 w + 10 a a_2 w \mu - \frac{b_2^2 \lambda \mu}{-\mu^2 + \lambda^2 \rho} \\
\phi^3(\xi) \psi(\xi): \quad & a_2 b_2 - 6 a b_2 w
\end{aligned} \tag{4.51}$$

olarak elde edilir. (4.51) ile verilen katsayıların sıfıra eşitlenmesi ve denklem sisteminin Mathematica yardımıyla çözülmesi sonucu elde edilen parametrelerin birbiri cinsinden değerlerinden biri

$$\begin{aligned}
a_0 &= 4w, & a_1 &= 0, & a_2 &= \frac{6w}{\lambda}, \\
b_1 &= -\frac{6w\mu}{\lambda}, & b_2 &= -\frac{6\sqrt{-w^2\mu^2 + w^2\lambda^2\rho}}{\lambda^{3/2}}, \\
a &= \frac{1}{\lambda}, & b &= 0
\end{aligned} \tag{4.52}$$

şeklinde olup bir diğeri ise

$$\begin{aligned}
a_0 &= -6w, & a_1 &= 0, & a_2 &= -\frac{6w}{\lambda}, \\
b_1 &= \frac{6w\mu}{\lambda}, & b_2 &= -\frac{6\sqrt{-w^2\mu^2 + w^2\lambda^2\rho}}{\lambda^{3/2}}, \\
a &= -\frac{1}{\lambda}, & b &= 0
\end{aligned} \tag{4.53}$$

biçimindedir. (3.9) eşitliği (3.4) eşitliğinde yazılarak düzenlendiğinde

$$\begin{aligned}
\phi(\xi) &= \frac{A_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda} \xi) - A_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} \xi)}{\frac{\mu}{\lambda} + A_2 \cos(\sqrt{\lambda} \xi) + A_1 \sin(\sqrt{\lambda} \xi)}, \\
\psi(\xi) &= \frac{1}{\frac{\mu}{\lambda} + A_2 \cos(\sqrt{\lambda} \xi) + A_1 \sin(\sqrt{\lambda} \xi)}
\end{aligned} \tag{4.54}$$

eşitlikleri elde edilir. (4.54) eşitlikleri (4.45) ile verilen denklemde yerlerine yazılırsa

$$U(\xi) = a_0 + \frac{b_1}{\frac{\mu}{\lambda} + A_2 \cos(\sqrt{\lambda} \xi) + A_1 \sin(\sqrt{\lambda} \xi)}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{b_2 \left(A_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda} \xi) - A_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} \xi) \right)}{\left(\frac{\mu}{\lambda} + A_2 \cos(\sqrt{\lambda} \xi) + A_1 \sin(\sqrt{\lambda} \xi) \right)^2} + \frac{a_1 \left(A_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda} \xi) - A_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} \xi) \right)}{\frac{\mu}{\lambda} + A_2 \cos(\sqrt{\lambda} \xi) + A_1 \sin(\sqrt{\lambda} \xi)} \\
& + \frac{a_2 \left(A_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda} \xi) - A_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} \xi) \right)^2}{\left(\frac{\mu}{\lambda} + A_2 \cos(\sqrt{\lambda} \xi) + A_1 \sin(\sqrt{\lambda} \xi) \right)^2}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Mathematica yardımı ile elde edilen a_0 , a_1 , a_2 , b_1 , b_2 , a ve b parametreleri ve $\xi = x + w \frac{t^\alpha}{\alpha}$ değerinin $U(\xi)$ ifadesinde yerine yazılmasıyla, (4.42) ile verilen conformable kesirli mertebeden Oskolkov denkleminin analitik çözümleri elde edilir. (4.52) ile verilen parametrelerin değerleri için elde edilen analitik çözüm

$$\begin{aligned}
\xi &= x + w \frac{t^\alpha}{\alpha} \quad \text{ve} \quad \rho = A_1^2 + A_2^2 \quad \text{olmak üzere} \\
u(x, t) &= 4w - \frac{6w\mu}{\lambda \left(\frac{\mu}{\lambda} + A_2 \cos(\sqrt{\lambda} \xi) + A_1 \sin(\sqrt{\lambda} \xi) \right)} \\
& - \frac{6\sqrt{-w^2\mu^2 + w^2\lambda^2\rho} \left(A_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda} \xi) - A_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} \xi) \right)}{\lambda^{3/2} \left(\frac{\mu}{\lambda} + A_2 \cos(\sqrt{\lambda} \xi) + A_1 \sin(\sqrt{\lambda} \xi) \right)^2} \\
& + \frac{6w \left(A_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda} \xi) - A_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} \xi) \right)^2}{\lambda \left(\frac{\mu}{\lambda} + A_2 \cos(\sqrt{\lambda} \xi) + A_1 \sin(\sqrt{\lambda} \xi) \right)^2}
\end{aligned}$$

biçimindedir. Burada (4.53) ile verilen parametrelerin değerleri için elde edilen analitik çözüm ise

$$\begin{aligned}
\xi &= x + w \frac{t^\alpha}{\alpha} \quad \text{ve} \quad \rho = A_1^2 + A_2^2 \quad \text{olmak üzere} \\
u(x, t) &= -6w + \frac{6w\mu}{\lambda \left(\frac{\mu}{\lambda} + A_2 \cos(\sqrt{\lambda} \xi) + A_1 \sin(\sqrt{\lambda} \xi) \right)} \\
& - \frac{6\sqrt{-w^2\mu^2 + w^2\lambda^2\rho} \left(A_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda} \xi) - A_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} \xi) \right)}{\lambda^{3/2} \left(\frac{\mu}{\lambda} + A_2 \cos(\sqrt{\lambda} \xi) + A_1 \sin(\sqrt{\lambda} \xi) \right)^2} \\
& - \frac{6w \left(A_1 \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda} \xi) - A_2 \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} \xi) \right)^2}{\lambda \left(\frac{\mu}{\lambda} + A_2 \cos(\sqrt{\lambda} \xi) + A_1 \sin(\sqrt{\lambda} \xi) \right)^2}
\end{aligned}$$

biçiminde olacaktır.

3.durum: $\lambda = 0$ için (3.12) eşitliği kullanılarak $\psi(\xi)$ fonksiyonunun kuvvetleri $\psi(\xi)$ fonksiyonuna kadar indirgenirse, $\phi(\xi)$ ve $\psi(\xi)$ fonksiyonlarının kuvvetlerinin yeni katsayıları

$$\begin{aligned}
\text{Sabit:} & \quad \frac{a_0^2}{2} + a_0 w \\
\phi(\xi): & \quad a_0 a_1 + a_1 w \\
\phi^2(\xi): & \quad \frac{1}{2} a_1^2 + a_0 a_2 + a_1 b + a_2 w + \frac{b_1^2}{2(A_1^2 - 2A_2\mu)} - \frac{bb_2\mu}{A_1^2 - 2A_2\mu} \\
& \quad + \frac{ab_1 w \mu}{A_1^2 - 2A_2\mu} - \frac{2aa_2 w \mu^2}{A_1^2 - 2A_2\mu} \\
\phi^3(\xi): & \quad a_1 a_2 + 2a_2 b - 2aa_1 w + \frac{b_1 b_2}{A_1^2 - 2A_2\mu} + \frac{6ab_2 w \mu}{A_1^2 - 2A_2\mu} \\
\phi^4(\xi): & \quad \frac{1}{2} a_2^2 - 6aa_2 w + \frac{b_2^2}{2(A_1^2 - 2A_2\mu)} \\
\psi(\xi): & \quad a_0 b_1 + b_1 w - a_1 b \mu - \frac{b_1^2 \mu}{A_1^2 - 2A_2\mu} + \frac{2bb_2 \mu^2}{A_1^2 - 2A_2\mu} - \frac{2ab_1 w \mu^2}{A_1^2 - 2A_2\mu} \\
& \quad + \frac{4aa_2 w \mu^3}{A_1^2 - 2A_2\mu} \\
\phi(\xi)\psi(\xi): & \quad a_1 b_1 + bb_1 + a_0 b_2 + b_2 w - 2a_2 b \mu + 3aa_1 w \mu - \frac{2b_1 b_2 \mu}{A_1^2 - 2A_2\mu} \\
& \quad - \frac{12ab_2 w \mu^2}{A_1^2 - 2A_2\mu} \\
\phi^2(\xi)\psi(\xi): & \quad a_2 b_1 + a_1 b_2 + 2bb_2 - 2ab_1 w + 10aa_2 w \mu - \frac{b_2^2 \mu}{A_1^2 - 2A_2\mu} \\
\phi^3(\xi)\psi(\xi): & \quad a_2 b_2 - 6ab_2 w
\end{aligned} \tag{4.55}$$

olarak elde edilir. (4.55) ile verilen katsayıların sıfıra eşitlenmesi ve denklem sisteminin farklı parametreler için Mathematica yardımıyla çözülmesi sonucu w parametresinin sıfırdan farklı olduğu bir çözüm elde edilememiş, bu nedenle $\lambda = 0$ için çözüm verilmemiştir.

4.4. Kesirli Mertebeden Benny Luke Denkleminin Çözümleri

Bu kısımda, conformable kesirli mertebeden Benny Luke (BL) denkleminine $(G'/G, 1/G)$ açılım yöntemi uygulanarak açık çözümler elde edilmiştir.

Hossain ve Akbar, 2021 yılında tam sayı mertebeden türev içeren

$$u_{tt} - u_{xx} + au_{xxxx} - bu_{xxtt} + u_t u_{xx} + 2u_x u_{xt} = 0 \quad (4.56)$$

BL denkleminin analitik çözümlerini elde ettiler. Burada a, b pozitif sayılardır (Hossain ve Akbar, 2021). (4.56) ile verilen kısmi diferansiyel denklemin conformable kesirli mertebeden formu

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - b \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} \right) \right) + \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} \right) = 0 \quad (4.57)$$

şeklindedir. Burada α conformable kesirli mertebeden türevi göstermekte olup, $0 < \alpha < 1$ şeklindedir.

(4.57) ile verilen denkleme $u(x, t) = U(\xi)$, $\xi = x + w \frac{t^\alpha}{\alpha}$ dönüşümü uygulanırsa, conformable kesirli mertebeden denklem

$$(w^2 - 1)U_{\xi\xi} + (a - bw^2)U_{\xi\xi\xi\xi} + 3wU_\xi U_{\xi\xi} = 0 \quad (4.58)$$

formundaki adi diferansiyel denkleme dönüşür. Elde edilen denklemin integral sabitini sıfır kabul ederek bir defa integrali alınır

$$(w^2 - 1)U_\xi + (a - bw^2)U_{\xi\xi\xi} + \frac{3}{2}w(U_\xi)^2 = 0 \quad (4.59)$$

formunda bir denklem elde edilir. Burada en yüksek mertebeden türev içeren ifade $U_{\xi\xi\xi}$ ile en yüksek dereceden lineer olmayan terim $(U_\xi)^2$ ifadelerinin kullanılmasıyla homojen dengeleme terimi olan N değeri $N + 3 = 2N + 2$ eşitliğinden $N = 1$ bulunur. Dolayısıyla (4.59) denklemi için

$$U(\xi) = a_0 + a_1\phi(\xi) + b_1\psi(\xi) \quad (4.60)$$

formunda bir analitik çözüm fonksiyonu elde edilir. (4.60) eşitliği (4.59) denkleminde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa $\phi(\xi)$ ve $\psi(\xi)$ fonksiyonlarının kuvvetlerinden oluşan bir denklem sistemi elde edilir. Elde edilen denklem sistemindeki $\phi(\xi)$ ve $\psi(\xi)$ fonksiyonlarının kuvvetlerinin katsayıları

$$\text{Sabit:} \quad a_1\lambda - a_1w^2\lambda - 2aa_1\lambda^2 + \frac{3}{2}a_1^2w\lambda^2 + 2a_1bw^2\lambda^2$$

$$\phi^2(\xi): \quad a_1 - a_1w^2 - 8aa_1\lambda + 3a_1^2w\lambda + 8a_1bw^2\lambda$$

$$\begin{aligned}
\phi^4(\xi): & -6aa_1 + \frac{3}{2}a_1^2w + 6a_1bw^2 \\
\psi(\xi): & -a_1\mu + a_1w^2\mu + 5aa_1\lambda\mu - 3a_1^2w\lambda\mu - 5a_1bw^2\lambda\mu \\
\phi(\xi)\psi(\xi): & b_1 - b_1w^2 - 5ab_1\lambda + 3a_1b_1w\lambda + 5bb_1w^2\lambda \\
\phi^2(\xi)\psi(\xi): & 12aa_1\mu - 3a_1^2w\mu - 12a_1bw^2\mu \\
\phi^3(\xi)\psi(\xi): & -6ab_1 + 3a_1b_1w + 6bb_1w^2 \\
\psi^2(\xi): & -3aa_1\mu^2 + \frac{3}{2}a_1^2w\mu^2 + 3a_1bw^2\mu^2 \\
\phi(\xi)\psi^2(\xi): & 6ab_1\mu - 3a_1b_1w\mu - 6bb_1w^2\mu \\
\phi^2(\xi)\psi^2(\xi): & \frac{3}{2}b_1^2w
\end{aligned} \tag{4.61}$$

biçimindedir.

1.durum: $\lambda < 0$ için (3.8) eşitliği kullanılarak $\psi(\xi)$ fonksiyonunun kuvvetleri $\psi(\xi)$ fonksiyonuna kadar indirgenirse, $\phi(\xi)$ ve $\psi(\xi)$ fonksiyonlarının kuvvetlerinin yeni katsayıları

$$\begin{aligned}
\text{Sabit:} \quad & a_1\lambda - a_1w^2\lambda - 2aa_1\lambda^2 + \frac{3}{2}a_1^2w\lambda^2 + 2a_1bw^2\lambda^2 + \frac{3aa_1\lambda^2\mu^2}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} \\
& - \frac{3a_1^2w\lambda^2\mu^2}{2(\mu^2 + \lambda^2\sigma)} - \frac{3a_1bw^2\lambda^2\mu^2}{\mu^2 + \lambda^2\sigma}
\end{aligned}$$

$$\phi(\xi): \quad -\frac{6ab_1\lambda^2\mu}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} + \frac{3a_1b_1w\lambda^2\mu}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} + \frac{6bb_1w^2\lambda^2\mu}{\mu^2 + \lambda^2\sigma}$$

$$\begin{aligned}
\phi^2(\xi): \quad & a_1 - a_1w^2 - 8aa_1\lambda + 3a_1^2w\lambda + 8a_1bw^2\lambda - \frac{3b_1^2w\lambda^2}{2(\mu^2 + \lambda^2\sigma)} + \frac{3aa_1\lambda\mu^2}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} \\
& - \frac{3a_1^2w\lambda\mu^2}{2(\mu^2 + \lambda^2\sigma)} - \frac{3a_1bw^2\lambda\mu^2}{\mu^2 + \lambda^2\sigma}
\end{aligned}$$

$$\phi^3(\xi): \quad -\frac{6ab_1\lambda\mu}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} + \frac{3a_1b_1w\lambda\mu}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} + \frac{6bb_1w^2\lambda\mu}{\mu^2 + \lambda^2\sigma}$$

$$\phi^4(\xi): \quad -6aa_1 + \frac{3}{2}a_1^2w + 6a_1bw^2 - \frac{3b_1^2w\lambda}{2(\mu^2 + \lambda^2\sigma)}$$

$$\begin{aligned}
\psi(\xi): \quad & -a_1\mu + a_1w^2\mu + 5aa_1\lambda\mu - 3a_1^2w\lambda\mu - 5a_1bw^2\lambda\mu - \frac{6aa_1\lambda\mu^3}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} \\
& + \frac{3a_1^2w\lambda\mu^3}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} + \frac{6a_1bw^2\lambda\mu^3}{\mu^2 + \lambda^2\sigma}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi(\xi)\psi(\xi): & \quad b_1 - b_1 w^2 - 5ab_1\lambda + 3a_1b_1w\lambda + 5bb_1w^2\lambda + \frac{12ab_1\lambda\mu^2}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} - \frac{6a_1b_1w\lambda\mu^2}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} \\
& \quad - \frac{12bb_1w^2\lambda\mu^2}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} \\
\phi^2(\xi)\psi(\xi): & \quad 12aa_1\mu - 3a_1^2w\mu - 12a_1bw^2\mu + \frac{3b_1^2w\lambda\mu}{\mu^2 + \lambda^2\sigma} \\
\phi^3(\xi)\psi(\xi): & \quad -6ab_1 + 3a_1b_1w + 6bb_1w^2 \tag{4.62}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. (4.62) ile verilen katsayıların sıfıra eşitlenmesi ve denklem sisteminin Mathematica yardımıyla çözülmesi sonucu elde edilen parametrelerin birbiri cinsinden değerlerinden biri

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{\sqrt{a_1^2\mu^2 + a_1^2\lambda^2\sigma}}{\sqrt{-\lambda}}, \\
a &= \frac{1}{8} \left(8b + a_1^2\lambda + a_1^2b\lambda^2 - a_1\sqrt{16 + a_1^2\lambda^2} - a_1b\lambda\sqrt{16 + a_1^2\lambda^2} \right), \\
w &= \frac{1}{4} \left(a_1\lambda - \sqrt{16 + a_1^2\lambda^2} \right) \tag{4.63}
\end{aligned}$$

şeklinde olup bir diğeri ise

$$\begin{aligned}
b_1 &= a_1\sqrt{-\lambda}\sqrt{\sigma}, \\
a &= \frac{1}{8} \left(8b + a_1^2\lambda + a_1^2b\lambda^2 + a_1\sqrt{16 + a_1^2\lambda^2} + a_1b\lambda\sqrt{16 + a_1^2\lambda^2} \right), \\
w &= \frac{1}{4} \left(a_1\lambda + \sqrt{16 + a_1^2\lambda^2} \right), \quad \mu = 0 \tag{4.64}
\end{aligned}$$

biçimindedir.

(3.7) eşitliği (3.4) eşitliğinde yazılarak düzenlendiğinde

$$\begin{aligned}
\phi(\xi) &= \frac{A_1\sqrt{-\lambda}\cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_2\sqrt{-\lambda}\sinh(\sqrt{-\lambda}\xi)}{\frac{\mu}{\lambda} + A_2\cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_1\sinh(\sqrt{-\lambda}\xi)}, \\
\psi(\xi) &= \frac{1}{\frac{\mu}{\lambda} + A_2\cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_1\sinh(\sqrt{-\lambda}\xi)} \tag{4.65}
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. (4.65) eşitlikleri (4.60) ile verilen denklemde yerine yazılırsa

$$U(\xi) = a_0 + \frac{b_1}{\frac{\mu}{\lambda} + A_2\cosh(\sqrt{-\lambda}\xi) + A_1\sinh(\sqrt{-\lambda}\xi)}$$

$$+ \frac{a_1 \left(A_1 \sqrt{-\lambda} \cosh(\sqrt{-\lambda} \xi) + A_2 \sqrt{-\lambda} \sinh(\sqrt{-\lambda} \xi) \right)}{\frac{\mu}{\lambda} + A_2 \cosh(\sqrt{-\lambda} \xi) + A_1 \sinh(\sqrt{-\lambda} \xi)}$$

olarak bulunur. Mathematica yardımı ile elde edilen a_0 , b_1 , a , b , w ve μ parametreleri ve $\xi = x + w \frac{t^\alpha}{\alpha}$ değerinin $U(\xi)$ ifadesinde yerine yazılmasıyla, (4.57) ile verilen conformable kesirli mertebeden BL denkleminin analitik çözümleri elde edilir. (4.63) ile verilen parametrelerin değerleri için elde edilen analitik çözüm

$$\xi = x + \left(\frac{1}{4} \left(a_1 \lambda - \sqrt{16 + a_1^2 \lambda^2} \right) \right) \frac{t^\alpha}{\alpha} \quad \text{ve} \quad \sigma = A_1^2 - A_2^2 \quad \text{olmak üzere}$$

$$u(x, t) = a_0 + \frac{\sqrt{a_1^2 \mu^2 + a_1 \lambda^2 \sigma}}{\sqrt{-\lambda} \left(\frac{\mu}{\lambda} + A_2 \cosh(\sqrt{-\lambda} \xi) + A_1 \sinh(\sqrt{-\lambda} \xi) \right)} + \frac{a_1 \left(A_1 \sqrt{-\lambda} \cosh(\sqrt{-\lambda} \xi) + A_2 \sqrt{-\lambda} \sinh(\sqrt{-\lambda} \xi) \right)}{\frac{\mu}{\lambda} + A_2 \cosh(\sqrt{-\lambda} \xi) + A_1 \sinh(\sqrt{-\lambda} \xi)}$$

biçimindedir. Burada (4.64) ile verilen parametrelerin değerleri için elde edilen analitik çözüm ise

$$\xi = x + \left(\frac{1}{4} \left(a_1 \lambda + \sqrt{16 + a_1^2 \lambda^2} \right) \right) \frac{t^\alpha}{\alpha} \quad \text{ve} \quad \sigma = A_1^2 - A_2^2 \quad \text{olmak üzere}$$

$$u(x, t) = a_0 + \frac{a_1 \sqrt{-\lambda} \sqrt{\sigma}}{A_2 \cosh(\sqrt{-\lambda} \xi) + A_1 \sinh(\sqrt{-\lambda} \xi)} + \frac{a_1 \left(A_1 \sqrt{-\lambda} \cosh(\sqrt{-\lambda} \xi) + A_2 \sqrt{-\lambda} \sinh(\sqrt{-\lambda} \xi) \right)}{A_2 \cosh(\sqrt{-\lambda} \xi) + A_1 \sinh(\sqrt{-\lambda} \xi)}$$

biçiminde olacaktır.

2.durum: $\lambda > 0$ için (3.10) eşitliği kullanılarak $\psi(\xi)$ fonksiyonunun kuvvetleri $\psi(\xi)$ fonksiyonuna kadar indirgenirse, $\phi(\xi)$ ve $\psi(\xi)$ fonksiyonlarının kuvvetlerinin yeni katsayıları

$$\begin{aligned} \text{Sabit:} \quad & a_1 \lambda - a_1 w^2 \lambda - 2a a_1 \lambda^2 + \frac{3}{2} a_1^2 w \lambda^2 + 2a_1 b w^2 \lambda^2 - \frac{3a a_1 \lambda^2 \mu^2}{-\mu^2 + \lambda^2 \rho} \\ & + \frac{3a_1^2 w \lambda^2 \mu^2}{2(-\mu^2 + \lambda^2 \rho)} + \frac{3a_1 b w^2 \lambda^2 \mu^2}{-\mu^2 + \lambda^2 \rho} \end{aligned}$$

$$\phi(\xi): \quad \frac{6a b_1 \lambda^2 \mu}{-\mu^2 + \lambda^2 \rho} - \frac{3a_1 b_1 w \lambda^2 \mu}{-\mu^2 + \lambda^2 \rho} - \frac{6b b_1 w^2 \lambda^2 \mu}{-\mu^2 + \lambda^2 \rho}$$

$$\begin{aligned}
\phi^2(\xi): \quad & a_1 - a_1 w^2 - 8aa_1\lambda + 3a_1^2 w\lambda + 8a_1 bw^2\lambda + \frac{3b_1^2 w\lambda^2}{2(-\mu^2 + \lambda^2\rho)} - \frac{3aa_1\lambda\mu^2}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} \\
& + \frac{3a_1^2 w\lambda\mu^2}{2(-\mu^2 + \lambda^2\rho)} + \frac{3a_1 bw^2\lambda\mu^2}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} \\
\phi^3(\xi): \quad & \frac{6ab_1\lambda\mu}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} - \frac{3a_1 b_1 w\lambda\mu}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} - \frac{6bb_1 w^2\lambda\mu}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} \\
\phi^4(\xi): \quad & -6aa_1 + \frac{3}{2}a_1^2 w + 6a_1 bw^2 + \frac{3b_1^2 w\lambda}{2(-\mu^2 + \lambda^2\rho)} \\
\psi(\xi): \quad & -a_1\mu + a_1 w^2\mu + 5aa_1\lambda\mu - 3a_1^2 w\lambda\mu - 5a_1 bw^2\lambda\mu + \frac{6aa_1\lambda\mu^3}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} \\
& - \frac{3a_1^2 w\lambda\mu^3}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} - \frac{6a_1 bw^2\lambda\mu^3}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} \\
\phi(\xi)\psi(\xi): \quad & b_1 - b_1 w^2 - 5ab_1\lambda + 3a_1 b_1 w\lambda + 5bb_1 w^2\lambda - \frac{12ab_1\lambda\mu^2}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} + \frac{6a_1 b_1 w\lambda\mu^2}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} \\
& + \frac{12bb_1 w^2\lambda\mu^2}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} \\
\phi^2(\xi)\psi(\xi): \quad & 12aa_1\mu - 3a_1^2 w\mu - 12a_1 bw^2\mu - \frac{3b_1^2 w\lambda\mu}{-\mu^2 + \lambda^2\rho} \\
\phi^3(\xi)\psi(\xi): \quad & -6ab_1 + 3a_1 b_1 w + 6bb_1 w^2
\end{aligned} \tag{4.66}$$

olarak elde edilir. (4.66) ile verilen katsayıların sıfıra eşitlenmesi ve denklem sisteminin Mathematica yardımıyla çözülmesi sonucu elde edilen parametrelerin birbiri cinsinden değerlerinden biri

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{2(-1 + w^2)}{w\lambda}, \\
b_1 &= \frac{2\sqrt{\rho - 2w^2\rho + w^4\rho}}{w\sqrt{\lambda}}, \\
a &= \frac{-1 + w^2 + bw^2\lambda}{\lambda}, \quad \mu = 0
\end{aligned} \tag{4.67}$$

şeklinde olup bir diğeri ise

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{2(-1 + w^2)}{w\lambda}, \\
b_1 &= -\frac{2(-1 + w^2)\sqrt{-\mu^2 + \lambda^2\rho}}{w\lambda^{3/2}}, \\
a &= \frac{-1 + w^2 + bw^2\lambda}{\lambda}
\end{aligned} \tag{4.68}$$

biçimindedir. (3.9) eşitliği (3.4) eşitliğinde yazılarak düzenlendiğinde

$$\begin{aligned}\phi(\xi) &= \frac{A_1\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\xi) - A_2\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\xi)}{\frac{\mu}{\lambda} + A_2\cos(\sqrt{\lambda}\xi) + A_1\sin(\sqrt{\lambda}\xi)}, \\ \psi(\xi) &= \frac{1}{\frac{\mu}{\lambda} + A_2\cos(\sqrt{\lambda}\xi) + A_1\sin(\sqrt{\lambda}\xi)}\end{aligned}\quad (4.69)$$

eşitlikleri elde edilir. (4.69) eşitlikleri (4.60) ile verilen denklemde yerine yazılırsa

$$U(\xi) = a_0 + \frac{b_1}{\frac{\mu}{\lambda} + A_2\cos(\sqrt{\lambda}\xi) + A_1\sin(\sqrt{\lambda}\xi)}$$

$$+ \frac{a_1 \left(A_1\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\xi) - A_2\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\xi) \right)}{\frac{\mu}{\lambda} + A_2\cos(\sqrt{\lambda}\xi) + A_1\sin(\sqrt{\lambda}\xi)}$$

olarak bulunur. Mathematica yardımı ile elde edilen a_0 , a_1 , b_1 , a , b ve μ parametreleri ve $\xi = x + w \frac{t^\alpha}{\alpha}$ değerinin $U(\xi)$ ifadesinde yerine yazılmasıyla, (4.57) ile verilen conformable kesirli mertebeden BL denkleminin analitik çözümleri elde edilir. (4.67) ile verilen parametrelerin değerleri için elde edilen analitik çözüm

$$\xi = x + w \frac{t^\alpha}{\alpha} \quad \text{ve} \quad \rho = A_1^2 + A_2^2 \quad \text{olmak üzere}$$

$$\begin{aligned}u(x, t) &= a_0 + \frac{2\sqrt{\rho - 2w^2\rho + w^4\rho}}{w\sqrt{\lambda} \left(A_2\cos(\sqrt{\lambda}\xi) + A_1\sin(\sqrt{\lambda}\xi) \right)} \\ &+ \frac{2(-1 + w^2) \left(A_1\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\xi) - A_2\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\xi) \right)}{w\lambda \left(A_2\cos(\sqrt{\lambda}\xi) + A_1\sin(\sqrt{\lambda}\xi) \right)}\end{aligned}$$

biçimindedir. Burada (4.68) ile verilen parametrelerin değerleri için elde edilen analitik çözüm ise

$$\xi = x + w \frac{t^\alpha}{\alpha} \quad \text{ve} \quad \rho = A_1^2 + A_2^2 \quad \text{olmak üzere}$$

$$u(x, t) = a_0 - \frac{2(-1 + w^2)\sqrt{-\mu^2 + \lambda^2\rho}}{w\lambda^{3/2}\left(\frac{\mu}{\lambda} + A_2\cos(\sqrt{\lambda}\xi) + A_1\sin(\sqrt{\lambda}\xi)\right)} \\ + \frac{2(-1 + w^2)\left(A_1\sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}\xi) - A_2\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\xi)\right)}{w\lambda\left(\frac{\mu}{\lambda} + A_2\cos(\sqrt{\lambda}\xi) + A_1\sin(\sqrt{\lambda}\xi)\right)}$$

biçiminde olacaktır.

3.durum: $\lambda = 0$ için (3.12) eşitliği kullanılarak $\psi(\xi)$ fonksiyonunun kuvvetleri $\psi(\xi)$ fonksiyonuna kadar indirgenirse, $\phi(\xi)$ ve $\psi(\xi)$ fonksiyonlarının kuvvetlerinin yeni katsayıları

$$\begin{aligned} \phi^2(\xi): & \quad a_1 - a_1 w^2 - \frac{3aa_1\mu^2}{A_1^2 - 2A_2\mu} + \frac{3a_1^2w\mu^2}{2(A_1^2 - 2A_2\mu)} + \frac{3a_1bw^2\mu^2}{A_1^2 - 2A_2\mu} \\ \phi^3(\xi): & \quad \frac{6ab_1\mu}{A_1^2 - 2A_2\mu} - \frac{3a_1b_1w\mu}{A_1^2 - 2A_2\mu} - \frac{6bb_1w^2\mu}{A_1^2 - 2A_2\mu} \\ \phi^4(\xi): & \quad -6aa_1 + \frac{3}{2}a_1^2w + 6a_1bw^2 + \frac{3b_1^2w}{2(A_1^2 - 2A_2\mu)} \\ \psi(\xi): & \quad -a_1\mu + a_1w^2\mu + \frac{6aa_1\mu^3}{A_1^2 - 2A_2\mu} - \frac{3a_1^2w\mu^3}{A_1^2 - 2A_2\mu} - \frac{6a_1bw^2\mu^3}{A_1^2 - 2A_2\mu} \\ \phi(\xi)\psi(\xi): & \quad b_1 - b_1w^2 - \frac{12ab_1\mu^2}{A_1^2 - 2A_2\mu} + \frac{6a_1b_1w\mu^2}{A_1^2 - 2A_2\mu} + \frac{12bb_1w^2\mu^2}{A_1^2 - 2A_2\mu} \\ \phi^2(\xi)\psi(\xi): & \quad 12aa_1\mu - 3a_1^2w\mu - 12a_1bw^2\mu - \frac{3b_1^2w\mu}{A_1^2 - 2A_2\mu} \end{aligned}$$

$$\phi^3(\xi)\psi(\xi): -6ab_1 + 3a_1b_1w + 6bb_1w^2 \quad (4.70)$$

olarak elde edilir. (4.70) ile verilen katsayıların sıfıra eşitlenmesi ve denklem sisteminin Mathematica yardımıyla çözülmesi sonucu elde edilen parametrelerin birbiri cinsinden değerlerinden biri

$$a_1 = -\frac{b_1}{\sqrt{A_1^2 - 2A_2\mu}},$$

$$a = \frac{1}{2} \left(2b - \frac{b_1}{\sqrt{A_1^2 - 2A_2\mu}} \right), \quad w = 1 \quad (4.71)$$

şeklinde olup bir diğeri ise

$$a_1 = \frac{b_1}{A_1},$$

$$a = \frac{2A_1b - b_1}{2A_1}, \quad w = -1, \quad \mu = 0 \quad (4.72)$$

biçimindedir. (3.11) eşitliği (3.4) eşitliğinde yazılarak düzenlendiğinde

$$\phi(\xi) = \frac{A_1 + \mu\xi}{A_2 + A_1\xi + \frac{\mu\xi^2}{2}},$$

$$\psi(\xi) = \frac{1}{A_2 + A_1\xi + \frac{\mu\xi^2}{2}} \quad (4.73)$$

eşitlikleri elde edilir. (4.73) eşitlikleri (4.60) ile verilen denklemde yerlerine yazılırsa

$$U(\xi) = a_0 + \frac{b_1}{A_2 + A_1\xi + \frac{\mu\xi^2}{2}} + \frac{a_1(A_1 + \mu\xi)}{A_2 + A_1\xi + \frac{\mu\xi^2}{2}}$$

olarak bulunur. Mathematica yardımı ile elde edilen a_0 , a_1 , a , b , w ve μ parametreleri

ve $\xi = x + w \frac{t^\alpha}{\alpha}$ değerinin $U(\xi)$ ifadesinde yerine yazılmasıyla, (4.57) ile verilen

conformable kesirli mertebeden BL denkleminin analitik çözümleri elde edilir.

(4.71) ile verilen parametrelerin değerleri için elde edilen analitik çözüm

$$\xi = x + \frac{t^\alpha}{\alpha} \quad \text{olmak üzere}$$

$$u(x, t) = a_0 + \frac{b_1}{A_2 + A_1\xi + \frac{\mu\xi^2}{2}} - \frac{b_1(A_1 + \mu\xi)}{\sqrt{A_1^2 - 2A_2\mu}(A_2 + A_1\xi + \frac{\mu\xi^2}{2})}$$

biçimindedir. Burada (4.72) ile verilen parametrelerin değerleri için elde edilen

analitik çözüm ise

$$\xi = x - \frac{t^\alpha}{\alpha} \quad \text{olmak üzere}$$

$$u(x, t) = a_0 + \frac{2b_1}{A_2 + A_1\xi}$$

biçiminde olacaktır.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tezde conformable kesirli mertebeden Dodd - Bullough - Mikhailov denklemi, conformable kesirli mertebeden Kolmogorov - Petrovskii - Piskunov denklemi, conformable kesirli mertebeden Oskolkov denklemi ve conformable kesirli mertebeden Benny Luke denklemi $(G'/G, 1/G)$ açılım yöntemi yardımıyla analitik olarak çözüldü.

Conformable kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemleri $(G'/G, 1/G)$ açılım yöntemi kullanılarak analitik olarak çözmek için

$$u(x, t) = U(\xi), \quad \xi = x + w \frac{t^\alpha}{\alpha} \quad (5.1)$$

dönüşümü yardımıyla denklemler tam sayı mertebeden adi diferansiyel denklemlere dönüştürüldü. Daha sonra elde edilen adi diferansiyel denklemlerin

$$U(\xi) = \sum_{i=0}^N a_i \phi^i + \sum_{i=1}^N b_i \phi^{i-1} \psi \quad (5.2)$$

şeklinde analitik çözümü arandı. (5.2) ile verilen analitik çözüm formundaki homojen denge adı verilen N değeri denklemdeki en yüksek mertebeden türev içeren terim ile en yüksek dereceden lineer olmayan terim arasındaki ilişkiden elde edildi. (5.2) ile verilen analitik çözümün belirlenmesinden sonra (5.2) eşitliği adi türevli diferansiyel denklemde yerine yazılarak ϕ ve ψ fonksiyonlarına bağlı cebirsel denklem sistemi elde edildi. Elde edilen bu cebirsel denklem sisteminin Mathematica programı yardımıyla çözümlenmesiyle (5.2) ile verilen eşitlikteki bazı katsayıların birbiri cinsinden değerleri bulundu. Bulunan bu değerlerin ve (5.1) eşitliğinin (5.2) ile verilen analitik çözüm formunda yazılmasıyla conformable kesirli mertebeden kısmi türevli denklemlerin analitik çözümleri elde edildi.

Sonuç olarak gerçek hayatta meydana gelen fiziksel olayların modellenmesiyle ortaya çıkan kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümünü bulmak için $(G'/G, 1/G)$ açılım yönteminin etkili bir yöntem olduğu görüldü. Ayrıca bu tezde elde edilen analitik çözümler, bundan sonra bu denklemlerin sayısal çözümlerini elde etmek için yapılan çalışmalarla da karşılaştırma için kullanılabilir.

KAYNAKLAR

- Akçağıl, Ş., Aydemir, T., ve Gözükızıl, Ö. F., 2016. Exact travelling wave solutions of nonlinear pseudoparabolic equations by using the G'/G Expansion Method. **New Trends in Mathematical Sciences**, 4(4), s. 51 - 66. <https://doi.org/10.20852/ntmsci.2016422120>
- Ayhan, B., 2015. Lineer Olmayan Oluşum Denklemlerinin İntegrallenebilirliği ve Tam Çözümleri. **Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü** Doktora Tezi.
- Bulut, S., 2019. Bazı Lineer Olmayan Kısmi Diferensiyel Denklemlerin Hareket Eden Dalga Çözümlerinin Bulunması. **Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü** Yüksek Lisans Tezi.
- Demiray, S., Ünsal, Ö., ve Bekir, A., 2014. New Exact Solutions for Boussinesq Type Equations by Using $(G'/G, 1/G)$ and $(1/G')$ -Expansion Methods. **Acta Physica Polonica A**, s. 1093 - 1098. <https://doi.org/10.12693/APhysPolA.125.1093>
- Duran, S., 2020. Solitary Wave Solutions of the Coupled Konno-Oono Equation by Using the Functional Variable Method and the Two Variables $(G'/G, 1/G)$ -Expansion Method. **Adıyaman University Journal of Science**, 10(2), s. 585-594. <https://doi.org/10.37094/adyujsci.827964>
- Duran, S., 2021. Extractions of travelling wave solutions of $(2 + 1)$ -dimensional Boiti-Leon-Pempinelli system via $(G'/G, 1/G)$ - expansion method. **Optical and Quantum Electronics**, 53(299), s. 1-12. <https://doi.org/10.1007/s11082-021-02940-w>
- Durur, H., Yokuş, A., ve Abro, K. A., 2021. Computational and Traveling Wave Analysis of Tzitzéica and Dodd-Bullough-Mikhailov Equations: An Exact and Analytical Study. **Nonlinear Engineering**, 10(1), s. 272-281. <https://doi.org/10.1515/nleng-2021-0021>
- Esen, R. K., 2018. Lineer Olmayan Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Beş Farklı Teknikle Tam Çözümleri. **Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü** Yüksek Lisans Tezi.
- Feng, J., Li, W., and Wan, Q., 2011. Using (G'/G) -Expansion Method to Seek The Traveling Wave Solution of Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov Equation. **Applied Mathematics and Computation**, 217(12), s. 5860-5865. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2010.12.071>
- Gepreel, A. K., 2011. The Homotopy Perturbation Method Applied to The Nonlinear Fractional Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov Equations. **Applied Mathematics Letters**, 24(8), s. 1428-1434. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2011.03.025>
- Ghafoor, A., Firdous, S., Zubair, T., Iftikhar, A., Zainab, S., and Mohyud-Din, S. T., 2013. $(G'/G, 1/G)$ - Expansion method for generalized ZK, Sharma–Tasso–Olver (STO) and modified ZK equations. **Qscience Connect**, s. 2 - 12. <https://doi.org/10.5339/connect.2013.24>
- Gözükızıl, Ö. F., ve Akçağıl, Ş., 2013. The Tanh-Coth Method For Some Nonlinear Pseudoparabolic Equations With Exact Solutions. **Advances in Continuous and Discrete Models**, 143, s. 1-18. <https://doi.org/10.1186/1687-1847-2013-143>

- Hossain, A. S., and Akbar, M., 2021. Traveling wave solutions of Benny Luke equation via the enhanced (G'/G) -Expansion Method. **Ain Shams Engineering Journal**, 12(4), s. 4181-4187. <https://doi.org/10.1016/j.asej.2017.03.018>
- İlhan, O. A., Bulut, H., Sulaiman, T. A., ve Başkonuş, H. M., 2018. Dynamic of solitary wave solutions in some nonlinear pseudoparabolic models and Dodd-Bullough-Mikhailov equation. **Indian Journal of Physics**, 92, s. 999 - 1007. <https://doi.org/10.1007/s12648-018-1187-3>
- İnan, İ. E., Uğurlu, Y., ve Inc, M., 2015. New Applications of the $(G'/G, 1/G)$ -Expansion Method. **Acta Physica Polonica A**, s. 245 - 251. <https://doi.org/10.12693/APhysPolA.128.245>
- Islam, N., Khan, K., and Islam, M., 2019. Travelling Wave Solution of Dodd-Bullough-Mikhailov Equation: A Comparative Study Between Generalized Kudryashov and Improved F-expansion Methods. **Journal of Physics Communications**, 3(5), s. 1-11. <https://doi.org/10.1088/2399-6528/ab1a47>
- Khalil, R., Al Horani, M., Yousef, A., and Sababheh, M., 2014. A New Definition of Fractional Derivative. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 264, s. 65-70. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2014.01.002>
- Kuzu, B., 2018. Zakharov - Kuznetsov Denkleminin $(G'/G, 1/G)$ Açılım Metodu Kullanılarak Yürüyen Dalga Çözümlerinin Elde Edilmesi. **Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek Lisans Tezi**.
- Lai, S., Lv, X., and Shuai, M., 2009. The Jacobi Elliptic Function Solutions to a Generalized Benjamin-Bona-Mahony Equation. **Mathematical and Computer Modelling**, 49(1-2), s. 369 - 378. <https://doi.org/10.1016/j.mcm.2008.03.009>
- Li, L.-x., Li Er-qiang, and Wang, M.-l., 2010. The $(G'/G, 1/G)$ - Expansion Method and Its Application to Travelling Wave Solutions of The Zakharov Equations. **Applied Mathematics - A Journal of Chinese Universities**, s. 454 - 462. <https://doi.org/10.1007/s11766-010-2128-x>
- Miah, M. M., 2022. The Fifth Order Caudrey–Dodd–Gibbon Equation for Exact Traveling Wave Solutions Using the $(G'/G, 1/G)$ -Expansion Method. S. (Banerjee, and A. Saha Eds.), In: **Nonlinear Dynamics and Applications**. Cham: Springer. s. 113-1122. https://doi.org/10.1007/978-3-030-99792-2_94
- Miah, M. M., Ali, S. H., Akbar, A. M., and Wazwaz, A. M., 2017. **The European Physical Journal Plus**, 132, s. 1-15. <https://doi.org/10.1140/epjp/i2017-11571-0>
- Miller, K. S., and Ross, B., 1993. **An Introduction To The Fractional Calculus And Fractional Differential Equations**. Wiley, New York.
- Oldham, K. B., & Spanier, J., 1974. **The Fractional Calculus**. Academic Press, London
- Podlubny, I., 1999. **Fractional Differential Equations**. Academic Press.
- Sadaf, M., Arshed, S., Akram, G., and Iqra., 2022. Exact soliton and solitary wave solutions to the Fokas system using two variables $(G'/G, 1/G)$ -expansion technique and generalized projective Riccati equation method. **Optik - International Journal for Light and Electron Optics**, s. 1-12. <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2022.169713>
- Samko, S. G., Kilbas, A. A., and Marichev, O. I., 1993. **Fractional Integrals and Derivatives Theory and Applications**. Gordon and Breach Science Publishers, Switzerland.

- Seadawy, A. R., Lu, D., and Khater, M. M., 2017. Bifurcations of Traveling Wave Solutions for Dodd-Bullough-Mikhailov Equation and Coupled Higgs Equation and Their Applications. **Chinese Journal of Physics**, 55(4), s. 1310-1318. <https://doi.org/10.1016/j.cjph.2017.07.005>
- Šolín, P., 2006. **Partial Differential Equations and the Finite Element Method**. John Wiley & Sons.
- Taşbozan, O., Çenesiz, Y., ve Kurt, A., 2016. New Solutions For Conformable Fractional Boussinesq and Combined KdV-mKdV Equations Using Jacobi Elliptic Function Expansion Method. **The European Physical Journal Plus**, 131(244), s. 1-14. <https://doi.org/10.1140/epjp/i2016-16244-x>
- Taşbozan, O., Şenol , M., Kurt , A., ve Özkan, O., 2018. New Solutions of Fractional Drinfeld-Sokolov-Wilson System in Shallow Water Waves. **Ocean Engineering**, 161, s. 62-68. <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2018.04.075>
- Ünal, M., ve Ekici, M., 2021. The Double $(G'/G, 1/G)$ -Expansion Method and Its Applications for Some Nonlinear Partial Differential Equations. **Journal of the Institute of Science and Technology**, s. 599-608. <https://doi.org/10.21597/jist.767930>
- Yaşar, E., ve Giresunlu, İ. B., 2016. Exact Traveling Wave Solutions and Conservation Laws of $(2+1)$ Dimensional Konopelchenko-Dubrovsky System. **International Journal of Nonlinear Science**, s. 118 - 128.
- Yokuş, A., ve Durur, H., 2021. $(G'/G, 1/G)$ -expansion method for analytical solutions of Jimbo-Miwa equation. **Cumhuriyet Science Journal**, 42(1), s. 88-98. <https://doi.org/10.17776/csj.689759>
- Yokuş, A., Durur , H., Abro, K. A., ve Kaya, D., 2020b. Role of Gilson–Pickering equation for the different types of soliton solutions: a nonlinear analysis. **The European Physical Journal Plus**, s. 1-19. <https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-020-00646-8>
- Yokuş, A., Durur, H., Ahmad, H., ve Yao, S.-W., 2020c. Construction of Different Types Analytic Solutions for the Zhiber-Shabat Equation. **Mathematics**, 8(6)(908), s. 1-16. <https://doi.org/10.3390/math8060908>
- Yokuş, A., Durur, H., Ahmad, H., Thounthong, P., ve Zhang, Y.-F., 2020a. Construction of exact traveling wave solutions of the Bogoyavlenskii equation by $(G'/G, 1/G)$ and $(1/G')$ -expansion techniques. **Result in Physics**, 19, s. 1 - 8. <https://doi.org/10.1016/j.rinp.2020.103409>
- Yokuş, A., Kuzu, B., ve Demiroğlu, U., 2019. Investigation of solitary wave solutions for the $(3 + 1)$ -dimensional Zakharov Kuznetsov equation. **International Journal of Modern Physics B**, 33(29), s. 1-19. <https://doi.org/10.1142/S0217979219503508>
- Zayed, E., and Abdelaziz, M., 2012. The Two - Variable $(G'/G, 1/G)$ - Expansion Method for Solving the Nonlinear KdV - mKdV Equation. **Mathematical Problems in Engineering**, s. 1 - 14. <https://doi.org/10.1155/2012/725061>
- Zayed, E., and Ibrahim , H., 2014. Exact Solutions of Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov Equation Using the Modified Simple Equation Method. **Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series**, 30(3), s. 749 - 754. <https://doi.org/10.1007/s10255-014-0416-6>