



**T.C.
MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ENFORMATİK ANABİLİM DALI**

**BAZI LİNEER KUATERNİYONİK VE OKTONYONİK
DENKLEM (SİSTEM) LERİNİN İNCELENMELERİ**

Cennet BOLAT

DOKTORA TEZİ

Antakya/HATAY

OCAK-2014

T.C.
MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**BAZI LİNEER KUATERNİYONİK VE OKTONYONİK
DENKLEM (SİSTEM) LERİNİN İNCELENMELERİ**

CENNET BOLAT

DOKTORA TEZİ

ENFORMATİK ANABİLİM DALI

Doç. Dr. Ahmet İPEK danışmanlığında hazırlanan bu tez 17.01/2014 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği/oyçokluğu ile kabul edilmiştir.


Doç. Dr. Ahmet İPEK
BAŞKAN


Prof. Dr. Durmuş BOZKURT
ÜYE


Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN
ÜYE


Yrd. Doç. Dr. Turgut YELOĞLU
ÜYE


Yrd. Doç. Dr. Kamil ARI
ÜYE

Bu tez Enstitümüz Enformatik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.

Kod No: 40


Doç. Dr. İsmail Hakkı KARAHAN
Enstitü Müdürü

Proje No:

Not: Bu tezde özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

17/01/2014

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını ve tez üzerinde Yükseköğretim Kurulu tarafından hiçbir değişiklik yapılamayacağı için tezin bilgisayar ekranında görüntülendiğinde asıl nüsha ile aynı olması sorumluluğunun tarafıma ait olduğunu beyan ederim.



Cennet BOLAT

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	III
ABSTRACT	IV
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	V
ŞEKİLLER DİZİNİ	VI
ÇİZELGELER DİZİNİ	VII
1. GİRİŞ	1
1.1. Kuaterniyon Kavramı.....	1
1.2. Oktonyon Kavramı.....	2
1.3. Kapsam ve Önem.....	3
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR	6
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	9
3.1. MATERYAL	9
3.1.1. Lineer Denklem Sistemleri	10
3.1.1.1. $Ax = b$ Sisteminin Çözümlerinin Varlığı	11
3.1.1.2. Genelleştirilmiş Tersler ile $Ax = b$ Sisteminin İncelenmesi... ..	12
3.1.2. Reel Kuaterniyonlar Cebiri	14
3.1.2.1. Bir Reel Kuaterniyonun Sağ ve Sol Matris Temsilleri	20
3.1.3. Kompleks Kuaterniyonlar Cebiri	24
3.1.3.1. Bir Kompleks Kuaterniyonun Sağ ve Sol Matris Temsilleri ..	27
3.1.4. Reel Oktonyonlar Cebiri	30
3.1.4.1. Reel Oktonyonların Sol ve Sağ Matris Temsilleri.....	35
3.1.5. Kompleks Oktonyonlar Cebiri	40
3.2. YÖNTEM	42
3.2.1. Bir Bilinmeyenli Bazı Lineer Kompleks Kuaterniyonik Denklemlerin İncelenmesi	42

3.2.2. Bir Bilinmeyenli Bir Terimli Bazı Lineer Oktanyonik Denklemlerin Gerçel Sisteme İndirgeme Metodu Yardımıyla İncelenmesi	55
3.2.3. Bir Bilinmeyenli ve Bir Terimli Bazı Lineer Oktanyonik Denklemlerin Matris Temsilleri Yardımıyla İncelenmesi	76
3.2.4. Bir Bilinmeyenli İki Terimli Bazı Lineer Oktanyonik Denklemlerin Matris Temsilleri Yardımıyla İncelenmesi	85
3.2.5. Bazı İki Yanlı Lineer Oktanyonik Denklem Sistemlerinin Çözümlerinin İncelenmesi	111
4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA	121
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	124
KAYNAKLAR.....	126
TEŞEKKÜR	131
ÖZGEÇMİŞ.....	132

ÖZET

**BAZI LİNEER KUATERNİYONİK VE OKTONYONİK
DENKLEM (SİSTEM) LERİNİN İNCELENMELERİ**

Tezde, kompleks kuaterniyon cebiri $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ de

$$AX = XA, \quad AX = XB, \quad AX - XA = C, \quad AX - XB = C, \quad AX - XA^* = C, \quad A^*X - XA = C$$

formlarındaki denklemler dikkate alındı ve reel oktonyon cebiri $\mathbf{O}_{\mathbb{R}}$ de ise

$$\alpha(x\alpha) = \rho, \quad \alpha(x\beta) = \rho, \quad (\alpha x)\beta = \rho, \quad \alpha x - (\alpha x)\beta = \rho, \quad \alpha x - \alpha(x\beta) = \rho,$$

$$x\alpha - (\beta x)\alpha = \rho, \quad x\alpha - \beta(x\alpha) = \rho, \quad (\alpha x)\beta + (\gamma x)\delta = \rho, \quad \alpha(x\beta) + \gamma(x\delta) = \rho$$

formlarındaki denklemler ve

$$\begin{array}{cccccc} ax + yb = c & ax + yb = c & ax + by = c & ax + yb = c & ax + ya = c & ax + yb = c \\ xa + yb = d' & ax + by = d' & xa + by = d' & xb + yb = d' & xb + yb = d' & xa + by = d \end{array}$$

formlarındaki denklem sistemleri dikkate alındı. Kompleks kuaterniyonların ve reel oktonyonların matris temsillerini kullanarak bu denklemlerin ve sistemlerin reel temsili sistemleri oluşturuldu. Temsili sistemlere dayalı bu denklem ve sistemlerin çözülebilirlikleri araştırıldı. Bu temsili sistemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliği için gerekli ve yeterli şartlar elde edildi. Temsili sistemlerin çözümleri kapalı formlarda verildi ve buradan dikkate alınan denklem ve sistemlerin çözümlerine ulaşıldı.

2014, 132 sayfa

Anahtar Kelimeler: Kuaterniyonik denklemler; Kompleks kuaterniyonik denklemler; Oktonyonik denklemler; Reel denklem sistemleri; Oktonyonik denklem sistemleri.

ABSTRACT

INVESTIGATING OF SOME LINEAR QUATERNIONIC AND OCTONIONIC EQUATIONS AND SYSTEMS

In this thesis, the following linear complex quaternionic equations of the forms

$$AX = XA, \quad AX = XB, \quad AX - XA = C, \quad AX - XB = C, \quad AX - XA^* = C, \quad A^*X - XA = C$$

are considered over the complex quaternion algebra $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}$, and over the real octonion algebra $\mathbf{O}_{\mathbb{R}}$ the following linear real octonionic equations of the forms

$$\alpha(x\alpha) = \rho, \quad \alpha(x\beta) = \rho, \quad (\alpha x)\beta = \rho, \quad \alpha x - (\alpha x)\beta = \rho, \quad \alpha x - \alpha(x\beta) = \rho,$$

$$x\alpha - (\beta x)\alpha = \rho, \quad x\alpha - \beta(x\alpha) = \rho, \quad (\alpha x)\beta + (\gamma x)\delta = \rho, \quad \alpha(x\beta) + \gamma(x\delta) = \rho$$

and the following linear real octonionic systems of the forms

$$\begin{array}{cccccc} ax + yb = c & ax + yb = c & ax + by = c & ax + yb = c & ax + ya = c & ax + yb = c \\ xa + yb = d' & ax + by = d' & xa + by = d' & xb + yb = d' & xb + yb = d' & xa + by = d \end{array}$$

are considered. Using the real matrix representation of complex quaternions and real octonions, the real representation systems for these equations and systems are established. Based on them the solvabilities of these equations and systems are investigated. Necessary and sufficient conditions for the existence of a solution or a unique solution to these representation systems are obtained. The solutions of the real representations systems are given and therefore the solutions of the considered equations and systems are reached.

2014, 132 pages

Key Words: The quaternionic equations; The complex quaternionic equations; The octonionic equations; The system of real equations; The system of octonionic equations.

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\det A$	A matrisinin determinanı
$\ A\ $	A matrisinin normu
A^-	A matrisinin genelleştirilmiş tersi
A^{-1}	A matrisinin tersi
$ A $	A matrisinin determinanı
I	Birim matris
$\text{rank}A$	A matrisinin rankı
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbf{H}_{\mathbb{R}}$	Reel kuaterniyonlar kümesi
$\mathbf{H}_{\mathbb{C}}$	Kompleks kuaterniyonlar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbf{O}_{\mathbb{R}}$	Reel oktonyonlar kümesi
$\mathbf{O}_{\mathbb{C}}$	Kompleks oktonyonlar kümesi

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3. 1. $1, i, j, k$ kuaterniyon baz vektörlerinin geometrik gösterimi.....	14
Şekil 3. 2. Oktonyonların baz elemanlarının Cayley-Dickson.....	30

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3. 1. Cayley Dickson çarpım işlem tablosu.....	30
--	----

1. GİRİŞ

1.1. Kuaterniyon Kavramı

$\langle \mathbb{R}, +, . \rangle$ yazılımı ile hem cisim hem de $\langle \mathbb{R}, +, ., \mathbb{R} \rangle$ yazılımı ile kendisi üzerinde 1 boyutlu vektör uzay olma özelliğini taşıyan $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi, $\langle \mathbb{C}, +, . \rangle$ yazılımı ile hem cisim hem de $\langle \mathbb{C}, +, ., \mathbb{R} \rangle$ yazılımı ile $\mathbb{R}$ cismi üzerinde 2 boyutlu vektör uzay olma özelliğini taşıyan ve $i^2 = -1$ olmak üzere $\{1, i\}$ taban kümesine sahip $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$ şeklinde ifade edilen $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesine genişletilmiştir. Bu genişlemenin, matematiksel problemlerin çözümlemelerinde duyulan eksikliğin giderilmesi ve fiziksel problemlerdeki ifade güçlüğüne aşılmaya çalışıldığı bilinmektedir. Bu genişleme biçimine benzer olarak, $\langle \mathbf{H}_{\mathbb{R}}, +, . \rangle$ yazılımı ile hem aykırı cisim (değişmeli olmayan cisim) hem de $\langle \mathbf{H}_{\mathbb{R}}, +, ., \mathbb{R} \rangle$ yazılımı ile $\mathbb{R}$ cismi üzerinde 4 boyutlu vektör uzay olma özelliğini taşıyan ve

$$\begin{aligned} i^2 &= j^2 = k^2 = ijk = -1, \\ ij &= k, \quad jk = i, \quad ki = j, \\ ji &= -k, \quad kj = -i, \quad ik = -j \end{aligned}$$

olmak üzere $\{1, i, j, k\}$ taban kümesine sahip

$$\mathbf{H}_{\mathbb{R}} = \{a = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k : a_s \in \mathbb{R}, s = 0, 1, 2, 3\}$$

şeklinde ifade edilen ve reel kuaterniyonlar kümesi olarak isimlendirilen $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}$, $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ kümelerini kapsayan bir kümedir. Literatür bilgisine göre **$\mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ reel kuaterniyonlar yapısı ilk defa** 1843 yılında İrlandalı matematikçi William Rowan Hamilton tarafından tanımlanmış (Hamilton, 1844; 1853; 1866; 1899), kuaterniyonların bir skaler ile bir imajiner bileşene sahip bir vektörden oluşan elemanlar olarak düşünülmesi (Silva ve Martins, 2002), böylece skaler ve vektörlere ilişkin özelliklerin nerede ise tamamının

kuaterniyonlar için de sağlanıyor olması, kuaterniyonlar kümesinin ilginçliğini artırmakla birlikte bu özelliği ile kuaterniyonlar fiziksel niceliklerin temsilinde çok önemli rol oynamışlardır. Fiziksel problemler içerisinde, dönme ve öteleme hareketinin temsilinde, dönme hareketi ile ilişkili olan açısal yerdeğiştirme, açısal hız, açısal ivme ve momentum niceliklerinin türetilmeleri konularında kuaterniyon yapıları oldukça sık görülmüştür (Chou, 1992).

$\{1, i, j, k\}$ taban elemanlarının katsayılarının bulunduğu yapılara göre farklı kuaterniyonlar türetilmiş ve yeni yapılar içerisinde kuaterniyonlar tekrar incelenmiştir. Hamilton tarafından 1843 yılında tanımlanan reel katsayılı kuaterniyonlar, reel kuaterniyonlar olarak isimlendirilirken kompleks katsayılı kuaterniyonlar kompleks kuaterniyonlar ve dual sayı katsayılı kuaterniyonlar da dual kuaterniyonlar olarak isimlendirilmişlerdir. “*reel ve kompleks interval sayı*”, “*reel ve kompleks interval vektör*” ve “*reel ve kompleks interval matris*” kavramları da sırasıyla, “*kuaterniyon interval sayı*”, “*kuaterniyon interval vektör*” ve “*kuaterniyon interval matris*” kavramlarına genişletilmiş ve bu yeni kavramların sağlamış oldukları bazı özellikler belirlenmiştir (Bolat ve İpek, 2010).

1.2. Oktonyon Kavramı

Hem $\langle \mathbf{O}_{\mathbb{R}}, +, . \rangle$ yazılımı ile cisim aksiyomları içerisinde değişme ve birleşme özelliğini sağlamayan bir yapı hem de $\langle \mathbf{O}_{\mathbb{R}}, +, ., \mathbb{R} \rangle$ yazılımı ile $\mathbb{R}$ cismi üzerinde 8 boyutlu vektör uzay olan bir yapı olan reel oktonyonlar kümesi

$$e_0 = 1, e_1 = i, e_2 = j, e_3 = k, e_4 = e, e_5 = ie, e_6 = je, e_7 = ke$$

eşitlikleri ile tanımlı (çarpım işlemi tablosu ileriki kısımda verilecek) taban elemanlarına sahip olup, bir α reel oktonyonu, taban elemanlarının bir lineer toplamı olarak $\alpha_i \in \mathbb{R}, i = 0, \dots, 7$ için

$$\alpha = \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_5 + \alpha_6 e_6 + \alpha_7 e_7$$

biçiminde ifade edilen hiperkompleks bir sayıdır. $\mathbf{O}_{\mathbb{R}}$ reel oktonyonlar kümesi için,

$$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \subseteq \mathbf{H}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathbf{O}_{\mathbb{R}}$$

kapsama zinciri yazılabilir.

Oktonyonlarda taban elemanlarının katsayılarının bulundukları yapılara göre değişik şekillerde isimlendirilirler. Katsayıların reel olmaları durumunda reel oktonyonlar olarak isimlendirildikleri gibi, katsayıların kompleks olmaları durumunda kompleks oktonyonlar, katsayıların dual sayılar olmaları durumunda dual oktonyonlar biçiminde de isimlendirilirler. Oktonyonyon yapıları, Kuantum mekaniği (Benkart ve Perez-Izquierdo, 1999; Bremmer, 1999; Leo ve Rotelli, 1997), Kuantum Hall Olayı (Bernevig ve ark., 2003), Dalga denklemi formülasyonu (Leo ve Abdel-Khalek, 1996a; 1996b; Marques, 1988; Marques-Bonham, 1991; Marques-Bonham, 1990; Davies ve Joshi, 1986; Edmonds, 1992), Alan Teorisi (Adler, 1995; Kurdglaidze, 1986), Parçacık fiziğinde iç simetriler (Gürsey, 1996), Clifford cebiri temsilleri (Okubo, 1995; Lounesto, 1997) gibi matematiğin ve fiziğin uygulama alanlarında sıkça görülmüştür.

1.3. Kapsam ve Önem

Çoğu fiziksel durumun matematiksel modellemeleri lineer denklemleri ve sistemleri ile ifade edilebilirken, çoğu zaman da birçok matematiksel problem lineer denklem ya da sisteme indirgenmektedir. Böylece dikkate alınan problemlerin çözümlerine, problemleri temsil eden lineer denklem ya da denklem sistemleri üzerinden ulaşılmaktadır. Bu sebepten lineer denklem ya da sistemlerin incelenmeleri üzerine üretilen her bir sonuç, öneme sahip olabilmektedir. Lineer denklemlerin ya da sistemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliği üzerine elde edilen bilgiler, çözümleri bulma metodları ve çözümlerin ifade edilme şekilleri matematik ve fen bilimlerinin her alanında kullanılabilmektedir.

Problemlerin yapıları gereği modellenen problemlerin çözümlerini, farklı cebirsel yapılar (Reel sayılar kümesi ($\mathbb{R}$), Kompleks sayılar kümesi ($\mathbb{C}$), Reel kuaterniyonlar kümesi ($\mathbf{H}_{\mathbb{R}}$), Kompleks kuaterniyonlar kümesi ($\mathbf{H}_{\mathbb{C}}$), Reel oktonyonlar kümesi ($\mathbf{O}_{\mathbb{R}}$) ve Kompleks Oktonyonlar($\mathbf{O}_{\mathbb{C}}$) vb.) içerisinde arama zorunluluğu olduğu bilinmektedir. Cebirsel yapıların farklı özellikler taşımaları, bünyelerinde incelenen denklemler ve denklem sistemlerinin çözümlerine ulaşma yöntemlerinde farklılıklar oluşturmuş ve doğal olarak ulaşılan çözümlerin ifade edilme biçimleri de değişkenlik göstermiştir.

Çalışmamızda, kompleks kuaterniyon cebiri $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ de

$$AX = XA, \quad AX = XB, \quad AX - XA = C, \quad AX - XB = C, \quad AX - XA^* = C, \quad A^*X - XA = C$$

formlarındaki denklemler, reel oktonyon cebiri $\mathbf{O}_{\mathbb{R}}$ de

$$\begin{aligned} \alpha(x\alpha) &= \rho, \quad \alpha(x\beta) = \rho, \quad (\alpha x)\beta = \rho, \quad \alpha x - (\alpha x)\beta = \rho, \quad \alpha x - \alpha(x\beta) = \rho, \\ x\alpha - (\beta x)\alpha &= \rho, \quad x\alpha - \beta(x\alpha) = \rho, \quad (\alpha x)\beta + (\gamma x)\delta = \rho, \quad \alpha(x\beta) + \gamma(x\delta) = \rho \end{aligned}$$

formlarındaki denklemler ve

$$\begin{array}{cccccc} ax + yb = c & ax + yb = c & ax + by = c & ax + yb = c & ax + ya = c & ax + yb = c \\ xa + yb = d' & ax + by = d' & xa + by = d' & xb + yb = d' & xb + yb = d' & xa + by = d \end{array}$$

formlarındaki denklem sistemleri dikkate alınmakta, kompleks kuaterniyonların ve reel oktonyonların matris temsillerini kullanarak bu denklemlerin ve sistemlerin reel temsili sistemleri oluşturulmuş, temsili sistemlere dayalı dikkate alınan denklem ve sistemlerin çözülebilirlikleri araştırılmış, temsili sistemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliği için gerekli ve yeterli şartlar elde edilmiş, temsili sistemlerin çözümleri kapalı formlarda verilmiş ve buradan dikkate alınan denklem ve sistemlerin çözümlerine ulaşılmıştır.

Fen bilimlerinde kendilerine çok sık yer bulan yukarıdaki ilgili denklemlerin ve sistemlerin değişmeli cebirlerden farklı olan ve bu cebirleri kapsayan değişme ve birleşme özelliği olmayan cebirlerde incelenmelerinin, alışılmadık incelemelere gerek duymaları çalışmayı kapsamlı kılmıştır.

Lineer denklemler ve denklem sistemleri üzerine edinilen her bulgunun, fen bilimlerinde bir uygulama alanı bulunduğunu gösteren bilimsel çalışmalar; tezin fen bilimleri alanına bir katkısı olacağına da ayrıca işaret etmektedir.

Belirlenen lineer kompleks kuaterniyon denklemleri ile lineer oktonyon denklemlerinin ve sistemlerinin çözümlerinin varlığı ve tekliği ile ilgili gerek ve yeter koşullar sunabilme, çözümlerini analitik bir biçimde ifade edebilme, çözümleri sınıflandırabilme ve ifade edebilme, çözümlerin doğruluklarını somut örnekler ile bilgisayar programlarından faydalananarak kontrol etme çalışmamızın amaçlarıdır.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Literatürde; Reel kuaterniyon ($\mathbf{H}_{\mathbb{R}}$), Kompleks kuaterniyon ($\mathbf{H}_{\mathbb{C}}$), Reel oktonyon ($\mathbf{O}_{\mathbb{R}}$) ve Kompleks oktonyon ($\mathbf{O}_{\mathbb{C}}$) cebirsel yapıları içerisinde lineer denklemlerin (sistemlerin) çözümlerinin incelendiği çalışmalar oldukça fazladır. Bu bölümde, bu tez çalışmasının hazırlanmasının gerekliliğine işaret eden çalışmalardan söz edilecektir.

Johnson (1944), bir cebirsel bölüm halkası üzerinde $x\alpha = x + \beta$ formundaki denklemin çözümlerinin kümesini vermiştir.

Hung (1996), kompleks temsilleri kullanarak kuaterniyon cismi üzerinde

$$AXB - CXD = E$$

formundaki matris denkleminin tek çözümünü ve ayrıca çözümün varlığı için gerekli ve yeterli koşulları vermiştir.

Porter (1997), kuaterniyon cebiri üzerinde $ax + xb = c$ formundaki kuaterniyonik denklemin çözümlerini sınıflandırmıştır.

Zhang (1997), kuaterniyonlar ve kuaterniyon matrisleri üzerine bazı bilgiler vermiş ve ayrıca kompleks matrislerin kuaterniyonik benzerliği üzerine incelemelerde bulunmuştur.

Tian (1999a), genel reel Cayley-Dickson cebirinin yanı sıra reel kuaterniyon, oktonyon ve sedeniyon cebirlerinde elemanların benzerliği ve eşlenik benzerliği kavramlarını kullanmış ve bu cebirlerde $ax = xb$ ve $ax = \bar{x}b$ formunda iki temel denklemi incelemiş ve çözümlerini vermiştir.

Tian (1999b), reel kuaterniyonların matris temsillerini sunmuş, matris temsilleri arasında bazı eşitlikler kurmuş ve kurulan bu eşitlikler yardımı ile bazı kuaterniyonik denklemlerin çözümlerini vermiştir.

Tian (2000), oktonyonların reel matris temsillerini sunmuş, matris temsilleri arasında bazı eşitlikler kurmuş ve kurulan bu eşitlikler yardımı ile bazı oktonyonik denklemlerin çözümlerini elde etmiştir.

Grob, Trenkler ve Troschke (2001), kuaterniyonların çarpımı için matris-vektör çarpımını kullanarak iyi bir matris yaklaşımı elde etmişlerdir. Temel reel matris olarak isimlendirdikleri matrisin özelliklerini vererek bir kuaterniyonun n -inci kuvvetinin hesaplanması üzerine sonuçlar bulmuşlardır.

Flaut (2001), $ax = xb$ and $ax = \bar{x}b$ formlarındaki kuaterniyonik ve oktonyonik denklemlerin çözümlerini incelemiştir.

Wang (2005), reel kuaterniyon cebiri üzerinde

$$A_1X = C_1, A_2X = C_2, A_3XB_3 = C_3 \text{ ve } A_4XB_4 = C_4$$

matris denklemlerinin sistemini inceleyerek ve bu sistemlerin genel çözümlerinin ifadesi ve varlığı için gerekli ve yeterli koşulları vermişlerdir.

Shpakivskiy (2006), $\sum_{s=1}^N \alpha_s x \beta_s = \rho$ formundaki lineer kuaterniyonik denkleminin çözümünü elde etmiştir.

Janovska ve Opfer (2008), bazı lineer kuaterniyonik sistemler ile

$$\sum_{s=1}^N \alpha_s x \beta_s = \rho$$

formundaki genel lineer kuaterniyonik denklemini matris metoduyla çözmüşlerdir.

Wang, Yu ve Zhang (2009),

$$A_1XB_1 = C_1, A_2XB_2 = C_2$$

kuaterniyon matris denklemlerinin genel reel çözümlerinin varlığı için gerekli ve yeterli koşulları belirlemiş ve çözümlerin var olmaları durumunda çözümlerin genel ifadelerini elde etmişlerdir. Ayrıca,

$$A_1XB_1 = C_1, A_2XB_2 = C_2, A_3XB_3 = C_3$$

kuaterniyon matris denklemlerinin çözümlerinin varlığı için gerekli ve yeterli koşulları vermişlerdir.

Kyrchei (2010), bazı sağ, sol ve iki yanlı kuaterniyon matris denklemleri için sütun ve satır determinantlarının teorisi çerçevesinde Cramer kuralını elde etmiştir.

Wang (2010), kuaterniyonik matrisin reel temsiliini elde etmiş ve elde ettiği temsili matrisin bir pozitif (yarı) tanımlı kuaterniyonik matris ile ilişkilerini vermiştir. Temsili matris yardımıyla reel matris denklemlerinin ve pozitif (yarı) tanımlı kuaterniyonik matris denklemlerinin çözümleri arasındaki ilişkiyi incelemiştir.

Song ve Wang (2011), $AXB = C$ biçimindeki lineer kuaterniyon sisteminin tek çözümü için Cramer kuralı içerikli bir metot vermişlerdir.

Shpakivskyi (2011), $\alpha x \beta + \gamma x \delta = \rho$ ve $\sum_{s=1}^N \alpha_s x \beta_s = \rho$ formlarındaki bir bilinmeyenli lineer kuaterniyonik denklemleri incelemiştir.

Helmstetter (2012) ve Mierzejewski (2011), $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ de

$$ax + xb = c$$

formundaki kuaterniyonik denklemlerin çözümleri üzerine bazı sonuçlar sunmuşlardır.

Bolat ve İpek (2012), $\alpha(x\alpha) = (\alpha x)\alpha = \alpha x \alpha = \rho$, $0 \neq \alpha \in \mathbf{O}$ formundaki bir bilinmeyenli lineer oktoniyonik denklemin çözümünü matris metoduyla elde etmişlerdir.

Flaut ve Shpakivskyi (2013), kompleks kuaterniyonların sağ ve sol reel matris temsillerini incelemiştir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Materyal ve Yöntem şeklinde iki kısma ayrılan bu bölümün materyal kısmı; lineer denklem ve denklem sistemleri ile reel ve kompleks kuaterniyon cebiri ve reel oktonyon cebiri üzerine temel literatür bilgilerini içerirken, yöntem kısmı; kuaterniyonlar ve oktonyonlar cebirinde dikkate alınan denklemler ve sistemler üzerine elde edilen özgün bulguların sunulmalarını içermektedir.

3.1. MATERYAL

Bu bölüm,

- i) lineer denklem ve denklem sistemlerinin tanımları, matris-vektör formlarında ifadeleri, çözümlenebilirlikleri, çözümlerinin varlığı ve tekliği, tek olan çözümlerin ifade edilmeleri ve matrislerin genelleştirilmiş tersleri yardımı ile çözümlerin ifadeleri,
 - ii) reel ve kompleks kuaterniyonlarının tanımlanmaları, sağlamış olduğu cebirsel özelliklerin verilmeleri, reel matris temsillerinin sunulmaları, reel matris temsillerinin sağlamış olduğu cebirsel özelliklerin verilmeleri,
 - iii) reel ve kompleks oktonyonlarının tanımlanmaları, sağlamış olduğu cebirsel özelliklerin verilmeleri, reel matris temsillerinin sunulmaları, reel matris temsillerinin sağlamış olduğu cebirsel özelliklerin verilmeleri
- üzerine gerekli özet bilgiler içermektedir.

3.1.1. Linear Denklem Sistemleri

Bu kısımda, yöntem bölümünde sunulan özgün sonuçların elde edilmeleri aşamalarında lineer denklemler ve sistemler için kullanılan gerekli literatür özet bilgileri verilmiştir.

Tanım 3. 1. 1 K bir cisim, $a_i, b \in K$ elemanları verilen sabitler ve $x_1, x_2, \dots, x_n$ ler K da aranan bilinmeyenler olmak üzere

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

şeklindeki ifadeye bir lineer denklem denir (Işık, 2002).

Tanım 3. 1. 2 K bir cisim ve $b_1, b_2, b_3, \dots, b_m$, $a_{ij} \in K$ ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) belirlenen sabitler ve $x_1, x_2, \dots, x_n$ ler K da aranan bilinmeyenler olmak üzere

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

şeklinde verilen ifadeye n bilinmeyenli m denklemden oluşan bir lineer denklem sistemi denir (Bozkurt, Türen ve Solak, 2005). Bu denklem sistemi kısaca,

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad 1 \leq i \leq m$$

şeklinde de ifade edilebilir (Çallıalp ve Kuroğlu, 1996).

Tanım 3. 1. 3 (3.1) ile verilen sistemde $b = [b_1, b_2, b_3, \dots, b_m]^T$ sütun vektörü sıfır ise

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

sisteme homojen lineer denklem sistemi denir (Bozkurt, Türen ve Solak, 2005).

$M_{m,n}(K)$ daki matris çarpımı hatırlanırsa, (3.1) sistemi matris vektör formunda

$$A_{m \times n} x_{n \times 1} = b_{m \times 1}$$

olarak yazılır. (3.1) sisteminin incelenmesinde doğal olarak aşağıdaki sorular belirecektir.

- 1) Çalışılan yapı içerisinde $Ax = b$ denklem sistemini sağlayan $x_{n \times 1}$ vektörü var mıdır?
- 2) Eğer (1)'in cevabı “evet” ise, sonraki soru; “kaç tane x çözüm vektörü vardır?”
- 3) Eğer (1)'in cevabı “hayır” ise, diğer soru; “uygun bir yaklaşıklık tanımı çerçevesinde, $Ax = b$ denklem sistemini yaklaşık olarak sağlayan bir x vektörü var mıdır?”

Çözümün varlığı, çözüm sayısının belirlenmesi, bir tane olması, çözümünün olmaması ya da yakın çözümlerin elde edilmesi bilimsel problemlerin incelenmelerinde temel ilgi konularıdır. (3.1) sistemi çözümlü ise tutarlı sistem aksi halde tutarsız sistem olarak adlandırılır.

3.1.1.1. $Ax = b$ Sisteminin Çözümlerinin Varlığı

Bu bölüm, $Ax = b$ sisteminin çözümlerinin varlığı ve bu çözümlerinin varlığı ifade edilmelerine ilişkin özet bilgiler içermektedir.

n bilinmeyenli ve m denklemlili (3.1) sisteminin $A_{m \times n} x_{n \times 1} = b_{m \times 1}$ matris vektör formu dikkate alınsın. $K = \mathbb{R}$ ya da $K = \mathbb{C}$ kabul edilsin.

Teorem 3. 1. 1 $Ax = b$ şeklindeki lineer denklem sisteminde $\text{rank} A = p$ ve $\text{rank}[A : b] = q$ olsun. Bu durumda $Ax = b$ sistemi;

- 1) $p < q$ ise çözüme sahip değildir.
- 2) $p = q = n$ ise bir tek çözüme sahiptir.
- 3) $p = q$ ve $p < n$ ise $n - p$ tane parametreye bağlı sonsuz çoklukta çözüme sahiptir (Venit ve Bishop, 1985).

$m = n$ olması durumunda $A_{n \times n} x_{n \times 1} = b_{n \times 1}$ sisteminin çözümü ile A katsayılar matrisinin yapısı arasında yakın ilişki vardır.

Teorem 3. 1. 2 A n – kare matrisi için aşağıdakiler denktir:

- 1) A tersinirdir.
- 2) Herhangi bir b vektörü için $Ax = b$ bir tek çözüme sahiptir.
- 3) $Ax = 0$ yalnızca aşık ($x = 0$) çözüme sahiptir.
- 4) A 'nın satır-indirgenmiş eşelon formu I birim matrisidir (Venit ve Bishop, 1985).

Yukarıdaki temel teoremlerden görülmektedir ki $Ax = b$ denklem sisteminin çözümleri hakkında bilgi sahibi olmak farklı irdelemeleri gerektirmekte olup genelleştirilmiş terslerin kullanıldığı incelemelerde vardır. Bu teori verilmeden önce, uygulamalı bilimlerin hemen hepsinde ortaya çıkan reel matrislerin genelleştirilmiş tersleri ile ilgili tanım ve bazı özellikler verilecektir.

3.1.1.2. Genelleştirilmiş Tersler ile $Ax = b$ Sisteminin İncelenmesi

Tanım 3. 1. 4 $m \times n$ tipinde reel A matrisi için aşağıdaki koşulları sağlayan bir A^- matrisi varsa, A^- 'ye A 'nın genelleştirilmiş (Moore-Penrose) tersi, yani g -tersi denir.

- (G1) AA^- ve A^-A simetriktir.
- (G2) $AA^-A = A$ dır.
- (G3) $A^-AA^- = A^-$ dır (Graybill, 1983).

Teorem 3. 1. 3 A matrisi $m \times n$ tipinde herhangi bir matris olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler mevcuttur (Graybill, 1983):

- i) A matrisinin g -tersi $n \times m$ tipindedir.
- ii) A matrisi sıfır matrisi ise g -tersi $n \times m$ tipinde sıfır matrisidir.

- iii) Her A matrisi bir g -tersine sahiptir.
- iv) Her A matrisi için bir tek g -ters vardır.
- v) $(A^T)^- = (A^-)^T$ dir.
- vi) $(A^-)^- = A$ dir.
- vii) $(A^T A)^- = A^- (A^T)^-$ dir.
- viii) $(AA^-)^- = AA^-$ ve $(A^- A)^- = A^- A$ dir.
- ix) A simetrik ise A^- de simetriktir.
- x) $A^T = A$ ise $AA^- = A^- A$ dir.
- xi) A matrisi non-singüler ise $A^{-1} = A^-$ dir.

Aşağıdaki teorem $Ax = b$ sisteminin çözümü için genelleştirilmiş tersler ile ilgili teoremin temelini oluşturur.

Teorem 3. 1. 4 $Ax = b$ sisteminin tutarlı olması için gerekli ve yeterli koşul $AA^-b = b$ olmasıdır (Graybill, 1983).

Aşağıdaki teoremden $Ax = b$ denklem sisteminin en az bir çözüme sahip olduğu kabul edilerek çözümlerin sayısı ve genel çözümün biçimi verilmektedir. Ayrıca teorem, sistemin tüm çözümlerini verdiği için dolayı lineer denklem sistemleri teorisinde oldukça kullanışlıdır.

Teorem 3. 1. 5 Herhangi bir $h_{n \times 1}$ parametreler vektörü için çözümlü olan $A_{m \times n} x_{n \times 1} = b_{m \times 1}$ sisteminin tüm çözümleri

$$x = A^-b + (I - A^-A)h \quad (3.2)$$

formunda sonsuz çokluktadırlar (Rao ve Mitra, 1971).

Sonuç 3. 1. 1. $Ax = b$ sistemi tutarlı olsun. Bu durumda, $x = A^-b$ 'nin tek çözüm olması için gerekli ve yeterli koşul $A^-A = I$ olmasıdır.

Sonuç 3. 1. 2. $Ax = b$ sistemi tutarlı olsun. Bu durumda, sistemin tek bir çözümünün olması için gerekli ve yeterli koşul A 'nın rankının n olmasıdır.

3.1.2. Reel Kuaterniyonlar Cebiri

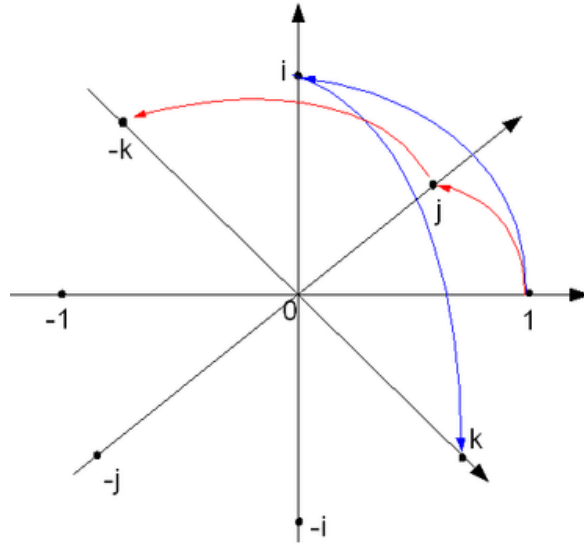
Bu bölüm, reel kuaterniyonlar cebiri hakkında bazı özet bilgiler içermektedir.

Tanım 3. 1. 5 $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ ve $1, i, j, k$ taban elemanları

$$\left. \begin{aligned} i^2 &= j^2 = k^2 = ijk = -1, \\ ij &= k, jk = i, ki = j, \\ ji &= -k, kj = -i, ik = -j \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

çarpım kurallarına sahip olmak üzere $a = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$ formundaki sayılara *reel katsayılı kuaterniyonlar* veya *reel kuaterniyonlar* denir.

(3.3) ile verilen çarpım kuralları, 3- boyutlu kartezyen koordinat sisteminin baz vektörleri kullanılarak geometrik olarak Şekil 3. 1 de verilmektedir.



Şekil 3. 1. $1, i, j, k$ kuaterniyon baz vektörlerinin geometrik gösterimi

Geometrik olarak 3-boyutlu Euclidean uzay E^3 ile gösterilirken bu uzayın standart taban vektörleri i, j ve k ile gösterilirler. E^3 'e izomorf olan 3-boyutlu $\mathbb{R}^3$ uzayının standart taban vektörleri e_1, e_2 ve e_3 ile gösterilirler. Benzer olarak $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ 4-boyutlu reel kuaterniyonlar uzayının standart taban vektörlerinin geometriksel bakış açısıyla

gösterimleri $1, i, j$ ve k olup cebirsel bakış açısıyla gösterimleri ise e_0, e_1, e_2 ve e_3 tür.

Böylece, $1 \cong e_0, i \cong e_1, j \cong e_2$ ve $k \cong e_3$ gösterimsel denklikleri yazılabilir.

Reel kuaterniyonlar kümesi

$$\mathbf{H}_{\mathbb{R}} = \{a = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k : a_s \in \mathbb{R}, s = 0, 1, 2, 3\}$$

ile tanımlanır.

$a = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$ olmak üzere a kuaterniyonunun reel kısmı $\text{Re } a = a_0$ ve imajiner kısmı $\text{Im } a = a_1i + a_2j + a_3k$ dır. Bu tanımlara göre;

$$\text{i)} \quad a = \text{Re } a + \text{Im } a, \quad (3.4)$$

$$\text{ii)} \quad (\text{Im } a)^2 = -|\text{Im } a|^2, \quad (3.5)$$

$$\text{iii)} \quad a^2 - 2(\text{Re } a)a + |a|^2 = 0 \quad (3.6)$$

bağıntıları geçerlidir (Zhang, 1997).

Tanım 3. 1. 6 $a \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ kuaterniyonu için;

- i) $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$ ise a sıfır kuaterniyon olarak isimlendirilir.
- ii) $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ ise $a = \text{Re } a = a_0$ skaler kuaterniyon olarak isimlendirilir.
- iii) $a_0 = 0$ ve a_1, a_2, a_3 lerden en az biri sıfır değilse $a = a_1i + a_2j + a_3k$ kuaterniyonuna vektör kuaterniyon denir.

İlerleyen kısımlarda aksi belirtilmedikçe $a, b \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ kuaterniyonları

$$a = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k \text{ ve } b = b_0 + b_1i + b_2j + b_3k$$

şeklinde kabul edilecektir.

Tanım 3. 1. 7 (İki kuaterniyonun eşitliği) $a, b \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ kuaterniyonları için,

$$a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$$

ise a, b kuaterniyonlarına *eşit kuaterniyonlar* denir.

Tanım 3. 1. 8 (İki kuaterniyonun toplamı ve farkı) $a, b \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ kuaterniyonlarının toplamı ve farkı,

$$a \pm b = (a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1)i + (a_2 \pm b_2)j + (a_3 \pm b_3)k$$

ile tanımlanır.

Tanım 3. 1. 9 (İki kuaterniyonun çarpımı) $a, b \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ kuaterniyonlarının çarpımı,

$$\begin{aligned} a.b = & (a_0b_0 - a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3) + (a_1b_0 + a_0b_1 - a_3b_2 + a_2b_3)i \\ & + (a_2b_0 + a_3b_1 + a_0b_2 - a_1b_3)j + (a_3b_0 - a_2b_1 + a_1b_2 + a_0b_3)k \end{aligned} \quad (3.7)$$

dir. $u = a_1i + a_2j + a_3k$ ve $v = b_1i + b_2j + b_3k$ E^3 de (3-boyutlu Euclidean uzayında) vektörler olmak üzere, $a.b$ çarpımı ayrıca

$$ab = a_0b_0 - u \cdot v + a_0v + b_0u + u \times v$$

şeklinde de tanımlanır.

Reel kuaterniyonların toplamı ve çarpımı işlemleri aşağıda verilen özelliklere sahiptirler.

- i) İki reel kuaterniyonun toplamı ve çarpımı bir reel kuaterniyondur.
- ii) Reel kuaterniyon toplamı ve çarpımı bileşimlidir.
- iii) Reel kuaterniyon çarpımı, toplama üzerine sağdan ve soldan dağılımlıdır.
- iv) Reel kuaterniyon çarpımı değişmeli değildir. Yani; her $a, b \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ için $ab = ba$ olması gerekmez.

Tanım 3. 1. 10 (Bir kuaterniyonun bir skaler ile çarpımı) $a \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ kuaterniyonunun bir $k \in \mathbb{R}$ skaleri ile çarpımı,

$$k.a = ka_0 + (ka_1)i + (ka_2)j + (ka_3)k \quad (3.8)$$

ile tanımlanır.

Tanım 3. 1. 11 (İki kuaterniyonun skaler çarpımı) $a, b \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ kuaterniyonlarının skaler çarpımı,

$$\langle a, b \rangle = \sum_{m=0}^3 a_m b_m \quad (3.9)$$

ile tanımlanır.

Tanım 3. 1. 12 (Bir kuaterniyonun eşleniği) $a \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ kuaterniyonunun eşleniği,

$$\bar{a} = a_0 - a_1 i - a_2 j - a_3 k \quad (3.10)$$

ile tanımlanır.

Önerme 3. 1. 1 $a, b \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ kuaterniyonları ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için;

- i) $a + \bar{a} = 2 \operatorname{Re}(a) = 2a_0, \quad a - \bar{a} = 2 \operatorname{Im}(a),$
- ii) $\overline{ab} = \bar{b}\bar{a},$
- iii) $\overline{(\bar{a})} = a,$
- iv) $\overline{(\bar{a}b)} = \bar{b}a,$
- v) $\overline{(\alpha a + \beta b)} = \alpha \bar{a} + \beta \bar{b}$

eşitlikleri geçerlidir (Zhang, 1997).

$a^* \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ reel kuaterniyonu $a^* = a_0 + a_1 i - a_2 j - a_3 k$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda aşağıdaki önerme verilir.

Önerme 3. 1. 2 $a, b, x \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ kuaterniyonları için;

- i) $(a^*)^* = a,$
- ii) $(xa)^* = x^* a^*,$
- iii) $(a+b)^* = a^* + b^*,$
- iv) $a^* i = i a, \quad a i = i a^* \quad \text{ve} \quad -a^* = i a i$

eşitlikleri mevcuttur (Flaut ve Shpakivskyi, 2012).

Tanım 3. 1. 13 (İki kuaterniyonun benzerliği) $a, b \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ kuaterniyonları için,

$$a \sim b \Leftrightarrow a_0 = b_0 \text{ ve } a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 \quad (3.11)$$

ya da

$$a \sim b \Leftrightarrow \text{Re}(a) = \text{Re}(b) \text{ ve } |\text{Im } a| = |\text{Im } b| \quad (3.12)$$

ise a, b kuaterniyonları benzerdir denir (AuYeung, 1984; Brenner, 1951).

Tanım 3. 1. 14 (Bir kuaterniyonun normu) $a \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ kuaterniyonunun normu,

$$\|a\| = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \quad (3.13)$$

ile tanımlanır.

Tanım 3. 1. 15 (Birim reel kuaterniyon) $\|a\| = 1$ olan $a \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ kuaterniyonuna birim reel kuaterniyon denir.

Önerme 3. 1. 3 $a, b \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ kuaterniyonlarının çarpımlarının normu,

$$\|ab\| = \|a\|\|b\| \quad (3.14)$$

şeklindedir.

Önerme 3. 1. 4 $a, b \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ kuaterniyonları için,

$$\text{Re}(ab) = \text{Re}(ba) \quad (3.15)$$

şeklindedir.

Tanım 3. 1. 16 (Bir kuaterniyonun çarpımsal tersi) $0 \neq a \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ kuaterniyonunun çarpımsal tersi, $a^{-1} \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$,

$$a^{-1} = \frac{\bar{a}}{\|a\|^2} \quad (3.16)$$

ile tanımlanır.

Önerme 3. 1. 5 $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ ve $a_1, a_2, \dots, a_n \neq 0$ olmak üzere bunların çarpımlarının çarpımsal tersi,

$$(a_1 a_2 \dots a_n)^{-1} = a_n^{-1} \dots a_2^{-1} a_1^{-1}$$

şeklindedir.

Önerme 3. 1. 6 Sıfırdan farklı c, d skaler kuaterniyonları ve p, q sıfırdan farklı vektör kuaterniyonları için aşağıdaki bağıntılar geçerlidir:

$$\text{i)} \quad cd^{-1} = d^{-1}c = \frac{c_0}{d_0},$$

$$\text{ii)} \quad c^{-1}p = pc^{-1} = \frac{p_1}{c_0}e_1 + \frac{p_2}{c_0}e_2 + \frac{p_3}{c_0}e_3,$$

$$\text{iii)} \quad cp^{-1} = p^{-1}c = \frac{c_0}{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}(-p_1e_1 - p_2e_2 - p_3e_3).$$

Tanım 3. 1. 17 $q \neq 0$ olmak üzere $p, q \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ kuaterniyonları için pq^{-1} kuaterniyonuna p 'nin q ile soldan bölünmesi ve $q^{-1}p$ kuaterniyonuna p 'nin q ile sağdan bölünmesi denir.

pq^{-1} veya $q^{-1}p$ kuaterniyonunun normu, p 'nin normunun q 'nin normuna bölümüne eşittir:

$$\|pq^{-1}\| = \|q^{-1}p\| = \frac{\|p\|}{\|q\|}.$$

Tanım 3. 1. 18 $a \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ kuaterniyonunun vektör temsili,

$$\vec{a} = \text{vec}(a) = [a_0, a_1, a_2, a_3]^T \quad (3.17)$$

ile tanımlanır.

Böylece, $a \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ kuaterniyonunun eşleniğinin $(\bar{a} = a_0 e_0 - a_1 e_1 - a_2 e_2 - a_3 e_3)$ vektör temsili de

$$\vec{\bar{a}} = \text{vec}(\bar{a}) = [a_0, -a_1, -a_2, -a_3]^T \quad (3.18)$$

şeklinde ifade edilir.

3.1.2.1. Bir Reel Kuaterniyonun Sağ ve Sol Matris Temsilleri

Tanım 3. 1. 19 $a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ kuaterniyonunun sağ matris temsili

$$\phi(a) = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

şeklinde 4×4 tipindeki reel matristir (Tian, 1999b).

$\phi(a)$ matrisinin $c_{\phi(a)}^1$ birinci sütunu, a 'nın vektörel temsili olup $\vec{a} = c_{\phi(a)}^1$ dır.

Önerme 3. 1. 7 $a, x \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ verilsin. Bu durumda,

$$\overrightarrow{ax} = \phi(a)\vec{x} \quad (3.20)$$

şeklindedir (Tian, 1999b).

Tanım 3. 1. 20 $a = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ kuaterniyonunun sol matris temsili

$$\tau(a) = \begin{pmatrix} a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ a_1 & a_0 & a_3 & -a_2 \\ a_2 & -a_3 & a_0 & a_1 \\ a_3 & a_2 & -a_1 & a_0 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

şeklinde 4×4 tipindeki reel matristir (Tian, 1999b).

$\tau(a)$ matrisinin $c_{\tau(a)}^1$ birinci sütunu, a 'nın vektörel temsili olup $\vec{a} = c_{\tau(a)}^1$ dır.

Önerme 3. 1. 8 $a, x \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ verilsin. Bu durumda,

$$\overrightarrow{xa} = \tau(a)\vec{x} \quad (3.22)$$

şeklindedir (Tian, 1999b).

Aşağıdaki önerme reel kuaterniyonların sağ ve sol matris temsillerinin bazı temel özelliklerini sunmaktadır.

Önerme 3. 1. 9 $x, y \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ ve $r \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda, aşağıdaki bağıntılar mevcuttur:

- i) $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y),$
- ii) $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y),$
- iii) $\phi(rx) = r\phi(x),$
- iv) $\phi(\bar{x}) = \phi^T(x),$
- v) $\phi(1) = I_4,$
- vi) $\tau(x + y) = \tau(x) + \tau(y),$
- vii) $\tau(xy) = \tau(y)\tau(x),$
- viii) $\tau(rx) = r\tau(x),$
- ix) $\tau(\bar{x}) = \tau^T(x),$
- x) $\tau(1) = I_4,$
- xi) $x \neq 0$ için $\phi(x^{-1}) = (\phi(x))^{-1}, \tau(x^{-1}) = (\tau(x))^{-1}$ (Tian, 1999b).

Önerme 3. 1. 10 $a, b, x \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ için aşağıdaki bağıntılar mevcuttur:

- i) $\overrightarrow{ax} = \phi(a)\vec{x},$
- ii) $\overrightarrow{xb} = \tau(b)\vec{x},$
- iii) $\overrightarrow{axb} = \phi(a)\tau(b)\vec{x} = \tau(b)\phi(a)\vec{x},$

$$\text{iv)} \quad \tau(b)\phi(a) = \phi(a)\tau(b),$$

$$\text{v)} \quad \det(\phi(x)) = \det(\tau(x)) = \|x\|^4 \quad (\text{Tian, 1999b}).$$

Lemma 3. 1. 1 $a = a_0 + a_1i + a_2j + a_3k$, $b = b_0 + b_1i + b_2j + b_3k \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ kuaterniyonları verilsin.

$\theta(a, b) = \phi(a) - \tau(b)$ ise bu durumda;

$$\text{i)} \quad s = a_0 - b_0 \text{ olmak üzere } \theta(a, b) \text{ 'nin determinanı},$$

$$\begin{aligned} |\theta(a, b)| &= \left[s^2 + (|\operatorname{Im} a| - |\operatorname{Im} b|)^2 \right] \left[s^2 + (|\operatorname{Im} a| + |\operatorname{Im} b|)^2 \right] \\ &= s^4 + 2s^2 \left[(|\operatorname{Im} a|^2 + |\operatorname{Im} b|^2) \right] + (|\operatorname{Im} a|^2 - |\operatorname{Im} b|^2)^2 \end{aligned} \quad (3.23)$$

şeklindedir.

$$\text{ii)} \quad \theta(a, b) \text{ bir normal matristir ve}$$

$$\lambda = (a_0 - b_0) \pm i \|\operatorname{Im} a \pm \operatorname{Im} b\| \quad (3.24)$$

şeklinde dört özdeğere sahiptir.

$$\text{iii)} \quad \text{Eğer } a_0 \neq b_0 \text{ ya da } |\operatorname{Im} a| \neq |\operatorname{Im} b| \text{ ise o taktirde } \theta(a, b) \text{ tekil değildir ve tersi,}$$

$$\begin{aligned} \theta^{-1}(a, b) &= \phi^{-1} \left(a^2 - 2b_0a + |b|^2 \right) (\phi(a) - \tau(\bar{b})) \\ &= \phi^{-1} \left(2(a_0 - b_0)a + |b|^2 - |a|^2 \right) (\phi(a) - \tau(\bar{b})) \end{aligned} \quad (3.25)$$

ya da

$$\begin{aligned} \theta^{-1}(a, b) &= \tau^{-1} \left(b^2 - 2a_0b + |a|^2 \right) (\phi(\bar{a}) - \tau(b)) \\ &= \tau^{-1} \left(2(b_0 - a_0)b + |a|^2 - |b|^2 \right) (\phi(\bar{a}) - \tau(b)) \end{aligned} \quad (3.26)$$

şeklindedir.

$$\text{iv)} \quad \text{Eğer } a_0 = b_0 \text{ ve } |\operatorname{Im} a| = |\operatorname{Im} b| \text{ ise o taktirde } \theta(a, b) \text{ tekildir ve}$$

$$\theta^{-}(a, b) = -\frac{1}{4|\operatorname{Im} a|^2} \theta(a, b) = \frac{1}{4|\operatorname{Im} a|^2} [\tau(\operatorname{Im} b) - \phi(\operatorname{Im} a)] \quad (3.27)$$

şeklinde genelleştirilmiş terse sahiptir (Tian, 1999b).

Teorem 3. 1. 6 $a \notin \mathbb{R}$ olmak üzere $a \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ kuaterniyonu için,

$$ax = xa \quad (3.28)$$

lineer kuaterniyonik denkleminin genel çözümü keyfi $p \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ kuaterniyonuna göre

$$x = p - \frac{1}{|\operatorname{Im} a|^2} (\operatorname{Im} a) p (\operatorname{Im} a) \quad (3.29)$$

şeklinde ya da keyfi $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$ reel sayıları için,

$$x = \lambda_0 + \lambda_1 a$$

şeklindedir (Tian, 1999a; 1999b).

Teorem 3. 1. 7 $a, b \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ olsun. Bu durumda,

i) $ax = xb$ lineer denkleminin sıfırdan farklı bir çözüme de sahip olması için gerek ve yeter şart

$$\operatorname{Re} a = \operatorname{Re} b \text{ ve } |\operatorname{Im} a| = |\operatorname{Im} b| \quad (3.30)$$

olmasıdır.

ii) Sıfırdan farklı bir çözüme sahip olan $ax = xb$ lineer denkleminin genel çözümü,

$$x = p - \frac{1}{|\operatorname{Im} a| |\operatorname{Im} b|} (\operatorname{Im} a) p (\operatorname{Im} b), (p \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}} \text{ keyfi kuaterniyon}) \quad (3.31)$$

dir. Özellikle de eğer $b \neq \bar{a}$ olması durumunda yani $\operatorname{Im} a + \operatorname{Im} b \neq 0$ ise, bu durumda $ax = xb$ nin genel çözümü,

$$x = \lambda_1 (\operatorname{Im} a + \operatorname{Im} b) + \lambda_2 [|\operatorname{Im} a| |\operatorname{Im} b| - (\operatorname{Im} a)(\operatorname{Im} b)], (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R})$$

şeklindedir (Tian, 1999a; 1999b).

Teorem 3. 1. 8 $a, b \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ kuaterniyonları için $a \sim b$ ($\operatorname{Re} a = \operatorname{Re} b$ ve $|\operatorname{Im} a| = |\operatorname{Im} b|$) olsun.

Bu durumda,

$$ax - xb = c \quad (3.32)$$

denkleminin bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart

$$ac = c\bar{b} \quad (3.33)$$

olmasıdır. Bir çözüme sahip olan $ax - xb = c$ denkleminin genel çözümü $p \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ keyfi kuaterniyonu için,

$$x = \frac{1}{4|\operatorname{Im} a|^2}(cb - ac) + p - \frac{1}{|\operatorname{Im} a|^2}(\operatorname{Im} a)p(\operatorname{Im} b) \quad (3.34)$$

şeklindedir (Tian, 1999b).

Teorem 3. 1. 9 $a, b \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ kuaterniyonları için $\operatorname{Re} a \neq \operatorname{Re} b$ ya da $|\operatorname{Im} a| \neq |\operatorname{Im} b|$ (a b 'ye benzer değil) olsun. Bu durumda,

$$ax - xb = c \quad (3.35)$$

lineer kuaterniyonik denklemi, $s = \operatorname{Re} a - \operatorname{Re} b$ olmak üzere

$$x = \left(2sa - |a|^2 + |b|^2\right)^{-1} (ac - c\bar{b}) = (cb - \bar{a}c) \left(2sb - |a|^2 + |b|^2\right)^{-1} \quad (3.36)$$

şeklinde bir tek çözüme sahiptir (Tian, 1999b).

3.1.3. Kompleks Kuaterniyonlar Cebiri

Bu bölüm, kompleks kuaterniyonlar cebiri hakkında bazı özet bilgiler içermektedir.

Tanım 3. 1. 21 $q = q_0e_0 + q_1e_1 + q_2e_2 + q_3e_3$, $r = r_0e_0 + r_1e_1 + r_2e_2 + r_3e_3 \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ reel kuaterniyonları için,

$$Q = q + ir, i = \sqrt{-1} \quad (3.37)$$

formundaki bir kuaterniyona *kompleks kuaterniyon* denir.

(3.37)'de verilen Q kompleks kuaterniyonunu daha açık bir ifade ile

$$\begin{aligned} Q &= q_0 e_0 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3 + i(r_0 e_0 + r_1 e_1 + r_2 e_2 + r_3 e_3) \\ &= (q_0 + ir_0) e_0 + (q_1 + ir_1) e_1 + (q_2 + ir_2) e_2 + (q_3 + ir_3) e_3 \\ &= Q_0 e_0 + Q_1 e_1 + Q_2 e_2 + Q_3 e_3 \end{aligned}$$

şeklinde yazmak da mümkündür. Tanım 3. 1. 21'nin bir başka versiyonu Tanım 3. 1. 22 dir (Demir, 2003).

Tanım 3. 1. 22 $Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{C}$ skalerleri için, $Q = Q_0 e_0 + Q_1 e_1 + Q_2 e_2 + Q_3 e_3$ şeklindeki sayılara *kompleks kuaterniyonlar* denir.

Kompleks kuaterniyonlar kümesi ise $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ ile gösterilir. Reel ve kompleks kuaterniyonların cebirsel yapıları benzerlik göstermektedir. Bir kompleks kuaterniyonu aynı reel kuaterniyonlarda olduğu gibi skaler ve vektörel terimler cinsinden de ifade etmek mümkündür (Demir, 2003).

Çalışma boyunca Q ve P kuaterniyonları aksi belirtilmedikçe $Q = Q_0 e_0 + Q_1 e_1 + Q_2 e_2 + Q_3 e_3$, $P = P_0 e_0 + P_1 e_1 + P_2 e_2 + P_3 e_3 \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ şeklinde olacaktır. Q kompleks kuaterniyonun skaler kısmına $S_Q = Q_0 e_0$ ve vektörel kısmına $V_Q = Q_1 e_1 + Q_2 e_2 + Q_3 e_3$ denilirse,

$$Q = S_Q + V_Q$$

şeklinde yazılır.

Tanım 3. 1. 23 $Q = q + ir \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ kuaterniyonunun vektörel temsili $M_{8 \times 1}(\mathbb{R})$ de

$$\vec{Q} = (\vec{q}, \vec{r})^t \quad (3.38)$$

şeklindeki bir vektördür.

Tanım 3. 1. 24 (İki kompleks kuaterniyonun çarpımı) $P = p + ip'$, $Q = q + iq' \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ kompleks kuaterniyonlarının çarpımı,

$$PQ = pq - (p')^* q' + i(p^* q' + p' q) \quad (3.39)$$

ile tanımlanır (Flaut ve Shpakivskyi , 2012).

Tanım 3. 1. 25 (Bir kompleks kuaterniyonun eşleniği) Q kompleks kuaterniyonunun eşleniği,

$$\bar{Q} = S_Q - V_Q = Q_0 e_0 - Q_1 e_1 - Q_2 e_2 - Q_3 e_3 \quad (3.40)$$

ile tanımlanır.

Önerme 3. 1. 11 P ve Q kompleks kuaterniyonlarının çarpımlarının eşleniği,

$$\overline{(PQ)} = \bar{Q}\bar{P} \quad (3.41)$$

şeklindedir.

Tanım 3. 1. 26 (Bir kompleks kuaterniyonun kompleks eşleniği) Q_s^c , $s = 0, 1, 2, 3$; $Q_s \in \mathbb{C}$, $s = 0, 1, 2, 3$; kompleks sayıların eşlenikleri olmak üzere Q kompleks kuaterniyonunun kompleks eşleniği,

$$Q^c = Q_0^c + Q_1^c i + Q_2^c j + Q_3^c k \quad (3.42)$$

ile tanımlanır.

Tanım 3. 1. 27 (Bir kompleks kuaterniyonun normu) Q kompleks kuaterniyonunun normu,

$$\|Q\| = \sqrt{Q\bar{Q}} = \sqrt{Q_0^2 + Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2} \quad (3.43)$$

şeklinde tanımlanır.

Önerme 3. 1. 12 P, Q kompleks kuaterniyonlarının çarpımlarının normu,

$$\|PQ\| = \|Q\|\|P\| = \|P\|\|Q\| \quad (3.44)$$

şeklindedir.

Tanım 3. 1. 28 (Bir kompleks kuaterniyonun çarpımsal tersi) $0 \neq Q \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ kompleks kuaterniyonunun çarpımsal tersi,

$$Q^{-1} = \frac{\overline{Q}}{\|Q\|^2} \quad (3.45)$$

ile tanımlanır.

Kompleks kuaterniyonların vektör ve matris temsilleri reel kuaterniyonların vektör ve matris temsillerine benzer olarak tanımlanmıştır.

3.1.3.1. Bir Kompleks Kuaterniyonun Sağ ve Sol Matris Temsilleri

Tanım 3. 1. 29 $a = a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3, b = b_0 e_0 + b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ reel kuaterniyonları için $i^2 = -1$ olmak üzere $Q = a + ib \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ kompleks kuaterniyonunun sağ matris temsili,

$$\Theta(Q) = \begin{pmatrix} \tau(a) & -\tau(b) \\ \tau(b^*) & \tau(a^*) \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

şeklinde 8×8 tipinde bir reel matristir (Flaut ve Shpakivskyi, 2012).

Önerme 3. 1. 13 $X, A \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}, X = x + iy, x, y \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ olsun. Bu durumda,

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

reel matrisi için

$$\overrightarrow{XA} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \alpha \end{pmatrix} \Theta(A) \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \alpha \end{pmatrix} \overrightarrow{X} \quad (3.48)$$

şeklindedir (Flaut ve Shpakivskyi, 2012).

Çalışmamızda aksi belirtilmedikçe α , (3.47) de verilen matris olacaktır.

Tanım 3. 1. 30 $a = a_0e_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3$, $b = b_0e_0 + b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ reel kuaterniyonları için $i^2 = -1$ olmak üzere $Q = a + ib \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ kompleks kuaterniyonunun sol matris temsili,

$$\Gamma(Q) = \begin{pmatrix} \phi(a) & -\phi(b^*) \\ \phi(b) & \phi(a^*) \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

şeklinde 8×8 tipinde bir reel matristir (Flaut ve Shpakivskyi, 2012).

Önerme 3. 1. 14 $X, A \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}$, $X = x + iy$, $A = a + ib$ ve $x, y, a, b \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ olsun. Bu durumda,

$$\overrightarrow{AX} = \Gamma(A) \overrightarrow{X} \quad (3.50)$$

şeklindedir (Flaut ve Shpakivskyi, 2012).

Önerme 3. 1. 15 $X, A \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}$, $X = x + iy$, $A = a + ib$ ve $x, y, a, b \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ olsun. Bu durumda,

$$\Gamma(XA) = \Gamma(X) \Gamma(A) \quad (3.51)$$

şeklindedir (Flaut ve Shpakivskyi, 2012).

Önerme 3. 1. 16 $X, A \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}$, $X = x + iy$, $A = a + ib$ ve $x, y, a, b \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ olsun. Bu durumda,

$$\Theta(XA) = \Theta(A) \Theta(X) \quad (3.52)$$

şeklindedir (Flaut ve Shpakivskyi, 2012).

Önerme 3. 1. 17 $X = x + iy \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ ve $x, y \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ olsun. Bu durumda $\mathbf{1} = \mathbf{I}_4 \in \mathbf{M}_4(\mathbb{R})$ ve $\mathbf{0} = \mathbf{O}_4 \in \mathbf{M}_4(\mathbb{R})$ olmak üzere aşağıdaki özellikler mevcuttur:

i) $\overrightarrow{X} = \Gamma(X) \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ ya da $\overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \alpha \end{pmatrix} \Theta(X) \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ biçimindedir.

ii) $\alpha \overrightarrow{y^*} = \overrightarrow{y}$.

iii) $\alpha^2 = \mathbf{I}_4$ (Flaut ve Shpakivskyi, 2012).

Önerme 3. 1. 18 $A, B \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ kompleks kuaterniyonları verilsin. Bu durumda,

$$\Gamma(A) \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \alpha \end{pmatrix} \Theta(B) \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \alpha \end{pmatrix} \Theta(B) \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \alpha \end{pmatrix} \Gamma(A) \quad (3.53)$$

olup $\Psi(B) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \alpha \end{pmatrix} \Theta(B) \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \alpha \end{pmatrix}$ için,

$$\overrightarrow{AXB} = \Gamma(A) \Psi(B) \overrightarrow{X} \quad (3.54)$$

şeklindedir (Flaut ve Shpakivskyi, 2012).

Teorem 3. 1. 10

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_4(\mathbb{R})$$

olmak üzere $M_1 = \begin{pmatrix} -A_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} -A_2 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_8(\mathbb{R})$ için,

$$\Gamma'(X) = M_1 \Theta(X) M_2$$

şeklindedir (Flaut ve Shpakivskyi, 2012).

Önerme 3. 1. 19 $Q = a + ib \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ ve $a, b \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ olsun. Bu durumda,

$$\det \Gamma(Q) = \det \Theta(Q) = \|aa^* + b^*b\|^2 = \|a^*a + b^*b\|^2$$

ifadesi ile verilir (Flaut ve Shpakivskyi, 2012).

3.1.4. Reel Oktonyonlar Cebiri

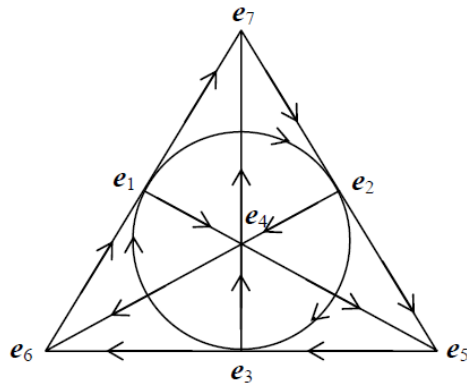
Bu bölüm, reel oktonyon cebiri ile ilgili bazı özet bilgiler içermektedir.

Tanım 3. 1. 31 $e_0 = 1, e_1 = i, e_2 = j, e_3 = k, e_4 = e, e_5 = ie, e_6 = je, e_7 = ke$ tanımlamaları üzerine Cayley-Dickson çarpımı işlem tablosu Çizelge 3. 1 de verilmiştir.

Çizelge 3. 1. Cayley Dickson çarpım işlem tablosu

$\times$	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
1	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_4	e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	-1	e_1	e_2	e_3
e_5	e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	-1	$-e_3$	e_2
e_6	e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	-1	$-e_1$
e_7	e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	-1

Bu çarpım tablosunun geometrik diyagramı ise Şekil 3. 2 de verilmiştir.



Şekil 3. 2. Oktonyonların baz elemanlarının Cayley-Dickson yöntemine göre çarpım diyagramı

Cayley Dickson çarpımı işlem tablosuna göre $\alpha_i \in \mathbb{R}, i = 0, \dots, 7$ için bir α gerçel oktonyonu

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_5 + \alpha_6 e_6 + \alpha_7 e_7 \\ &= \sum_{i=0}^7 \alpha_i e_i\end{aligned}\tag{3.55}$$

şeklinde tanımlanır. Gerçel oktonyonların kümesi $\mathbf{O}_{\mathbb{R}}$ veya kısaca $\mathbf{O}$ biçiminde gösterilir.

$\vec{\alpha} = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_5 + \alpha_6 e_6 + \alpha_7 e_7$ vektörel tanımlaması üzerine α oktonyonu $\alpha = \alpha_0 e_0 + \vec{\alpha}$ biçimindedir. $\mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ reel kuaterniyon bölüm cebirinden alınan herhangi $\alpha', \alpha'' \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ kuaterniyonları için her $\alpha \in \mathbf{O}_{\mathbb{R}}$ oktonyonu Cayley Dickson yöntemi ile

$$\alpha = \alpha' + \alpha'' e\tag{3.56}$$

şeklinde de yazılabilir.

Tanım 3. 1. 32 $x = \sum_{i=0}^7 x_i e_i \in \mathbf{O}$ olmak üzere x oktonyonunun vektör temsili,

$$\vec{x} = [x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7]^T\tag{3.57}$$

ile verilir.

Çalışmamızda aksi belirtilmedikçe $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}, k = 0, \dots, 7$, gerçel sayıları için $\alpha, \beta \in \mathbf{O}$ oktonyonları

$$\alpha = \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_5 + \alpha_6 e_6 + \alpha_7 e_7$$

ve

$$\beta = \beta_0 e_0 + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 + \beta_4 e_4 + \beta_5 e_5 + \beta_6 e_6 + \beta_7 e_7$$

şeklinde tanımlı olacaktır.

Tanım 3. 1. 33 (İki reel oktonyonun toplamı ve farkı) $\alpha, \beta \in \mathbf{O}$ oktonyonlarının toplamı ve farkı,

$$\begin{aligned}\alpha \pm \beta &= (\alpha_0 \pm \beta_0)e_0 + (\alpha_1 \pm \beta_1)e_1 + \dots + (\alpha_7 \pm \beta_7)e_7 \\ &= \sum_{i=0}^7 (\alpha_i \pm \beta_i)e_i\end{aligned}\quad (3.58)$$

biçiminde tanımlanır.

α ve β nin $\alpha = \alpha' + \alpha''e$, $\beta = \beta' + \beta''e \in \mathbf{O}$ şeklinde Cayley-Dickson yazımı ile α ve β 'nin Cayley-Dickson toplamı ve farkı,

$$\begin{aligned}\alpha \mp \beta &= (\alpha' + \alpha''e) \mp (\beta' + \beta''e) \\ &= (\alpha' \mp \beta') + (\alpha'' \mp \beta'')e\end{aligned}\quad (3.59)$$

olarak tanımlanır.

Skaler kısmı α_s ve β_s , vektörel kısmı α_v ve β_v olan $\alpha = \alpha_s + \alpha_v$ ve $\beta = \beta_s + \beta_v$ iki reel oktonyonun çarpımı,

$$\alpha\beta = \alpha_s\beta_s + \alpha_s\beta_v + \alpha_v\beta_s - \alpha_v \cdot \beta_v + \alpha_v \times \beta_v \quad (3.60)$$

biçimindedir (Lounesto, 1997; Tolan, 2006).

Ayrıca, $\overline{\beta'}$ ve $\overline{\beta''}$ sırasıyla β' ve β'' kuaterniyonlarının eşleniklerini göstermek üzere $\alpha = \alpha' + \alpha''e$, $\beta = \beta' + \beta''e \in \mathbf{O}$ oktonyonlarının çarpımı Cayley-Dickson sunumuna göre

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= (\alpha' + \alpha''e)(\beta' + \beta''e) \\ &= (\alpha'\beta' - \overline{\beta''}\alpha'') + (\beta''\alpha' + \alpha''\overline{\beta'})e\end{aligned}\quad (3.61)$$

biçimindedir (Tian, 2000; Tolan, 2006).

Tanım 3. 1. 34 (Bir reel oktonyonun bir skaler ile çarpımı) $k \in \mathbb{R}$ reel sayısı ile $\alpha \in \mathbf{O}$ oktonyonunun çarpımı,

$$k.\alpha = \sum_{i=0}^7 (k\alpha_i)e_i \quad (3.62)$$

dir ve $k.\alpha$ bir reel oktonyondur.

Tanım 3. 1. 35 (İki reel oktonyonun skaler çarpımı) $\alpha, \beta \in \mathbf{O}$ oktonyonlarının skaler çarpımı,

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{k=0}^7 \alpha_k \beta_k = \frac{1}{2} (\bar{\alpha} \beta + \bar{\beta} \alpha) \quad (3.63)$$

olarak tanımlanır (Tolan, 2006).

$\vec{\alpha}$ ve $\vec{\beta}$ oktonyonları sadece imajiner bileşene sahip ise, $\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle$ skaler çarpımı aşağıdaki şekilde de yazılabilir:

$$\langle \vec{\alpha}, \vec{\beta} \rangle = -\frac{1}{2} (\vec{\alpha} \vec{\beta} + \vec{\beta} \vec{\alpha}).$$

Tanım 3. 1. 36 (İki reel oktonyonun vektörel çarpımı) $\alpha, \beta \in \mathbf{O}$ oktonyonlarının vektörel çarpımı,

$$\alpha \times \beta = -\frac{1}{2} (\bar{\alpha} \beta - \bar{\beta} \alpha) \quad (3.64)$$

olarak tanımlanır. $\vec{\alpha}$ ve $\vec{\beta}$ oktonyonları sadece imajiner bileşene sahip ise, $\vec{\alpha} \times \vec{\beta}$ vektörel çarpımı,

$$\vec{\alpha} \times \vec{\beta} = \frac{1}{2} (\vec{\alpha} \vec{\beta} - \vec{\beta} \vec{\alpha})$$

olarak tanımlanır (Lounesto, 1997; Tolan, 2006).

Bu tanımlamaya göre eşit iki oktonyonun vektörel çarpımı,

$$\alpha \times \alpha = -\frac{1}{2} (\bar{\alpha} \alpha - \bar{\alpha} \alpha) = 0$$

olur ve üç oktonyonun vektörel çarpımı ise

$$\alpha \times \beta \times \gamma = \frac{1}{2} (\alpha (\bar{\beta} \gamma) - \gamma (\bar{\beta} \alpha))$$

şeklinde hesaplanır (Tolan, 2006).

Tanım 3. 1. 37 (Bir reel oktonyonun eşleniği) $\alpha \in \mathbf{O}$ oktonyonunun eşleniği,

$$\begin{aligned}\bar{\alpha} &= \alpha_0 e_0 - \alpha_1 e_1 - \alpha_2 e_2 - \alpha_3 e_3 - \alpha_4 e_4 - \alpha_5 e_5 - \alpha_6 e_6 - \alpha_7 e_7 \\ &= \alpha_0 e_0 - \sum_{k=1}^7 \alpha_k e_k\end{aligned}\quad (3.65)$$

ifadesi ile tanımlanır.

Önerme 3. 1. 20 Her $\alpha, \beta \in \mathbf{O}$ oktonyonları için aşağıdaki eşitlikler mevcuttur:

- i) $\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}.$
- ii) $\overline{\alpha\beta} = \bar{\beta}\bar{\alpha}.$
- iii) $\|\alpha\|^2 = \alpha\bar{\alpha} = \bar{\alpha}\alpha = \sum_{k=0}^7 \alpha_k^2.$
- iv) $\|\alpha\beta\| = \|\alpha\|\|\beta\|.$
- v) $\alpha \in \mathbf{O}$ oktonyonyonun reel ve imajiner kısımları sırasıyla aşağıdaki gibi verilir:

$$\operatorname{Re}(\alpha) = \frac{\alpha + \bar{\alpha}}{2} = a_0 e_0 \text{ ve } \operatorname{Im}(\alpha) = \frac{\alpha - \bar{\alpha}}{2} = \sum_{k=1}^7 \alpha_k e_k.$$

- vi) $\alpha^{-1} = \frac{\bar{\alpha}}{\|\alpha\|^2}, \alpha \neq 0.$
- vii) $\alpha^{-1}\alpha = \alpha\alpha^{-1} = e_0$ (Tian, 1999; 2000).

Önerme 3. 1. 21 Her $\alpha, \beta \in \mathbf{O}$ oktonyonları için,

$$\text{i) } \alpha(\alpha\beta) = \alpha^2\beta, (\beta\alpha)\alpha = \beta\alpha^2, \quad (3.66)$$

$$\text{ii) } (\alpha\beta)\alpha = \alpha(\beta\alpha) = \alpha\beta\alpha, (\alpha\beta)\alpha^{-1} = \alpha(\beta\alpha^{-1}) = \alpha\beta\alpha^{-1}, \quad (3.67)$$

$$\text{iii) } \alpha^2 - 2(\operatorname{Re}\alpha)\alpha + |\alpha|^2 = 0, (\operatorname{Im}\alpha)^2 = -|\operatorname{Im}\alpha|^2, \quad (3.68)$$

$$\text{iv) } \operatorname{Re}(\alpha\beta) = \operatorname{Re}(\beta\alpha) \quad (3.69)$$

eşitlikleri mevcuttur (Tian, 1999).

(3.66) ve (3.67), $\mathbf{O}$ daki çarpma işleminin birleşme özelliğinin sağlandığı özel durumlardır. Aşağıdaki önerme, $\mathbf{O}$ da üçlü oktonyon çarpımının birleşme özelliği ile ilgili eşitlikler sunmaktadır.

Önerme 3. 1. 22 Her $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{O}$ oktonyonları için aşağıdaki Moufang eşitlikleri sağlanır (Sgray ve Manogue, 1996; Springer ve Veldkamp, 2000):

$$(\alpha\beta\alpha)\gamma = \alpha(\beta(\alpha\gamma)),$$

$$\gamma(\alpha\beta\alpha) = ((\gamma\alpha)\beta)\alpha,$$

$$\alpha(\beta\gamma)\alpha = (\alpha\beta)(\gamma\alpha).$$

3.1.4.1. Reel Oktonyonların Sol ve Sağ Matris Temsilleri

Tanım 3. 1. 38 $\alpha' = \alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k$, $\alpha'' = \alpha_4 + \alpha_5 i + \alpha_6 j + \alpha_7 k \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ olmak üzere $\alpha = \alpha' + \alpha'' e \in \mathbf{O}$ oktonyonu verilsin. Bu durumda, $K_4 = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ olmak üzere α oktonyonunun sol reel matris temsili

$$w(\alpha) = \begin{bmatrix} \phi(\alpha') & -\tau(\alpha'')K_4 \\ \phi(\alpha'')K_4 & \tau(\alpha') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & -\alpha_6 & -\alpha_7 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & -\alpha_3 & \alpha_2 & -\alpha_5 & \alpha_4 & \alpha_7 & -\alpha_6 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_6 & -\alpha_7 & \alpha_4 & \alpha_5 \\ \alpha_3 & -\alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & -\alpha_7 & \alpha_6 & -\alpha_5 & \alpha_4 \\ \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 \\ \alpha_5 & -\alpha_4 & \alpha_7 & -\alpha_6 & \alpha_1 & \alpha_0 & \alpha_3 & -\alpha_2 \\ \alpha_6 & -\alpha_7 & -\alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_2 & -\alpha_3 & \alpha_0 & \alpha_1 \\ \alpha_7 & \alpha_6 & -\alpha_5 & -\alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & -\alpha_1 & \alpha_0 \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

şeklinde 8×8 reel matristir (Tian, 2000).

$w(\alpha)$ matrisinin birinci sütunu $c_{w(\alpha)}^1$ olsun. O halde α oktonyonunun vektörel temsili $\vec{\alpha} = c_{w(\alpha)}^1$ dır.

Teorem 3. 1. 11 $\alpha, x \in \mathbf{O}$ oktonyonları için,

$$\overrightarrow{\alpha x} = w(\alpha) \vec{x} \quad (3.71)$$

şeklindedir (Tian, 2000).

Tanım 3. 1. 39 $\alpha' = \alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k$, $\alpha'' = \alpha_4 + \alpha_5 i + \alpha_6 j + \alpha_7 k \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ olmak üzere $\alpha = \alpha' + \alpha'' e \in \mathbf{O}$ oktonyonu verilsin. Bu durumda, $K_8 = \text{diag}(K_4, I_4)$ olmak üzere bir α oktonyonunun sağ reel matris temsili

$$v(\alpha) = K_8 w^T(\alpha) K_8 = \begin{bmatrix} \tau(\alpha') & -\phi(\overline{\alpha''}) \\ \phi(\alpha'') & \tau(\overline{\alpha'}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 & -\alpha_5 & -\alpha_6 & -\alpha_7 \\ \alpha_1 & \alpha_0 & \alpha_3 & -\alpha_2 & \alpha_5 & -\alpha_4 & -\alpha_7 & \alpha_6 \\ \alpha_2 & -\alpha_3 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_6 & \alpha_7 & -\alpha_4 & -\alpha_5 \\ \alpha_3 & \alpha_2 & -\alpha_1 & \alpha_0 & \alpha_7 & -\alpha_6 & \alpha_5 & -\alpha_4 \\ \alpha_4 & -\alpha_5 & -\alpha_6 & -\alpha_7 & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_5 & \alpha_4 & -\alpha_7 & \alpha_6 & -\alpha_1 & \alpha_0 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_6 & \alpha_7 & \alpha_4 & -\alpha_5 & -\alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_0 & -\alpha_1 \\ \alpha_7 & -\alpha_6 & \alpha_5 & \alpha_4 & -\alpha_3 & -\alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

şeklinde 8×8 reel ortogonal matristir (Tian, 2000).

$v(\alpha)$ matrisinin birinci sütunu $c_{v(\alpha)}^1$ olsun. O halde α oktonyonunun vektörel temsili $\vec{\alpha} = c_{v(\alpha)}^1$ dır.

Teorem 3. 1. 12 $\alpha, x \in \mathbf{O}$ oktonyonları için,

$$\overrightarrow{x\alpha} = v(\alpha) \vec{x} \quad (3.73)$$

şeklindedir (Tian, 2000).

Aşağıdaki teorem reel oktonyonların $w(\cdot)$ ve $v(\cdot)$ matris temsilleri üzerine bazı temel özellikleri sunmaktadır.

Teorem 3. 1. 13 $\alpha, x \in \mathbf{O}$ oktonyonları ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için;

- i. $\alpha = \beta \Leftrightarrow w(\alpha) = w(\beta),$
- ii. $w(\alpha + \beta) = w(\alpha) + w(\beta),$
- iii. $w(\lambda\alpha) = \lambda w(\alpha)$ ve $w(1) = I_8,$
- iv. $w(\bar{\alpha}) = w^T(\alpha),$
- v. $\alpha = \beta \Leftrightarrow v(\alpha) = v(\beta),$
- vi. $v(\alpha + \beta) = v(\alpha) + v(\beta),$
- vii. $v(\lambda\alpha) = \lambda v(\alpha)$ ve $v(1) = I_8,$
- viii. $v(\bar{\alpha}) = v^T(\alpha),$
- ix. $\det[w(\alpha)] = \det[v(\alpha)] = |\alpha|^8$

önergeleri doğrudur (Tian, 2000).

Teorem 3. 1. 14 $\alpha \in \mathbf{O} - \{0\}$ oktonyonu için,

$$w^{-1}(\alpha) = w(\alpha^{-1}), \quad v^{-1}(\alpha) = v(\alpha^{-1}) \quad (3.74)$$

eşitlikleri mevcuttur (Tian, 2000).

Teorem 3. 1. 15 $\alpha, \beta \in \mathbf{O}$ oktonyonları için,

$$w(\alpha\beta\alpha) = w(\alpha)w(\beta)w(\alpha), \quad v(\alpha\beta\alpha) = v(\alpha)v(\beta)v(\alpha) \quad (3.75)$$

eşitlikleri mevcuttur (Tian, 2000).

Teorem 3. 1. 16 $\alpha \in \mathbf{O}$ oktonyonu için,

$$w(\alpha^2) = w^2(\alpha), \quad v(\alpha^2) = v^2(\alpha), \quad w(\alpha)v(\alpha) = v(\alpha)w(\alpha) \quad (3.76)$$

eşitlikleri mevcuttur (Tian, 2000).

Teorem 3. 1. 17 $\alpha, \beta \in \mathbf{O}$ oktonyonları için;

$$w(\alpha\beta) + w(\beta\alpha) = w(\alpha)w(\beta) + w(\beta)w(\alpha), \quad (3.77)$$

$$v(\alpha\beta) + v(\beta\alpha) = v(\alpha)v(\beta) + v(\beta)v(\alpha), \quad (3.78)$$

$$w(\alpha\beta) + v(\alpha\beta) = w(\alpha)w(\beta) + v(\beta)v(\alpha), \quad (3.79)$$

$$w(\alpha)v(\beta) + w(\beta)v(\alpha) = v(\alpha)w(\beta) + v(\beta)w(\alpha), \quad (3.80)$$

$$w(\alpha\beta) = w(\alpha)w(\beta) + w(\alpha)v(\beta) - v(\beta)w(\alpha), \quad (3.81)$$

$$v(\alpha\beta) = v(\beta)v(\alpha) + w(\beta)v(\alpha) - v(\alpha)w(\beta) \quad (3.82)$$

eşitlikleri mevcuttur (Tian, 2000).

Aşağıdaki iki teorem $\delta(\alpha, \beta) = [w(\alpha) - v(\beta)]$ matrisi ile ilgili özellikleri sunmaktadır.

Teorem 3. 1. 18 $\alpha, \beta \in \mathbf{O}$ oktonyonları için $s = \text{Re } \alpha - \text{Re } \beta$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \det[\delta(\alpha, \beta)] &= |\alpha - \bar{\beta}|^4 \left[s^2 + (|\text{Im } \alpha| - |\text{Im } \beta|)^2 \right] + \left[s^2 + (|\text{Im } \alpha| + |\text{Im } \beta|)^2 \right] \\ &= \left(s^2 + (|\text{Im } \alpha + \text{Im } \beta|)^2 \right)^2 \left[s^4 + 2s^2 (|\text{Im } \alpha|^2 + |\text{Im } \beta|^2) + (|\text{Im } \alpha|^2 - |\text{Im } \beta|^2)^2 \right] \end{aligned}$$

şeklindedir (Tian, 2000).

Teorem 3. 1. 19 $\alpha \in \mathbf{O}$ ve $\alpha \notin \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda,

$$\delta^3(\alpha, \alpha) = [w(\alpha) - v(\alpha)]^3 = -4|\text{Im } \alpha|^2 \delta(\alpha, \alpha) \quad (3.83)$$

ve $\delta(\alpha, \alpha)$ 'nın genelleştirilmiş tersi,

$$\delta^-(\alpha, \alpha) = -\frac{1}{4|\text{Im } \alpha|^2} \delta(\alpha, \alpha) \quad (3.84)$$

şeklindedir (Tian, 2000).

Teorem 3. 1. 20 $a, b \in \mathbf{O}$ olsun. Bu durumda, $ax = xb$ lineer denkleminin sıfırdan farklı bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart

$$\operatorname{Re} a = \operatorname{Re} b \text{ ve } |\operatorname{Im} a| = |\operatorname{Im} b| \quad (3.85)$$

olmasıdır (Tian, 2000).

Teorem 3. 1. 21 $a, b \in \mathbf{O}$ olmak üzere (3.85) koşullu $ax = xb$ denklemi için,

i. $b \neq \bar{a}$ olması durumunda yani $\operatorname{Im} a + \operatorname{Im} b \neq 0$ ise $p \in A(a, b)$, a ve b ile üretilen alt cebirin keyfi bir elemanı olmak üzere x genel çözümü

$$x = (\operatorname{Im} a) p + p(\operatorname{Im} b)$$

şeklinde ya da denk olarak $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ keyfi reel sayılar olmak üzere x genel çözümü

$$x = \lambda_1 (\operatorname{Im} a + \operatorname{Im} b) + \lambda_2 [|\operatorname{Im} a| |\operatorname{Im} b| - (\operatorname{Im} a)(\operatorname{Im} b)]$$

şeklindedir.

ii. $b = \bar{a}$ ise $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_7 x_7 = 0$ olmak üzere x genel çözümü

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_7 e_7$$

şeklindedir (Tian, 2000).

Teorem 3. 1. 22 $a, b \in \mathbf{O}$ ve $a \notin \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda, $ax - xa = b$ lineer denkleminin bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart $ab = b\bar{a}$ eşitliğinin sağlanmasıdır. Tutarlı $ax - xa = b$ denklemi için $p \in \mathbf{O}$ keyfi oktonyon olmak üzere x genel çözümü,

$$x = \frac{1}{4|\operatorname{Im} a|^2} (ba - ab) + p - \frac{1}{|\operatorname{Im} a|^2} (\operatorname{Im} a) p (\operatorname{Im} a) \quad (3.86)$$

şeklindedir (Tian, 2000).

Teorem 3. 1. 23 $a, b \in \mathbf{O}$ ve $a \notin \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda, $ax - xb = c$ lineer denkleminin bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart $a \sim b$ olmasıdır. Tutarlı $ax - xb = c$ denklemi için $\bar{p}$ keyfi reel vektör olmak üzere x genel çözümünün vektör temsili,

$$\vec{x} = \delta^-(a, b) \vec{c} + 2 \left[I_8 - \delta^-(a, b) \delta(a, b) \right] \vec{p} \quad (3.87)$$

dir. Eğer a, b 'ye benzer değilse bu durumda $ax - xb = c$ denkleminin bir tek çözümü

$$\vec{x} = \delta^-(a, b) \vec{c} \quad (3.88)$$

şeklindedir (Tian, 2000).

3.1.5. Kompleks Oktonyonlar Cebiri

Bu bölüm, kompleks oktonyon cebiri ile ilgili bazı özet bilgileri içermektedir.

α ve β oktonyonları,

$$\alpha = \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_5 + \alpha_6 e_6 + \alpha_7 e_7$$

ve

$$\beta = \beta_0 e_0 + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 + \beta_4 e_4 + \beta_5 e_5 + \beta_6 e_6 + \beta_7 e_7$$

olmak üzere bir kompleks oktonyon

$$\begin{aligned} \gamma &= \alpha_0 e_0 + \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3 + \alpha_4 e_4 + \alpha_5 e_5 + \alpha_6 e_6 + \alpha_7 e_7 \\ &\quad + i(\beta_0 e_0 + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 + \beta_4 e_4 + \beta_5 e_5 + \beta_6 e_6 + \beta_7 e_7) \\ &= (\alpha_0 + i\beta_0) e_0 + (\alpha_1 + i\beta_1) e_1 + (\alpha_2 + i\beta_2) e_2 + (\alpha_3 + i\beta_3) e_3 \\ &\quad + (\alpha_4 + i\beta_4) e_4 + (\alpha_5 + i\beta_5) e_5 + (\alpha_6 + i\beta_6) e_6 + (\alpha_7 + i\beta_7) e_7 \end{aligned}$$

şeklinde oluşturulur. O halde,

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \alpha_0 + i\beta_0, \gamma_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \gamma_2 = \alpha_2 + i\beta_2, \gamma_3 = \alpha_3 + i\beta_3, \\ \gamma_4 &= \alpha_4 + i\beta_4, \gamma_5 = \alpha_5 + i\beta_5, \gamma_6 = \alpha_6 + i\beta_6, \gamma_7 = \alpha_7 + i\beta_7 \end{aligned}$$

kompleks sayıları için γ oktonyonu

$$\begin{aligned}\gamma &= \gamma_0 e_0 + \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3 + \gamma_4 e_4 + \gamma_5 e_5 + \gamma_6 e_6 + \gamma_7 e_7 \\ &= \sum_{\mu=0}^7 \gamma_\mu e_\mu\end{aligned}\quad (3.89)$$

biçiminde ifade edilir. Kompleks oktonyonların kümesi $\mathbf{O}_\mathbb{C}$ biçiminde gösterilir (Tolan, 2006).

Tanım 3. 1. 40 (İki kompleks oktonyonun toplam ve farkı) $\alpha, \beta \in \mathbf{O}_\mathbb{C}$ olmak üzere toplama ve çıkarma işlemi,

$$\begin{aligned}\alpha \pm \beta &= (\alpha_0 \pm \beta_0) e_0 + (\alpha_1 \pm \beta_1) e_1 + (\alpha_2 \pm \beta_2) e_2 + (\alpha_3 \pm \beta_3) e_3 \\ &\quad + (\alpha_4 \pm \beta_4) e_4 + (\alpha_5 \pm \beta_5) e_5 + (\alpha_6 \pm \beta_6) e_6 + (\alpha_7 \pm \beta_7) e_7 \\ &= \sum_{\mu=0}^7 (\alpha_\mu \pm \beta_\mu) e_\mu\end{aligned}\quad (3.90)$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3. 1. 41 (İki kompleks oktonyonun çarpımı) $\alpha, \beta \in \mathbf{O}_\mathbb{C}$ kompleks oktonyonlarının çarpımı,

$$\alpha\beta = \alpha_0\beta_0 + \alpha_0\vec{\beta} + \vec{\alpha}\beta_0 - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \times \vec{\beta}\quad (3.91)$$

şeklinde dir.

Tanım 3. 1. 42 (Bir kompleks oktonyonun eşleniği) $\alpha \in \mathbf{O}_\mathbb{C}$ kompleks oktonyonunun eşleniği,

$$\bar{\alpha} = \alpha_0 e_0 - \sum_{j=1}^7 \alpha_j e_j\quad (3.92)$$

ifadesi ile tanımlanır.

Tanım 3. 1. 43 (Bir kompleks oktonyonun normu) $\alpha \in \mathbf{O}_\mathbb{C}$ kompleks oktonyonunun normu,

$$N^2(\alpha) = \alpha\bar{\alpha} = \bar{\alpha}\alpha = \sum_{j=0}^7 \alpha_j^2\quad (3.93)$$

ifadesi ile tanımlanır.

3.2. YÖNTEM

Bu bölümde; kompleks kuaterniyonik denklemler ile oktonyonik denklemler ve sistemler incelendi, materyal bölümü içerisinde sunulan literatür özet bilgilerin dikkate alınması ile çözümlerinin varlığı ve tekliği üzerine kriterler elde edildi ve çözümlerin reel vektörel temsilleri ile çözümlerinin kendileri sunuldu.

3.2.1. Bir Bilinmeyenli Bazı Lineer Kompleks Kuaterniyonik Denklemlerin İncelenmesi

Bu bölüm, $\mathbf{H}_C$ de;

$$AX = XB, \quad (3.94)$$

$$AX = XA, \quad (3.95)$$

$$AX - XA = C, \quad (3.96)$$

$$AX - XA^* = C, \quad (3.97)$$

$$A^*X - XA = C, \quad (3.98)$$

$$AX - XB = C \quad (3.99)$$

formlarındaki bir bilinmeyenli lineer denklemlerin çözümleri üzerine incelemeler

içermektedir. (3.94)-(3.99) denklemlerinin çözümleri; $\Psi(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \Theta(B) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$

olmak üzere kompleks kuaterniyonların $\Gamma(\cdot)$ ve $\Theta(\cdot)$ sol ve sağ matris temsillerinden hareketle sırasıyla (3.94)-(3.99) denklemlerine denk olan

$$[\Gamma(A) - \Psi(B)]\bar{X} = \mathbf{0}, \quad (3.100)$$

$$[\Gamma(A) - \Psi(A)]\bar{X} = \mathbf{0}, \quad (3.101)$$

$$[\Gamma(A) - \Psi(A)]\bar{X} = \bar{C}, \quad (3.102)$$

$$[\Gamma(A) - \Psi(A^*)]\bar{X} = \bar{C}, \quad (3.103)$$

$$[\Gamma(A^*) - \Psi(A)]\bar{X} = \bar{C}, \quad (3.104)$$

$$[\Gamma(A) - \Psi(B)]\bar{X} = \bar{C} \quad (3.105)$$

reel matris denklemlerinin çözümleri üzerinden elde edilecektir. Ayrıca (3.94)-(3.99) denklemlerinin varlığı ve tekliği üzerine sonuçlar (3.100)-(3.105) denklemlerinin bu yöndeki incelemeleri sonunda elde edilecektir.

Aşağıdaki Lemma $\delta(A, B) = \Gamma(A) - \Psi(B)$ matrisinin determinanı, adi tersi ve genelleştirilmiş tersi üzerine bulgular içermektedir.

Lemma 3. 2. 1 $A, B \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ kompleks kuaterniyonları ve

$$\delta(A, B) = \Gamma(A) - \Psi(B)$$

matrisi verilsin. Bu durumda,

i. $s = A_0 - B_0$ olmak üzere $\delta(A, B)$ reel matrisinin determinanı,

$$\begin{aligned} |\delta(A, B)| &= \left([s^2 + |\operatorname{Im} A| - |\operatorname{Im} B|^2] [s^2 + |\operatorname{Im} A| + |\operatorname{Im} B|^2] \right)^2 \\ &= \left(\left(s^4 + 2s^2 (|\operatorname{Im} A|^2 + |\operatorname{Im} B|^2) + (|\operatorname{Im} A|^2 - |\operatorname{Im} B|^2)^2 \right) \right)^2 \end{aligned}$$

şeklindedir.

ii. Eğer $A_0 \neq B_0$ ya da $|\operatorname{Im} A| \neq |\operatorname{Im} B|$ ise $\delta(A, B)$ tekil değildir ve $\delta(A, B)$ 'nin adi tersi;

$$\delta^{-1}(A, B) = \Gamma^{-1} \left(|B|^2 - |A|^2 + 2(A_0 - B_0)A \right) \left(\Gamma(A) - \Psi(\bar{B}) \right)$$

ya da

$$\delta^{-1}(A, B) = \Psi^{-1}(|A|^2 - |B|^2 + 2(B_0 - A_0)B) \left(\Gamma(\bar{A}) - \Psi(B) \right)$$

şeklindedir.

iii. Eğer $A_0 = B_0$ ve $|\operatorname{Im} A| = |\operatorname{Im} B|$ ise $\delta(A, B)$ singülerdir ve $\delta(A, B)$ 'nin genelleştirilmiş tersi,

$$\delta^{-}(A, B) = -\frac{1}{4|\operatorname{Im} A|^2} \delta(A, B) = -\frac{1}{4|\operatorname{Im} A|^2} [\Gamma(\operatorname{Im} A) - \Psi(\operatorname{Im} B)]$$

şeklindedir.

İspat. Her $A, B \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ için,

$$A = P(A_0 + |\operatorname{Im} A|i)P^{-1} = P\widehat{A}P^{-1}, \quad B = Q(B_0 + |\operatorname{Im} B|i)Q^{-1} = Q\widehat{B}Q^{-1} \quad (3.106)$$

olacak şekilde sıfırdan farklı $P, Q \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ vardır. (3.106) deki $A, B \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ kuaterniyonlarının $\Gamma(A)$ ve $\Psi(B)$ matris temsilleri için,

$$\Gamma(A) = \Gamma(P)\Gamma(\widehat{A})\Gamma(P^{-1}), \quad \Psi(B) = \Psi(Q^{-1})\Psi(\widehat{B})\Psi(Q)$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned} |\delta(A, B)| &= |\Gamma(P)\Gamma(\widehat{A})\Gamma(P^{-1}) - \Psi(Q^{-1})\Psi(\widehat{B})\Psi(Q)| \\ &= |\Gamma(P)| |\Gamma(\widehat{A}) - \Gamma(P^{-1})\Psi(Q^{-1})\Psi(\widehat{B})\Psi(Q)\Gamma(P)| |\Gamma(P^{-1})| \\ &= |\Gamma(\widehat{A}) - \Psi(Q^{-1})\Psi(\widehat{B})\Psi(Q)| \\ &= |\Psi(Q^{-1})| |\Psi(Q)\Gamma(\widehat{A})\Psi(Q^{-1}) - \Psi(\widehat{B})| |\Psi(Q)| \\ &= |\Gamma(\widehat{A}) - \Psi(\widehat{B})| \end{aligned}$$

dir. Sonuç olarak; $\widehat{A} = A_0 + |\operatorname{Im} A|i$ ve $\widehat{B} = B_0 + |\operatorname{Im} B|i$ yerlerine yazılırsa Lemma 3.2.1 (i) ispatı tamamlanır.

Lemma 3. 2. 1'in (ii) durumunun ispatı,

$$\begin{aligned} \left[\Gamma(A) - \Psi(\overline{B}) \right] \left[\Gamma(A) - \Psi(B) \right] &= \Gamma(A^2) + |B|^2 I_8 - 2B_0 \Gamma(A) \\ &= \Gamma(A^2 - 2B_0 A + |B|^2) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \left[\Gamma(\overline{A}) - \Psi(B) \right] \left[\Gamma(A) - \Psi(B) \right] &= \Psi(B^2) + |A|^2 I_8 - 2A_0 \Psi(B) \\ &= \Psi(B^2 + |A|^2 - 2A_0 B) \end{aligned}$$

eşitliklerinden açıkça görülmektedir.

$A_0 = B_0$ ve $|\operatorname{Im} A| = |\operatorname{Im} B|$ olması durumunda $\delta(A, B)$,

$$\delta(A, B) = \Gamma(A) - \Psi(B) = \Gamma(\operatorname{Im} A) - \Psi(\operatorname{Im} B)$$

şeklinde elde edilir. Böylece $(\operatorname{Im} A)^2 = (\operatorname{Im} B)^2 = -|\operatorname{Im} A|^2$ eşitliklerinin dikkate alınması ile

$$\delta^3(A, B) = -4|\operatorname{Im} A|^2 \delta(A, B)$$

yazılır ki, böylece Lemma 3. 2. 1'in (iii) durumunda verilen $\delta^-(A, B)$ genelleştirilmiş tersine ulaşılır.

Aşağıdaki teorem ile, $AX = XA$ lineer kompleks kuaterniyonik denkleminin genel çözümü verilmektedir.

Teorem 3. 2. 1 $A \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ ve $A \notin \mathbb{R}$ olmak üzere

$$AX = XA \tag{3.107}$$

kompleks kuaterniyonik denkleminin X genel çözümü $P \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ keyfî kompleks kuaterniyonu için,

$$X = P - \frac{1}{|\operatorname{Im} A|^2} (\operatorname{Im} A) P (\operatorname{Im} A) \tag{3.108}$$

şeklindedir.

İspat. (3.107) deki $AX = XA$ denklemi ile $\overline{AX} = \Gamma(A)\overline{X}$ ve $\overline{XA} = \Psi(A)\overline{X}$ vektörel eşitlikleri dikkate alınırsa bu denkleme denk olan

$$[\Gamma(A) - \Psi(A)]\overline{X} = \delta(A, A)\overline{X} = 0 \quad (3.109)$$

reel matris denklemi elde edilir. (3.109) denkleminin sıfırdan farklı bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart $|\delta(A, A)| = 0$ olduğu iyi bilinmektedir. Bu durumda, (3.109) matris denkleminin $\overline{X}$ genel çözümü, $\overline{P}$ keyfi reel vektörü için

$$\overline{X} = 2[I_8 - \delta^-(A, A)\delta(A, A)]\overline{P} \quad (3.110)$$

dir. Lemma 3. 2. 1 (iii) de verilen eşitliğin (3.110) de yerine yazılmasıyla,

$$\begin{aligned} \overline{X} &= 2[I_8 - \delta^-(A, A)\delta(A, A)]\overline{P} \\ &= 2\left[I_8 + \frac{1}{4|\operatorname{Im} A|^2}\delta^2(A, A)\right]\overline{P} \\ &= 2\left[I_8 + \frac{1}{4|\operatorname{Im} A|^2}\left(-2\left[|\operatorname{Im} A|^2 I_8 + \Gamma(\operatorname{Im} A)\Psi(\operatorname{Im} A)\right]\right)\right]\overline{P} \\ &= \left[I_8 - \frac{1}{|\operatorname{Im} A|^2}\Gamma(\operatorname{Im} A)\Psi(\operatorname{Im} A)\right]\overline{P} \end{aligned}$$

biçiminde (3.109) reel matris denkleminin $\overline{X}$ vektörel çözümüne ve bu çözümün kompleks kuaterniyon formunda yazılmasıyla da (3.107) kompleks kuaterniyonik denkleminin X genel çözümüne ulaşılır.

Aşağıdaki teorem ile, $AX - XA = C$ lineer kompleks kuaterniyonik denkleminin genel çözümü sunulmaktadır.

Teorem 3. 2. 2 $A \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ olmak üzere

$$AX - XA = C \quad (3.111)$$

lineer kompleks kuaterniyonik denklemin genel çözümü $P \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ keyfi kompleks kuaterniyonu için

$$X = \frac{1}{4|\operatorname{Im} A|^2}(CA - AC) + P - \frac{1}{|\operatorname{Im} A|^2}(\operatorname{Im} A)P(\operatorname{Im} A) \quad (3.112)$$

şeklindedir.

İspat. (3.111) deki $AX - XA = C$ denklemi ile $\overrightarrow{AX} = \Gamma(A)\overrightarrow{X}$ ve $\overrightarrow{XA} = \Psi(A)\overrightarrow{X}$ vektörel eşitlikleri dikkate alınırsa bu denkleme denk olan

$$[\Gamma(A) - \Psi(A)]\overrightarrow{X} = \delta(A, A)\overrightarrow{X} = \overrightarrow{C} \quad (3.113)$$

şeklindeki reel matris denklemi elde edilir. Bu sistemin katsayılar matrisi

$$[\Gamma(A) - \Psi(A)] = \delta(A, A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2a_3 & 2a_2 & 0 & 0 & -2b_3 & 2b_2 \\ 0 & 2a_3 & 0 & -2a_1 & 2b_2 & 0 & -2b_0 & 0 \\ 0 & -2a_2 & 2a_1 & 0 & 2b_3 & 0 & 0 & -2b_0 \\ 0 & 0 & -2b_2 & -2b_3 & 0 & 0 & 2a_2 & 2a_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2b_3 & 2b_0 & 0 & -2a_2 & 0 & 0 & -2a_1 \\ 0 & -2b_2 & 0 & 2b_0 & -2a_3 & 0 & 2a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

dir. O takdirde $\delta(A, A)$ matrisi için, $|\delta(A, A)| = 0$ ve $\operatorname{rank} \delta(A, A) = 4$ olur ve (3.111) denklemi bir çözüme sahiptir ve bu çözüm tek değildir. Bu durumda, (3.113) reel matris denkleminin çözülebilir olması için gerek ve yeter şart

$$\delta(A, A)\delta^-(A, A)\overrightarrow{C} = \overrightarrow{C} \quad (3.114)$$

ya da denk olarak

$$\Gamma(\operatorname{Im} A)\Psi(\operatorname{Im} A)\overrightarrow{C} = |\operatorname{Im} A|^2 \overrightarrow{C} \quad (3.115)$$

olmasıdır. Buradan, $\overrightarrow{AX} = \Gamma(A)\overrightarrow{X}$ ve $\overrightarrow{XA} = \Psi(A)\overrightarrow{X}$ vektörel eşitlikleri dikkate alınırsa

$$(\operatorname{Im} A)C(\operatorname{Im} A) = |\operatorname{Im} A|^2 C$$

ya da denk olarak

$$C(\operatorname{Im} A) = -(\operatorname{Im} A)C$$

eşitliğine ulaşılır. Bu durumda, $\vec{P}$ keyfi reel vektörü için

$$\vec{X} = \delta^-(A, A)\vec{C} + 2[I_8 - \delta^-(A, A)\delta(A, A)]\vec{P} \quad (3.116)$$

biçiminde (3.113) reel matris denkleminin $\vec{X}$ vektörel çözümüne ve bu çözümün kompleks kuaterniyon formunda yazılmasıyla da (3.111) kompleks kuaterniyonik denkleminin X genel çözümüne ulaşılır.

Aşağıdaki teorem ile, $AX - XA^* = C$ lineer kompleks kuaterniyonik denkleminin tutarlı olması için kriterler sunulmakta ve çözümler verilmektedir.

Teorem 3. 2. 3 $A = a + ib \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ ve $A^* = a^* + ib^* \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}$, $a, b \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ olmak üzere

$$AX - XA^* = C \quad (3.117)$$

lineer kompleks kuaterniyonik denkleminin bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart

$$AC = C\vec{A}^* \quad (3.118)$$

olmasıdır. $AC = C\vec{A}^*$ koşullu (3.117) denkleminin X genel çözümü $P \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ keyfi kompleks kuaterniyonu için,

$$X = \frac{1}{4|\operatorname{Im} A|^2}(CA^* - AC) + P - \frac{1}{|\operatorname{Im} A|^2}(\operatorname{Im} A)P(\operatorname{Im} A^*) \quad (3.119)$$

şeklindedir.

İspat. (3.117) ile verilen $AX - XA^* = C$ kompleks kuaterniyonik denklemi ile $\vec{AX} = \Gamma(A)\vec{X}$ ve $\vec{XA} = \Psi(A)\vec{X}$ vektörel eşitlikleri dikkate alınırsa bu denkleme denk olan

$$[\Gamma(A) - \Psi(A^*)]\vec{X} = \delta(A, A^*)\vec{X} = \vec{C} \quad (3.120)$$

şeklindeki reel matris denklemi elde edilir. (3.120) reel matris denkleminde

$$\delta(A, A^*) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2a_2 & -2a_3 & 0 & 0 & -2b_2 & -2b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2a_2 & 0 & 0 & -2a_1 & 0 & 2b_3 & -2b_0 & 0 \\ 2a_3 & 0 & 2a_1 & 0 & 0 & -2b_2 & 0 & -2b_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2b_3 & 2b_2 & 0 & 0 & 2a_3 & -2a_2 \\ 2b_2 & 0 & 2b_0 & 0 & 0 & -2a_3 & 0 & -2a_1 \\ 2b_3 & 0 & 0 & 2b_0 & 0 & 2a_2 & 2a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

dir. Böylece $\delta(A, A^*)$ matrisi için, $|\delta(A, A^*)| = 0$ ve $\text{rank} \delta(A, A^*) = 4$ olur ve (3.120)

denklemini bir çözüme sahiptir ve bu çözüm tek değildir. Bu durumda, (3.120) reel denklem sisteminin çözülebilir olması için gerek ve yeter şart

$$\delta(A, A^*) \delta^-(A, A^*) \vec{C} = \vec{C} \quad (3.121)$$

ya da denk olarak

$$\Gamma(\text{Im } A) \Psi(\text{Im } A^*) \vec{C} = |\text{Im } A|^2 \vec{C} \quad (3.122)$$

olmasıdır. Buradan, $\overline{A\vec{X}} = \Gamma(A) \vec{X}$ ve $\overline{X\vec{A}} = \Psi(A) \vec{X}$ eşitlikleri dikkate alınır

$$(\text{Im } A) C(\text{Im } A^*) = |\text{Im } A|^2 C$$

ya da denk olarak

$$C(\text{Im } A^*) = -(\text{Im } A) C$$

eşitliğine ulaşılır. Bu durumda, $\vec{P}$ keyfi reel vektörü için

$$\vec{X} = \delta^-(A, A^*) \vec{C} + 2 \left[I_8 - \delta^-(A, A^*) \delta(A, A^*) \right] \vec{P} \quad (3.123)$$

biçiminde (3.120) reel denklem sisteminin $\vec{X}$ vektörel çözümüne ve bu çözümün kompleks kuaterniyon formunda yazılmasıyla da (3.117) kompleks kuaterniyonik denkleminin X genel çözümüne ulaşılır.

Aşağıdaki teorem ile, $A^*X - XA = C$ lineer kompleks kuaterniyonik denkleminin çözümünün varlığı üzerine kriter sunulmakta ve bu kriterin sağlanması durumunda çözümler verilmektedir.

Teorem 3.2.4 $A = a + ib \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ ve $A^* = a^* + ib^* \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}$, $a, b \in \mathbf{H}_{\mathbb{R}}$ olmak üzere

$$A^*X - XA = C \quad (3.124)$$

lineer kompleks kuaterniyonik denkleminin bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart

$$A^*C = C\bar{A} \quad (3.125)$$

olmasıdır. Bu durumda (3.124) denkleminin genel çözümü $P \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ keyfi kompleks kuaterniyonu için,

$$X = \frac{1}{4|\operatorname{Im} A^*|^2} (CA - A^*C) + P - \frac{1}{|\operatorname{Im} A^*|^2} (\operatorname{Im} A^*)P(\operatorname{Im} A) \quad (3.126)$$

şeklindedir.

İspat. (3.124) ile verilen $A^*X - XA = C$ kompleks kuaterniyonik denklemi ile $\overline{XA} = \Psi(A)\overline{X}$ vektörel eşitlikleri dikkate alınırsa bu denkleme denk olan

$$[\Gamma(A^*) - \Psi(A)]\overline{X} = \delta(A^*, A)\overline{X} = \overline{C} \quad (3.127)$$

şeklindeki reel matris denklemi elde edilir. (3.127) reel matris denkleminin katsayılar matrisi

$$\delta(A^*, A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2a_2 & 2a_3 & 0 & 0 & 2b_2 & 2b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2a_2 & 0 & 0 & -2a_1 & 0 & -2b_3 & -2b_0 & 0 \\ -2a_3 & 0 & 2a_1 & 0 & 0 & 2b_2 & 0 & -2b_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2b_3 & -2b_2 & 0 & 0 & -2a_3 & 2a_2 \\ -2b_2 & 0 & 2b_0 & 0 & 0 & 2a_3 & 0 & -2a_1 \\ -2b_3 & 0 & 0 & 2b_0 & 0 & -2a_2 & 2a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

dir. Böylece $\delta(A^*, A)$ matrisi için, $|\delta(A^*, A)| = 0$ ve $\text{rank}\delta(A^*, A) = 4$ olur ve (3.127) denklemi bir çözüme sahiptir ve bu çözüm tek değildir. Bu durumda, (3.127) reel matris denkleminin çözülebilir olması için gerek ve yeter şart

$$\delta(A^*, A)\delta^-(A^*, A)\bar{C} = \bar{C} \quad (3.128)$$

ya da denk olarak

$$\Gamma(\text{Im } A^*)\Psi(\text{Im } A)\bar{C} = |\text{Im } A^*|^2 \bar{C} \quad (3.129)$$

olmasıdır. Buradan, $\overrightarrow{AX} = \Gamma(A)\overrightarrow{X}$ ve $\overrightarrow{XA} = \Psi(A)\overrightarrow{X}$ vektörel eşitlikleri dikkate alınırsa

$$(\text{Im } A^*)C(\text{Im } A) = |\text{Im } A^*|^2 C$$

ya da denk olarak

$$C(\text{Im } A) = -(\text{Im } A^*)C$$

eşitliğine ulaşılır. Bu durumda; $\bar{P}$ keyfi reel vektörü için

$$\overrightarrow{X} = \delta^-(A^*, A)\bar{C} + 2[I_8 - \delta^-(A^*, A)\delta(A^*, A)]\bar{P} \quad (3.130)$$

biçiminde (3.127) reel matris denkleminin $\overrightarrow{X}$ vektörel çözümüne ve bu çözümün kompleks kuaterniyon formunda yazılmasıyla da (3.124) kompleks kuaterniyonik denkleminin X genel çözümüne ulaşılır.

Aşağıdaki teorem ile, $AX = XB$ lineer kompleks kuaterniyonik denkleminin çözümünün varlığı üzerine kriter sunulmakta ve bu kriterin sağlanması durumunda çözümler verilmektedir.

Teorem 3. 2. 5 $A, B \in \mathbf{H}_\mathbb{C}$ kompleks kuaterniyonları olmak üzere

$$AX = XB \quad (3.131)$$

lineer kompleks kuaterniyonik denkleminin sıfırdan farklı bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart

$$\operatorname{Re} A = \operatorname{Re} B \text{ ve } |\operatorname{Im} A| = |\operatorname{Im} B| \quad (3.132)$$

olmasıdır. (3.132) koşullu (3.131) denkleminin X genel çözümü keyfi $P \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ kompleks kuaterniyonu için,

$$X = P - \frac{1}{|\operatorname{Im} A| |\operatorname{Im} B|} (\operatorname{Im} A) P (\operatorname{Im} B) \quad (3.133)$$

şeklindedir.

İspat. (3.131) deki $AX = XB$ denklemi ile $\overline{AX} = \Gamma(A) \overline{X}$ ve $\overline{XA} = \Psi(A) \overline{X}$ vektörel eşitlikleri dikkate alınırsa bu denkleme denk olan

$$[\Gamma(A) - \Psi(B)] \overline{X} = \delta(A, B) \overline{X} = 0 \quad (3.134)$$

reel matris denklemi elde edilir. (3.134) denklem sisteminin sıfırdan farklı bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter şartın $|\delta(A, B)| = 0$ olduğu iyi bilinmektedir. Bu durumda, (3.134) denklem sisteminin X genel çözümü $\overline{P}$ keyfi reel vektörü için

$$\overline{X} = 2 [I_8 - \delta^-(A, B) \delta(A, B)] \overline{P} \quad (3.135)$$

biçiminde olur. Lemma 3. 2. 1 (iii) de verilen eşitliğin (3.135) de yerine yazılmasıyla,

$$\begin{aligned} \overline{X} &= 2 [I_8 - \delta^-(A, B) \delta(A, B)] \overline{P} \\ &= 2 \left[I_8 + \frac{1}{4 |\operatorname{Im} A|^2} \delta^2(A, B) \right] \overline{P} \\ &= 2 \left[I_8 + \frac{1}{4 |\operatorname{Im} A|^2} \left(-2 [|\operatorname{Im} A|^2 I_8 + \Gamma(\operatorname{Im} A) \Psi(\operatorname{Im} B)] \right) \right] \overline{P} \\ &= \left[I_8 - \frac{1}{|\operatorname{Im} A|^2} \Gamma(\operatorname{Im} A) \Psi(\operatorname{Im} B) \right] \overline{P} \end{aligned}$$

biçiminde (3.134) reel denkleminin $\overline{X}$ vektörel çözümüne ve bu çözümün kompleks kuaterniyon formunda yazılmasıyla da (3.131) kompleks kuaterniyonik denkleminin X genel çözümüne ulaşılır.

Aşağıdaki teorem, $AX - XB = C$ lineer kompleks kuaterniyonik denkleminin bir tek çözüme sahip olması ve genel çözümünün sunulması ile ilgilidir.

Teorem 3. 2. 6 $A, B \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ kompleks kuaterniyonları için A ile B benzer değilse yani $\text{Re } A \neq \text{Re } B$ ya da $|\text{Im } A| \neq |\text{Im } B|$ ise

$$AX - XB = C \quad (3.136)$$

lineer kompleks kuaterniyonik denklemi

$$X = \left(2(A_0 - B_0)A - |A|^2 + |B|^2 \right)^{-1} (AC - C\bar{B}) = (\bar{A}C - CB) \left(2(B_0 - A_0)B + |A|^2 - |B|^2 \right)^{-1} \quad (3.137)$$

şeklinde bir tek çözüme sahiptir.

İspat. $\text{Re } A \neq \text{Re } B$ ya da $|\text{Im } A| \neq |\text{Im } B|$ ile, (3.136) denkleminde denk olan

$$[\Gamma(A) - \Psi(B)]\bar{X} = \delta(A, B)\bar{X} = \bar{C} \quad (3.138)$$

reel matris sisteminin katsayılar matrisi, $\delta(A, B) = \Gamma(A) - \Psi(B)$, Lemma 3. 2. 1 (ii)

durumuna göre tekil değildir. Böylece, (3.138) denkleminin $\bar{X}$ vektörel çözümü,

$$\bar{X} = \delta^{-1}(A, B)\bar{C} = \left(\Gamma^{-1} \left(2(A_0 - B_0)A - |A|^2 + |B|^2 \right) \Gamma(A) - \Psi(\bar{B}) \right) \bar{C}$$

veya

$$\bar{X} = \delta^{-1}(A, B)\bar{C} = \left(\Gamma^{-1} \left(2(B_0 - A_0)B + |A|^2 - |B|^2 \right) \Gamma(\bar{A}) - \Psi(B) \right) \bar{C}$$

şeklinde verilir ve tektir. $\bar{X}$ vektörel çözümünün kompleks kuaterniyon formunda yazılmasıyla da (3.136) kompleks kuaterniyonik denkleminin X çözümüne ulaşılır.

Aşağıdaki teorem, $AX - XB = C$ lineer kompleks kuaterniyonik denkleminin tutarlı olabilmesi üzerine üretilen kriteri ve tutarlı olması durumunda denklemin genel çözümünü vermektedir.

Teorem 3.1 $A, B \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ ve $A \sim B$ ($\operatorname{Re} A = \operatorname{Re} B$ ve $|\operatorname{Im} A| = |\operatorname{Im} B|$) olmak üzere

$$AX - XB = C \quad (3.139)$$

denkleminin bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart

$$AC = C\bar{B} \quad (3.140)$$

olmasıdır. $AC = C\bar{B}$ koşullu (3.139) denkleminin X genel çözümü $P \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ keyfi kompleks kuaterniyonu için

$$X = \frac{1}{4|\operatorname{Im} A|^2} (CB - AC) + P - \frac{1}{|\operatorname{Im} A|^2} (\operatorname{Im} A) P (\operatorname{Im} B) \quad (3.141)$$

şeklindedir.

İspat. (3.139) de verilen $AX - XB = C$ denklemi ile $\overrightarrow{AX} = \Gamma(A)\overrightarrow{X}$ ve $\overrightarrow{XA} = \Psi(A)\overrightarrow{X}$ vektörel eşitlikleri dikkate alınırsa bu denkleme denk olan

$$[\Gamma(A) - \Psi(B)]\overrightarrow{X} = \delta(A, B)\overrightarrow{X} = \overrightarrow{C} \quad (3.142)$$

şeklindeki reel matris denklemi elde edilir. (3.142) reel matris denkleminin tutarlı olması için gerek ve yeter şart

$$\delta(A, B)\delta^-(A, B)\overrightarrow{X} = \overrightarrow{C},$$

olması ya da buna denk olarak

$$\Gamma(\operatorname{Im} A)\Psi(\operatorname{Im} B)\overrightarrow{C} = |\operatorname{Im} A|^2 \overrightarrow{C}$$

olmasıdır. Buradan, $\overrightarrow{AX} = \Gamma(A)\overrightarrow{X}$ ve $\overrightarrow{XA} = \Psi(A)\overrightarrow{X}$ eşitlikleri dikkate alınırsa

$$(\operatorname{Im} A)C(\operatorname{Im} B) = |\operatorname{Im} A|^2 C \quad (3.143)$$

eşitliği elde edilir. (3.143) eşitliği aynı zamanda $C(\operatorname{Im} B) = -(\operatorname{Im} A)C$ eşitliğine yani

$AC = C\bar{B}$ eşitliğine denktir. Bu durumda; $\bar{P}$ keyfi reel vektörü için,

$$\vec{X} = \delta^-(A, B)\vec{C} + 2[I_8 - \delta^-(A, B)\delta(A, B)]\vec{P}$$

biçiminde (3.142) reel matris denkleminin $\vec{X}$ vektörel çözümüne ve bu çözümün kompleks kuaterniyon formunda yazılmasıyla da (3.139) kompleks kuaterniyonik denkleminin X genel çözümüne ulaşılır.

Bu bölümde dikkate alınan denklemler üzerine yapılan incelemeler ve elde edilen sonuçlar, 13-14 Haziran 2013 de Ankara'da Çankaya Üniversitesi'nde gerçekleştirilen "8. Ankara Matematik Günleri" isimli sempozyum da sözlü olarak sunulmuş ve sonrasında yapılan yorumlar da dikkate alınarak yayımlanması için makale olarak uluslararası hakemli bir dergiye gönderilmiştir.

3.2.2. Bir Bilinmeyenli Bir Terimli Bazı Lineer Oktonyonik Denklemlerin Gerçel Sisteme İndirgeme Metodu Yardımıyla İncelenmesi

Bu bölüm;

$$\alpha(x\alpha) = (\alpha x)\alpha = \alpha x\alpha = \rho, \quad (3.144)$$

$$\alpha(x\beta) = \rho, \quad (3.145)$$

ve

$$(\alpha x)\beta = \rho \quad (3.146)$$

oktonyonik denklemlerinin çözümlerinin varlığı, tekliği ve çözümlerinin sunulmaları üzerine incelemeler içermektedir. İncelemeler, bir oktonyonik denklemin gerçel sisteme indirgenmesi metodu kullanılarak, dikkate alınan oktonyonik denklemlerin indirgendiği

$$A_{8 \times 8} \vec{x} = \vec{\rho}$$

gerçel sistemi üzerinden yapılmaktadır. İlk olarak gerçel sisteme indirgeme metodu (GSİM), 2006 da Shpakivskyi (Shpakivskyi, 2006) tarafından yapılan çalışmada bazı kuaterniyonik denklemlerin çözümlerinin varlığı, tekliği ve çözümlerinin sunulmalarında kullanılmış olup, çalışmayı ayrıntılı bir şekilde incelememiz sonucu oktonyonik denklemlerin çözümlerinin varlığı, tekliği ve çözümlerinin sunulmaları incelemelerine taşıma düşüncesi oluşmuş, metodun oktonyon versiyonu için gerekli teorik bilgiler oluşturulmuş ve oktonyonik denklemlerin gerçel sisteme indirgenmesi şeklinde isimlendirebileceğimiz bu metod dikkate alınan, (3.144), (3.145) ve (3.146) oktonyonik denklemlerinin incelenmelerinde kullanılmıştır. (3.144), (3.145) ve (3.146) oktonyonik denklemlerin bu metodla $A_{8 \times 8} \vec{x} = \vec{\rho}$ şeklinde gerçel sistemlere indirgenmeleri pratik ve kolay olmayan bir süreçtir. Fakat, bu sistemin doğru bir şekilde kurulması ile birlikte günümüzde çok iyi bilinen ve de kullanılan Matlab gibi matris tabanlı çalışan bilgisayar programlarının, $A_{8 \times 8} \vec{x} = \vec{\rho}$ gerçel sistemin çözümünde kullanılması ile bu tipteki oktonyonik denklemlerin çözümlerinin varlığı, tekliği ve çözümlerinin elde edilmeleri hakkında daha hızlı sonuçlar elde edilebilecektir. Şimdi sırasıyla (3.144), (3.145) ve (3.146) oktonyonik denklemleri gerçel sisteme indirgeme metodu (GSİM) metodu ile $A_{8 \times 8} \vec{x} = \vec{\rho}$ sistemine indirgenecek ve bu gerçel sistem üzerinden yorumlar yapılacak ve sonuçlara ulaşılabacaktır.

İlk olarak, $\alpha \in \mathbf{O} - \{0\}$, $\rho \in \mathbf{O}$ bilinen oktonyonları ve $x \in \mathbf{O}$ bilinmeyen oktonyonu için (3.144) de verilen

$$\alpha(x\alpha) = (\alpha x)\alpha = \alpha x \alpha = \rho$$

oktonyon denklemini ele alınmaktadır. Denklemin x çözüm oktonyonunun $\vec{x}$ vektörel temsilini çözüm kabul edecek 8×8 reel katsayı matrisli $A_{8 \times 8} \vec{x} = \vec{\rho}$ reel sistemi elde edilmektedir. Oktonyon denkleminin çözümünün varlığı, tekliği ve çözümleri hakkındaki yorumlar, $A_{8 \times 8} \vec{x} = \vec{\rho}$ reel sistemi üzerinden yapılmaktadır.

Aşağıdaki Lemma $\alpha\beta$ ya da $\beta\alpha$ çarpımının bir ifadesini sunmakta olup, (3.144) oktonyon denklemini $A_{8 \times 8} \vec{x} = \vec{\rho}$ reel sisteme indirgemedi temel teşkil etmektedir.

Lemma 3. 2. 2 Her $\alpha, \beta \in \mathbf{O}$ için

$$\alpha\beta = \beta\alpha - 2\vec{\beta}\vec{\alpha} - 2\langle \vec{\beta}, \vec{\alpha} \rangle \quad (3.147)$$

şeklindedir.

İspat: $\alpha = \sum_{k=0}^7 \alpha_k e_k, \beta = \sum_{k=0}^7 \beta_k e_k \in \mathbf{O}$ oktonyonları için,

$$\begin{aligned} \alpha\beta &= \left(\sum_{k=0}^7 \alpha_k e_k\right) \left(\sum_{k=0}^7 \beta_k e_k\right) \\ &= (\beta_0\alpha_0 - \beta_1\alpha_1 - \beta_2\alpha_2 - \beta_3\alpha_3 - \beta_4\alpha_4 - \beta_5\alpha_5 - \beta_6\alpha_6 - \beta_7\alpha_7)e_0 \\ &\quad + (\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 + \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 - \alpha_5\beta_4 + \alpha_4\beta_5 - \alpha_6\beta_7 + \alpha_7\beta_6)e_1 \\ &\quad + (\alpha_2\beta_0 + \alpha_3\beta_1 + \alpha_0\beta_2 - \alpha_1\beta_3 - \alpha_6\beta_4 - \alpha_7\beta_5 + \alpha_4\beta_6 + \alpha_5\beta_7)e_2 \\ &\quad + (\alpha_0\beta_3 + \alpha_3\beta_0 - \alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2 - \alpha_7\beta_4 + \alpha_6\beta_5 - \alpha_5\beta_6 + \alpha_4\beta_7)e_3 \\ &\quad + (\alpha_4\beta_0 + \alpha_5\beta_1 + \alpha_6\beta_2 + \alpha_7\beta_3 + \alpha_0\beta_4 - \alpha_1\beta_5 - \alpha_2\beta_6 - \alpha_3\beta_7)e_4 \\ &\quad + (\alpha_5\beta_0 - \alpha_4\beta_1 + \alpha_7\beta_2 - \alpha_6\beta_3 + \alpha_1\beta_4 + \alpha_0\beta_5 + \alpha_3\beta_6 - \alpha_2\beta_7)e_5 \\ &\quad + (\alpha_0\beta_6 + \alpha_6\beta_0 + \alpha_5\beta_3 - \alpha_3\beta_5 + \alpha_2\beta_4 - \alpha_4\beta_2 + \alpha_1\beta_7 - \alpha_7\beta_1)e_6 \\ &\quad + (\alpha_0\beta_7 + \alpha_7\beta_0 - \alpha_4\beta_3 + \alpha_3\beta_4 - \alpha_5\beta_2 + \alpha_2\beta_5 + \alpha_6\beta_1 - \alpha_1\beta_6)e_7, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta\alpha &= \left(\sum_{k=0}^7 \beta_k e_k\right) \left(\sum_{k=0}^7 \alpha_k e_k\right) \\ &= (\beta_0\alpha_0 - \beta_1\alpha_1 - \beta_2\alpha_2 - \beta_3\alpha_3 - \beta_4\alpha_4 - \beta_5\alpha_5 - \beta_6\alpha_6 - \beta_7\alpha_7)e_0 \\ &\quad + (\beta_1\alpha_0 + \beta_0\alpha_1 - \beta_3\alpha_2 + \beta_2\alpha_3 + \beta_4\alpha_5 - \beta_5\alpha_4 + \beta_7\alpha_6 - \beta_6\alpha_7)e_1 \\ &\quad + (\beta_0\alpha_2 - \beta_1\alpha_3 + \beta_2\alpha_0 + \beta_3\alpha_1 + \beta_4\alpha_6 - \beta_5\alpha_7 - \beta_6\alpha_4 - \beta_7\alpha_5)e_2 \\ &\quad + (\beta_3\alpha_0 + \beta_0\alpha_3 + \beta_1\alpha_2 - \beta_2\alpha_1 + \beta_4\alpha_7 - \beta_5\alpha_6 + \beta_6\alpha_5 - \beta_7\alpha_4)e_3 \\ &\quad + (\beta_0\alpha_4 - \beta_1\alpha_5 - \beta_2\alpha_6 - \beta_3\alpha_7 + \beta_4\alpha_0 + \beta_5\alpha_1 + \beta_6\alpha_2 + \beta_7\alpha_3)e_4 \\ &\quad + (\beta_0\alpha_5 + \beta_1\alpha_4 - \beta_2\alpha_7 + \beta_3\alpha_6 - \beta_4\alpha_1 + \beta_5\alpha_0 - \beta_6\alpha_3 + \beta_7\alpha_2)e_5 \\ &\quad + (\beta_0\alpha_6 + \beta_1\alpha_7 + \beta_2\alpha_4 - \beta_3\alpha_5 - \beta_4\alpha_2 + \beta_5\alpha_3 + \beta_6\alpha_0 - \beta_7\alpha_1)e_6 \\ &\quad + (\beta_0\alpha_7 - \beta_1\alpha_6 + \beta_2\alpha_5 + \beta_3\alpha_4 - \beta_4\alpha_3 - \beta_5\alpha_2 + \beta_6\alpha_1 + \beta_7\alpha_0)e_7, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{\beta}\vec{\alpha} &= \left(\sum_{k=1}^7 \beta_k e_k\right) \left(\sum_{k=1}^7 \alpha_k e_k\right) \\ &= (-\beta_1\alpha_1 - \beta_2\alpha_2 - \beta_3\alpha_3 - \beta_4\alpha_4 - \beta_5\alpha_5 - \beta_6\alpha_6 - \beta_7\alpha_7)e_0 \\ &\quad + (-\beta_3\alpha_2 + \beta_2\alpha_3 + \beta_4\alpha_5 - \beta_5\alpha_4 + \beta_7\alpha_6 - \beta_6\alpha_7)e_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(\beta_1\alpha_3 + \beta_3\alpha_1 + \beta_4\alpha_6 + \beta_5\alpha_7 - \beta_7\alpha_5 - \beta_6\alpha_4)e_2 \\
& +(\beta_1\alpha_2 - \beta_2\alpha_1 + \beta_6\alpha_5 - \beta_5\alpha_6 - \beta_7\alpha_4 + \beta_4\alpha_7)e_3 \\
& +(-\beta_3\alpha_7 + \beta_7\alpha_3 - \beta_1\alpha_5 + \beta_5\alpha_1 - \beta_2\alpha_6 + \beta_6\alpha_2)e_4 \\
& +(\beta_3\alpha_6 - \beta_6\alpha_3 - \beta_4\alpha_1 + \beta_1\alpha_4 + \beta_7\alpha_2 - \beta_2\alpha_7)e_5 \\
& +(-\beta_3\alpha_5 + \beta_5\alpha_3 - \beta_4\alpha_2 + \beta_2\alpha_4 - \beta_7\alpha_1 + \beta_1\alpha_7)e_6 \\
& +(\beta_3\alpha_4 - \beta_4\alpha_3 + \beta_2\alpha_5 - \beta_5\alpha_2 - \beta_1\alpha_6 + \beta_6\alpha_1)e_7
\end{aligned}$$

ve

$$\langle \vec{\beta}, \vec{\alpha} \rangle = \beta_1\alpha_1 + \beta_2\alpha_2 + \beta_3\alpha_3 + \beta_4\alpha_4 + \beta_5\alpha_5 + \beta_6\alpha_6 + \beta_7\alpha_7$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler ile (3.147) eşitliğine ulaşılır.

Teorem 3. 2. 7 $\alpha = \sum_{i=0}^7 \alpha_i e_i \in \mathbf{O} - \{0\}$, $\rho = \sum_{i=0}^7 \rho_i e_i \in \mathbf{O}$ ve $\varpi = \left(\sum_{i=0}^7 \alpha_i^2 \right)^{-\frac{1}{2}}$ olmak üzere

(3.144) ile verilen

$$\alpha(x\alpha) = (\alpha x)\alpha = \alpha x\alpha = \rho$$

lineer oktonyonik denklemi bir tek çözüme sahiptir ve bu çözüm

$$\begin{aligned}
x = \varpi & \left[\left(\left(-\sum_{i=0}^7 \alpha_i^2 + 2\alpha_0^2 \right) \rho_0 + 2\alpha_0\alpha_1\rho_1 + 2\alpha_0\alpha_2\rho_2 + 2\alpha_0\alpha_3\rho_3 + 2\alpha_0\alpha_4\rho_4 + 2\alpha_0\alpha_5\rho_5 + 2\alpha_0\alpha_6\rho_6 + 2\alpha_0\alpha_7\rho_7 \right) e_0 \right. \\
& + \left(-2\alpha_0\alpha_1\rho_0 + \left(\sum_{i=0}^7 \alpha_i^2 - 2\alpha_1^2 \right) \rho_1 - 2\alpha_1\alpha_2\rho_2 - 2\alpha_1\alpha_3\rho_3 - 2\alpha_1\alpha_4\rho_4 - 2\alpha_1\alpha_5\rho_5 - 2\alpha_1\alpha_6\rho_6 - 2\alpha_1\alpha_7\rho_7 \right) e_1 \\
& + \left(-2\alpha_0\alpha_2\rho_0 - 2\alpha_1\alpha_2\rho_1 + \left(\sum_{i=0}^7 \alpha_i^2 - 2\alpha_2^2 \right) \rho_2 - 2\alpha_2\alpha_3\rho_3 - 2\alpha_2\alpha_4\rho_4 - 2\alpha_2\alpha_5\rho_5 - 2\alpha_2\alpha_6\rho_6 - 2\alpha_2\alpha_7\rho_7 \right) e_2 \\
& + \left(-2\alpha_0\alpha_3\rho_0 - 2\alpha_1\alpha_3\rho_1 - 2\alpha_2\alpha_3\rho_2 + \left(\sum_{i=0}^7 \alpha_i^2 - 2\alpha_3^2 \right) \rho_3 - 2\alpha_3\alpha_4\rho_4 - 2\alpha_3\alpha_5\rho_5 - 2\alpha_3\alpha_6\rho_6 - 2\alpha_3\alpha_7\rho_7 \right) e_3 \\
& + \left(-2\alpha_0\alpha_4\rho_0 - 2\alpha_1\alpha_4\rho_1 - 2\alpha_2\alpha_4\rho_2 - 2\alpha_3\alpha_4\rho_3 + \left(\sum_{i=0}^7 \alpha_i^2 - 2\alpha_4^2 \right) \rho_4 - 2\alpha_4\alpha_5\rho_5 - 2\alpha_4\alpha_6\rho_6 - 2\alpha_4\alpha_7\rho_7 \right) e_4 \\
& + \left(-2\alpha_0\alpha_5\rho_0 - 2\alpha_1\alpha_5\rho_1 - 2\alpha_2\alpha_5\rho_2 - 2\alpha_3\alpha_5\rho_3 - 2\alpha_4\alpha_5\rho_4 + \left(\sum_{i=0}^7 \alpha_i^2 - 2\alpha_5^2 \right) \rho_5 - 2\alpha_5\alpha_6\rho_6 - 2\alpha_5\alpha_7\rho_7 \right) e_5 \\
& + \left(-2\alpha_0\alpha_6\rho_0 - 2\alpha_1\alpha_6\rho_1 - 2\alpha_2\alpha_6\rho_2 - 2\alpha_3\alpha_6\rho_3 - 2\alpha_4\alpha_6\rho_4 - 2\alpha_5\alpha_6\rho_5 + \left(\sum_{i=0}^7 \alpha_i^2 - 2\alpha_6^2 \right) \rho_6 - 2\alpha_6\alpha_7\rho_7 \right) e_6 \\
& \left. + \left(-2\alpha_0\alpha_7\rho_0 - 2\alpha_1\alpha_7\rho_1 - 2\alpha_2\alpha_7\rho_2 - 2\alpha_3\alpha_7\rho_3 - 2\alpha_4\alpha_7\rho_4 - 2\alpha_5\alpha_7\rho_5 - 2\alpha_6\alpha_7\rho_6 + \left(\sum_{i=0}^7 \alpha_i^2 - 2\alpha_7^2 \right) \rho_7 \right) e_7 \right]
\end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat: Lemma 3. 2. 2 den (3.144) oktonyon denkleminin sol yanı

$$\begin{aligned}
\alpha(x\alpha) &= \alpha(\alpha x - 2\vec{\alpha}\vec{x} - 2\langle\vec{\alpha}, \vec{x}\rangle) \\
&= \alpha(\alpha x) - 2\alpha(\vec{\alpha}\vec{x}) - 2\alpha\langle\vec{\alpha}, \vec{x}\rangle \\
&= \alpha[\alpha(x_0e_0 + \vec{x})] - 2\alpha(\vec{\alpha}\vec{x}) - 2\alpha\langle\vec{\alpha}, \vec{x}\rangle \\
&= \alpha(\alpha x_0e_0) + \alpha(\alpha\vec{x}) - 2\alpha(\vec{\alpha}\vec{x}) - 2\alpha\langle\vec{\alpha}, \vec{x}\rangle \\
&= (\alpha\alpha)x_0e_0 + \alpha[(\alpha_0e_0 + \vec{\alpha})\vec{x}] - 2\alpha(\vec{\alpha}\vec{x}) - 2\alpha\langle\vec{\alpha}, \vec{x}\rangle \\
&= \alpha^2x_0 + \alpha\vec{x}\alpha_0 - \alpha(\vec{\alpha}\vec{x}) - 2\alpha\langle\vec{\alpha}, \vec{x}\rangle
\end{aligned} \tag{3.148}$$

biçiminde elde edilir. (3.59), (3.60), (3.62) ve (3.63) eşitliklerinde verilen oktonyonların cebirsel özellikleri ile (3.148) eşitliği dikkate alınarak

$$\begin{aligned}
\alpha(x\alpha) &= \left[\left(-\sum_{i=0}^7 \alpha_i^2 \right) x_0 + 2\alpha_0^2 x_0 - 2\alpha_0 \sum_{i=0}^7 \alpha_i x_i \right] e_0 \\
&+ \left[\left(\sum_{i=0}^7 \alpha_i^2 \right) x_1 + 2\alpha_0 \alpha_1 x_0 - 2\alpha_1 \sum_{i=0}^7 \alpha_i x_i \right] e_1 \\
&+ \left[\left(\sum_{i=0}^7 \alpha_i^2 \right) x_2 + 2\alpha_0 \alpha_2 x_0 - 2\alpha_2 \sum_{i=0}^7 \alpha_i x_i \right] e_2 \\
&+ \left[\left(\sum_{i=0}^7 \alpha_i^2 \right) x_3 + 2\alpha_0 \alpha_3 x_0 - 2\alpha_3 \sum_{i=0}^7 \alpha_i x_i \right] e_3 \\
&+ \left[\left(\sum_{i=0}^7 \alpha_i^2 \right) x_4 + 2\alpha_0 \alpha_4 x_0 - 2\alpha_4 \sum_{i=0}^7 \alpha_i x_i \right] e_4 \\
&+ \left[\left(\sum_{i=0}^7 \alpha_i^2 \right) x_5 + 2\alpha_0 \alpha_5 x_0 - 2\alpha_5 \sum_{i=0}^7 \alpha_i x_i \right] e_5 \\
&+ \left[\left(\sum_{i=0}^7 \alpha_i^2 \right) x_6 + 2\alpha_0 \alpha_6 x_0 - 2\alpha_6 \sum_{i=0}^7 \alpha_i x_i \right] e_6 \\
&+ \left[\left(\sum_{i=0}^7 \alpha_i^2 \right) x_7 + 2\alpha_0 \alpha_7 x_0 - 2\alpha_7 \sum_{i=0}^7 \alpha_i x_i \right] e_7
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Elde edilen son eşitlikten (3.144) denklemini yeniden düzenlenirse iki oktonyonun eşitliği kuralından

$$\begin{aligned}
(-\sum_{i=0}^7 \alpha_i^2)x_0 + 2\alpha_0^2x_0 - 2\alpha_0 \sum_{i=0}^7 \alpha_i x_i &= \rho_0 \\
(\sum_{i=0}^7 \alpha_i^2)x_1 + 2\alpha_0\alpha_1x_0 - 2\alpha_1 \sum_{i=0}^7 \alpha_i x_i &= \rho_1 \\
(\sum_{i=0}^7 \alpha_i^2)x_2 + 2\alpha_0\alpha_2x_0 - 2\alpha_2 \sum_{i=0}^7 \alpha_i x_i &= \rho_2 \\
(\sum_{i=0}^7 \alpha_i^2)x_3 + 2\alpha_0\alpha_3x_0 - 2\alpha_3 \sum_{i=0}^7 \alpha_i x_i &= \rho_3 \\
(\sum_{i=0}^7 \alpha_i^2)x_4 + 2\alpha_0\alpha_4x_0 - 2\alpha_4 \sum_{i=0}^7 \alpha_i x_i &= \rho_4 \\
(\sum_{i=0}^7 \alpha_i^2)x_5 + 2\alpha_0\alpha_5x_0 - 2\alpha_5 \sum_{i=0}^7 \alpha_i x_i &= \rho_5 \\
(\sum_{i=0}^7 \alpha_i^2)x_6 + 2\alpha_0\alpha_6x_0 - 2\alpha_6 \sum_{i=0}^7 \alpha_i x_i &= \rho_6 \\
(\sum_{i=0}^7 \alpha_i^2)x_7 + 2\alpha_0\alpha_7x_0 - 2\alpha_7 \sum_{i=0}^7 \alpha_i x_i &= \rho_7
\end{aligned}$$

8 bilinmeyenli 8 tane lineer denklem elde edilir. Bu lineer denklem sistemi

$$A\vec{x} = \vec{\rho} \quad (3.149)$$

şeklinde matris-vektör formunda yazılırsa A katsayılar matrisi,

$$A = \begin{bmatrix}
-\sum_{i=0}^7 \alpha_i^2 + 2\alpha_0^2 & -2\alpha_0\alpha_1 & -2\alpha_0\alpha_2 & -2\alpha_0\alpha_3 & -2\alpha_0\alpha_4 & -2\alpha_0\alpha_5 & -2\alpha_0\alpha_6 & -2\alpha_0\alpha_7 \\
2\alpha_0\alpha_1 & \sum_{i=0}^7 \alpha_i^2 - 2\alpha_1^2 & -2\alpha_1\alpha_2 & -2\alpha_1\alpha_3 & -2\alpha_1\alpha_4 & -2\alpha_1\alpha_5 & -2\alpha_1\alpha_6 & -2\alpha_1\alpha_7 \\
2\alpha_0\alpha_2 & -2\alpha_1\alpha_2 & \sum_{i=0}^7 \alpha_i^2 - 2\alpha_2^2 & -2\alpha_2\alpha_3 & -2\alpha_2\alpha_4 & -2\alpha_2\alpha_5 & -2\alpha_2\alpha_6 & -2\alpha_2\alpha_7 \\
2\alpha_0\alpha_3 & -2\alpha_1\alpha_3 & -2\alpha_2\alpha_3 & \sum_{i=0}^7 \alpha_i^2 - 2\alpha_3^2 & -2\alpha_3\alpha_4 & -2\alpha_3\alpha_5 & -2\alpha_3\alpha_6 & -2\alpha_3\alpha_7 \\
2\alpha_0\alpha_4 & -2\alpha_1\alpha_4 & -2\alpha_2\alpha_4 & -2\alpha_3\alpha_4 & \sum_{i=0}^7 \alpha_i^2 - 2\alpha_4^2 & -2\alpha_4\alpha_5 & -2\alpha_4\alpha_6 & -2\alpha_4\alpha_7 \\
2\alpha_0\alpha_5 & -2\alpha_1\alpha_5 & -2\alpha_2\alpha_5 & -2\alpha_3\alpha_5 & -2\alpha_4\alpha_5 & \sum_{i=0}^7 \alpha_i^2 - 2\alpha_5^2 & -2\alpha_5\alpha_6 & -2\alpha_5\alpha_7 \\
2\alpha_0\alpha_6 & -2\alpha_1\alpha_6 & -2\alpha_2\alpha_6 & -2\alpha_3\alpha_6 & -2\alpha_4\alpha_6 & -2\alpha_5\alpha_6 & \sum_{i=0}^7 \alpha_i^2 - 2\alpha_6^2 & -2\alpha_6\alpha_7 \\
2\alpha_0\alpha_7 & -2\alpha_1\alpha_7 & -2\alpha_2\alpha_7 & -2\alpha_3\alpha_7 & -2\alpha_4\alpha_7 & -2\alpha_5\alpha_7 & -2\alpha_6\alpha_7 & \sum_{i=0}^7 \alpha_i^2 - 2\alpha_7^2
\end{bmatrix}$$

x bilinmeyen vektörü $\vec{x} = [x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7]^T$ ve $\vec{\rho} = [\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5, \rho_6, \rho_7]^T$

olur. A 'nın determinanı $|A| = \left(\sum_{i=0}^7 \alpha_i^2 \right)^8$ dir ve $0 \neq \alpha \in \mathbf{O}$ olduğundan $\det A \neq 0$ olup A

tersinir bir matristir. $\varpi = \left(\sum_{i=0}^7 \alpha_i^2 \right)^{-\frac{1}{2}}$ denilirse $\varpi = |A|^{-\frac{1}{4}}$ olur ve böylece A^{-1} ters matrisi,

$$A^{-1} = \varpi \begin{bmatrix} -\sum_{i=0}^7 \alpha_i^2 + 2\alpha_0^2 & 2\alpha_0\alpha_1 & 2\alpha_0\alpha_2 & 2\alpha_0\alpha_3 & 2\alpha_0\alpha_4 & 2\alpha_0\alpha_5 & 2\alpha_0\alpha_6 & 2\alpha_0\alpha_7 \\ -2\alpha_0\alpha_1 & \sum_{i=0}^7 \alpha_i^2 - 2\alpha_1^2 & -2\alpha_1\alpha_2 & -2\alpha_1\alpha_3 & -2\alpha_1\alpha_4 & -2\alpha_1\alpha_5 & -2\alpha_1\alpha_6 & -2\alpha_1\alpha_7 \\ -2\alpha_0\alpha_2 & -2\alpha_1\alpha_2 & \sum_{i=0}^7 \alpha_i^2 - 2\alpha_2^2 & -2\alpha_2\alpha_3 & -2\alpha_2\alpha_4 & -2\alpha_2\alpha_5 & -2\alpha_2\alpha_6 & -2\alpha_2\alpha_7 \\ -2\alpha_0\alpha_3 & -2\alpha_1\alpha_3 & -2\alpha_2\alpha_3 & \sum_{i=0}^7 \alpha_i^2 - 2\alpha_3^2 & -2\alpha_3\alpha_4 & -2\alpha_3\alpha_5 & -2\alpha_3\alpha_6 & -2\alpha_3\alpha_7 \\ -2\alpha_0\alpha_4 & -2\alpha_1\alpha_4 & -2\alpha_2\alpha_4 & -2\alpha_3\alpha_4 & \sum_{i=0}^7 \alpha_i^2 - 2\alpha_4^2 & -2\alpha_4\alpha_5 & -2\alpha_4\alpha_6 & -2\alpha_4\alpha_7 \\ -2\alpha_0\alpha_5 & -2\alpha_1\alpha_5 & -2\alpha_2\alpha_5 & -2\alpha_3\alpha_5 & -2\alpha_4\alpha_5 & \sum_{i=0}^7 \alpha_i^2 - 2\alpha_5^2 & -2\alpha_5\alpha_6 & -2\alpha_5\alpha_7 \\ -2\alpha_0\alpha_6 & -2\alpha_1\alpha_6 & -2\alpha_2\alpha_6 & -2\alpha_3\alpha_6 & -2\alpha_4\alpha_6 & -2\alpha_5\alpha_6 & \sum_{i=0}^7 \alpha_i^2 - 2\alpha_6^2 & -2\alpha_6\alpha_7 \\ -2\alpha_0\alpha_7 & -2\alpha_1\alpha_7 & -2\alpha_2\alpha_7 & -2\alpha_3\alpha_7 & -2\alpha_4\alpha_7 & -2\alpha_5\alpha_7 & -2\alpha_6\alpha_7 & \sum_{i=0}^7 \alpha_i^2 - 2\alpha_7^2 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

Böylece (3.149) denkleminin tek çözümünün $\vec{x} = A^{-1}\vec{\rho}$ olması bilgisinden (3.149) denkleminin $\vec{x}$ çözüm vektörü ((3.144) denkleminin x oktonyon çözümünün vektörel temsili)

$$\vec{x} = \varpi \begin{bmatrix} \left(-\sum_{i=0}^7 \alpha_i^2 + 2\alpha_0^2\right) \rho_0 + 2\alpha_0\alpha_1\rho_1 + 2\alpha_0\alpha_2\rho_2 + 2\alpha_0\alpha_3\rho_3 + 2\alpha_0\alpha_4\rho_4 + 2\alpha_0\alpha_5\rho_5 + 2\alpha_0\alpha_6\rho_6 + 2\alpha_0\alpha_7\rho_7 \\ -2\alpha_0\alpha_1\rho_0 + \left(\sum_{i=0}^7 \alpha_i^2 - 2\alpha_1^2\right) \rho_1 - 2\alpha_1\alpha_2\rho_2 - 2\alpha_1\alpha_3\rho_3 - 2\alpha_1\alpha_4\rho_4 - 2\alpha_1\alpha_5\rho_5 - 2\alpha_1\alpha_6\rho_6 - 2\alpha_1\alpha_7\rho_7 \\ -2\alpha_0\alpha_2\rho_0 - 2\alpha_1\alpha_2\rho_1 + \left(\sum_{i=0}^7 \alpha_i^2 - 2\alpha_2^2\right) \rho_2 - 2\alpha_2\alpha_3\rho_3 - 2\alpha_2\alpha_4\rho_4 - 2\alpha_2\alpha_5\rho_5 - 2\alpha_2\alpha_6\rho_6 - 2\alpha_2\alpha_7\rho_7 \\ -2\alpha_0\alpha_3\rho_0 - 2\alpha_1\alpha_3\rho_1 - 2\alpha_2\alpha_3\rho_2 + \left(\sum_{i=0}^7 \alpha_i^2 - 2\alpha_3^2\right) \rho_3 - 2\alpha_3\alpha_4\rho_4 - 2\alpha_3\alpha_5\rho_5 - 2\alpha_3\alpha_6\rho_6 - 2\alpha_3\alpha_7\rho_7 \\ -2\alpha_0\alpha_4\rho_0 - 2\alpha_1\alpha_4\rho_1 - 2\alpha_2\alpha_4\rho_2 - 2\alpha_3\alpha_4\rho_3 + \left(\sum_{i=0}^7 \alpha_i^2 - 2\alpha_4^2\right) \rho_4 - 2\alpha_4\alpha_5\rho_5 - 2\alpha_4\alpha_6\rho_6 - 2\alpha_4\alpha_7\rho_7 \\ -2\alpha_0\alpha_5\rho_0 - 2\alpha_1\alpha_5\rho_1 - 2\alpha_2\alpha_5\rho_2 - 2\alpha_3\alpha_5\rho_3 - 2\alpha_4\alpha_5\rho_4 + \left(\sum_{i=0}^7 \alpha_i^2 - 2\alpha_5^2\right) \rho_5 - 2\alpha_5\alpha_6\rho_6 - 2\alpha_5\alpha_7\rho_7 \\ -2\alpha_0\alpha_6\rho_0 - 2\alpha_1\alpha_6\rho_1 - 2\alpha_2\alpha_6\rho_2 - 2\alpha_3\alpha_6\rho_3 - 2\alpha_4\alpha_6\rho_4 - 2\alpha_5\alpha_6\rho_5 + \left(\sum_{i=0}^7 \alpha_i^2 - 2\alpha_6^2\right) \rho_6 - 2\alpha_6\alpha_7\rho_7 \\ -2\alpha_0\alpha_7\rho_0 - 2\alpha_1\alpha_7\rho_1 - 2\alpha_2\alpha_7\rho_2 - 2\alpha_3\alpha_7\rho_3 - 2\alpha_4\alpha_7\rho_4 - 2\alpha_5\alpha_7\rho_5 - 2\alpha_6\alpha_7\rho_6 + \left(\sum_{i=0}^7 \alpha_i^2 - 2\alpha_7^2\right) \rho_7 \end{bmatrix}$$

dır ki, (3.144) denkleminin x oktonyon çözümü bu temsilden yazılır.

$0 \neq \alpha$ oktonyonunun α^{-1} çarpımsal tersi vardır ve (3.144) ile verilen

$$\left[\alpha^{-1}(\alpha x \alpha)\right] \alpha^{-1} = (\alpha^{-1} \rho) \alpha^{-1}$$

denklemini ve buradan x oktonyonu

$$x = \alpha^{-1} \rho \alpha^{-1}$$

eşitliği ile elde edilir. $\alpha^{-1} \rho \alpha^{-1}$ üçlü oktonyon çarpımını elde edip x çözüm oktonyonuna ulaşmak yerine; (3.144) oktonyon denklemine denk

$$A_{8 \times 8} \vec{x} = \vec{\rho}$$

reel sistemi için üretilen ve geliştirilen metotları kullanarak ya da matlab gibi matris tabanlı çalışan bilgisayar programlarını kullanarak $\vec{x}$ çözümüne ulaşip x oktonyon çözümünü yazmak tercih edilebilir. Teorem bu yönden önem arz etmektedir.

Örnek 3. 2. 1

$$(e_0 + 4e_1 - e_2 + 3e_4 + e_5 - 7e_6 + 5e_7)x(e_0 + 4e_1 - e_2 + 3e_4 + e_5 - 7e_6 + 5e_7) = -e_0 + 2e_1 + 3e_2 + 5e_3 - 3e_4 - e_6 \quad (3.150)$$

denklemini için

$$\alpha = e_0 + 4e_1 - e_2 + 3e_4 + e_5 - 7e_6 + 5e_7 \text{ ve } \rho = -e_0 + 2e_1 + 3e_2 + 5e_3 - 3e_4 - e_6$$

olup oktonyon denkleminin

$$\alpha x \alpha = \rho$$

formunda olduğu görülmektedir. O halde, (3.150) oktonyonik denklemini

$$\begin{aligned} -100x_0 - 8x_1 + 2x_2 - 6x_4 - 2x_5 + 14x_6 - 10x_7 &= -1 \\ 8x_0 + 70x_1 + 8x_2 - 24x_4 - 8x_5 + 56x_6 - 40x_7 &= 2 \\ -2x_0 + 8x_1 + 100x_2 + 6x_4 + 2x_5 - 14x_6 + 10x_7 &= 3 \\ 102x_3 &= 5 \\ 6x_0 - 24x_1 + 6x_2 + 84x_4 - 6x_5 + 42x_6 - 30x_7 &= -3 \\ 2x_0 - 8x_1 + 2x_2 - 6x_4 + 100x_5 + 14x_6 - 10x_7 &= 0 \\ -14x_0 + 56x_1 - 14x_2 + 42x_4 + 14x_5 + 4x_6 + 70x_7 &= -1 \\ 10x_0 - 40x_1 + 10x_2 - 30x_4 - 10x_5 + 70x_6 + 52x_7 &= 0 \end{aligned}$$

8×8 gerçel lineer sisteme indirgenir.

Bu sistem $A\vec{x} = b$ formunda yazılır ve ilk olarak $\vec{x}$ vektörü elde edilir sonra da x oktonyonu

$$\begin{aligned} x = 53/5202e_0 + 47/2601e_1 + 155/5202e_2 + 5/102e_3 - 53/1734e_4 \\ - 1/2601e_5 - 37/5202e_6 - 5/2601e_7 \end{aligned}$$

şeklinde yazılır.

$\alpha = \sum_{k=0}^7 \alpha_k e_k$, $\beta = \sum_{k=0}^7 \beta_k e_k \in \mathbf{O} - \{0\}$ ve $\rho \in \mathbf{O}$ olmak üzere $x \in \mathbf{O}$ bilinmeyeni için

$$(\alpha x)\beta = \rho$$

oktanyonik denklemi dikkate alınsın. $(\alpha x)\beta = \rho$ oktanyonik denklemi Lemma 3. 2. 2'den

$$\begin{aligned} (\alpha x)\beta &= (x\alpha - 2\bar{x}\bar{\alpha} - 2\langle \bar{x}, \bar{\alpha} \rangle)\beta \\ &= (x\alpha)\beta - 2(\bar{x}\bar{\alpha})\beta - 2\langle \bar{x}, \bar{\alpha} \rangle\beta \\ &= ((x_0 + \bar{x})\alpha)\beta - 2(\bar{x}\bar{\alpha})\beta - 2\langle \bar{x}, \bar{\alpha} \rangle\beta \\ &= (\alpha\beta)x_0 + (\bar{x}(\alpha_0 + \bar{\alpha}))\beta - 2(\bar{x}\bar{\alpha})\beta - 2\langle \bar{x}, \bar{\alpha} \rangle\beta \\ &= (\alpha\beta)x_0 + (\bar{x}\beta)\alpha_0 - (\bar{x}\bar{\alpha})\beta - 2\langle \bar{x}, \bar{\alpha} \rangle\beta \end{aligned} \quad (3.151)$$

biçiminde elde edilir. (3.59), (3.60), (3.62) ve (3.63) eşitliklerinde verilen oktanyonların cebirsel özellikleri ile (3.151) eşitliği

$$\begin{aligned} (\alpha x)\beta &= \left[\left(\alpha_0\beta_0 - \sum_{k=1}^7 \alpha_k\beta_k \right) x_0 \right. \\ &\quad + (-\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0 + \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 + \alpha_4\beta_5 - \alpha_5\beta_4 + \alpha_7\beta_6 - \alpha_6\beta_7)x_1 \\ &\quad + (-\alpha_0\beta_2 - \alpha_2\beta_0 - \alpha_1\beta_3 + \alpha_3\beta_1 + \alpha_4\beta_6 - \alpha_6\beta_4 - \alpha_7\beta_5 + \alpha_5\beta_7)x_2 \\ &\quad + (-\alpha_0\beta_3 - \alpha_3\beta_0 - \alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_4\beta_7 - \alpha_7\beta_4 - \alpha_5\beta_6 + \alpha_6\beta_5)x_3 \\ &\quad + (-\alpha_0\beta_4 - \alpha_4\beta_0 - \alpha_2\beta_6 + \alpha_6\beta_2 - \alpha_1\beta_5 + \alpha_5\beta_1 + \alpha_7\beta_3 - \alpha_3\beta_7)x_4 \\ &\quad + (-\alpha_0\beta_5 - \alpha_5\beta_0 - \alpha_2\beta_7 + \alpha_7\beta_2 - \alpha_4\beta_1 + \alpha_1\beta_4 - \alpha_6\beta_3 + \alpha_3\beta_6)x_5 \\ &\quad + (-\alpha_0\beta_6 - \alpha_6\beta_0 + \alpha_2\beta_4 - \alpha_4\beta_2 - \alpha_3\beta_5 + \alpha_5\beta_3 - \alpha_7\beta_1 + \alpha_1\beta_7)x_6 \\ &\quad \left. + (-\alpha_0\beta_7 - \alpha_7\beta_0 + \alpha_2\beta_5 - \alpha_5\beta_2 - \alpha_4\beta_3 + \alpha_3\beta_4 - \alpha_1\beta_6 + \alpha_6\beta_1)x_7 \right] e_0 \\ &\quad + \left[(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 + \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 + \alpha_4\beta_5 - \alpha_5\beta_4 + \alpha_7\beta_6 - \alpha_6\beta_7)x_0 \right. \\ &\quad + \left(\sum_{k=0}^7 \alpha_k\beta_k - 2\alpha_1\beta_1 \right) x_1 \\ &\quad + (-\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2 + \alpha_0\beta_3 - \alpha_3\beta_0 + \alpha_4\beta_7 - \alpha_7\beta_4 - \alpha_5\beta_6 + \alpha_6\beta_5)x_2 \\ &\quad + (-\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1 - \alpha_0\beta_2 + \alpha_2\beta_0 - \alpha_4\beta_6 + \alpha_6\beta_4 + \alpha_7\beta_5 - \alpha_5\beta_7)x_3 \\ &\quad + (-\alpha_4\beta_1 - \alpha_1\beta_4 + \alpha_0\beta_5 - \alpha_5\beta_0 - \alpha_2\beta_7 + \alpha_7\beta_2 - \alpha_6\beta_3 + \alpha_3\beta_6)x_4 \\ &\quad \left. + (-\alpha_1\beta_5 - \alpha_5\beta_1 - \alpha_0\beta_4 + \alpha_4\beta_0 + \alpha_2\beta_6 - \alpha_6\beta_2 - \alpha_7\beta_3 + \alpha_3\beta_7)x_5 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(-\alpha_1\beta_6 - \alpha_6\beta_1 - \alpha_0\beta_7 + \alpha_7\beta_0 - \alpha_2\beta_5 + \alpha_5\beta_2 + \alpha_4\beta_3 - \alpha_3\beta_4)x_6 \\
& +(-\alpha_7\beta_1 - \alpha_1\beta_7 + \alpha_0\beta_6 - \alpha_6\beta_0 + \alpha_2\beta_4 - \alpha_4\beta_2 - \alpha_3\beta_5 + \alpha_5\beta_3)x_7]e_1 \\
& +[(\alpha_0\beta_2 + \alpha_2\beta_0 - \alpha_1\beta_3 + \alpha_3\beta_1 + \alpha_4\beta_6 - \alpha_6\beta_4 - \alpha_7\beta_5 + \alpha_5\beta_7)x_0 \\
& +(-\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2 - \alpha_0\beta_3 + \alpha_3\beta_0 - \alpha_4\beta_7 + \alpha_7\beta_4 + \alpha_5\beta_6 - \alpha_6\beta_5)x_1 \\
& +\left(\sum_{k=0}^7\alpha_k\beta_k - 2\alpha_2\beta_2\right)x_2 \\
& +(-\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 + \alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0 + \alpha_4\beta_5 - \alpha_5\beta_4 + \alpha_7\beta_6 - \alpha_6\beta_7)x_3 \\
& +(-\alpha_2\beta_4 - \alpha_4\beta_2 + \alpha_0\beta_6 - \alpha_6\beta_0 - \alpha_3\beta_5 + \alpha_5\beta_3 - \alpha_7\beta_1 + \alpha_1\beta_7)x_4 \\
& +(-\alpha_2\beta_5 - \alpha_5\beta_2 + \alpha_0\beta_7 - \alpha_7\beta_0 - \alpha_4\beta_3 + \alpha_3\beta_4 - \alpha_1\beta_6 + \alpha_6\beta_1)x_5 \\
& +(-\alpha_2\beta_6 - \alpha_6\beta_2 - \alpha_0\beta_4 + \alpha_4\beta_0 + \alpha_1\beta_5 - \alpha_5\beta_1 - \alpha_7\beta_3 + \alpha_3\beta_7)x_6 \\
& +(-\alpha_2\beta_7 - \alpha_7\beta_2 - \alpha_0\beta_5 + \alpha_5\beta_0 + \alpha_4\beta_1 - \alpha_1\beta_4 + \alpha_6\beta_3 - \alpha_3\beta_6)x_7]e_2 \\
& +[(\alpha_0\beta_3 + \alpha_3\beta_0 - \alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_4\beta_7 - \alpha_7\beta_4 - \alpha_5\beta_6 + \alpha_6\beta_5)x_0 \\
& +(-\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1 + \alpha_0\beta_2 - \alpha_2\beta_0 + \alpha_4\beta_6 - \alpha_6\beta_4 - \alpha_7\beta_5 + \alpha_5\beta_7)x_1 \\
& +(-\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 - \alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 - \alpha_4\beta_5 + \alpha_5\beta_4 - \alpha_7\beta_6 + \alpha_6\beta_7)x_2 \\
& +\left(\sum_{k=0}^7\alpha_k\beta_k - 2\alpha_3\beta_3\right)x_3 \\
& +(-\alpha_4\beta_3 - \alpha_3\beta_4 + \alpha_0\beta_7 - \alpha_7\beta_0 + \alpha_2\beta_5 - \alpha_5\beta_2 - \alpha_1\beta_6 + \alpha_6\beta_1)x_4 \\
& +(-\alpha_3\beta_5 - \alpha_5\beta_3 - \alpha_0\beta_6 + \alpha_6\beta_0 - \alpha_2\beta_4 + \alpha_4\beta_2 + \alpha_7\beta_1 - \alpha_1\beta_7)x_5 \\
& +(-\alpha_6\beta_3 - \alpha_3\beta_6 + \alpha_0\beta_5 - \alpha_5\beta_0 - \alpha_2\beta_7 + \alpha_7\beta_2 - \alpha_4\beta_1 + \alpha_1\beta_4)x_6 \\
& +(-\alpha_7\beta_3 - \alpha_3\beta_7 - \alpha_0\beta_4 + \alpha_4\beta_0 + \alpha_2\beta_6 - \alpha_6\beta_2 + \alpha_1\beta_5 - \alpha_5\beta_1)x_7]e_3 \\
& +[(\alpha_0\beta_4 + \alpha_4\beta_0 - \alpha_2\beta_6 + \alpha_6\beta_2 - \alpha_1\beta_5 + \alpha_5\beta_1 + \alpha_7\beta_3 - \alpha_3\beta_7)x_0 \\
& +(-\alpha_4\beta_1 - \alpha_1\beta_4 - \alpha_0\beta_5 + \alpha_5\beta_0 + \alpha_2\beta_7 - \alpha_7\beta_2 + \alpha_6\beta_3 - \alpha_3\beta_6)x_1 \\
& +(-\alpha_0\beta_6 + \alpha_6\beta_0 - \alpha_2\beta_4 - \alpha_4\beta_2 + \alpha_3\beta_5 - \alpha_5\beta_3 + \alpha_7\beta_1 - \alpha_1\beta_7)x_2 \\
& +(-\alpha_0\beta_7 + \alpha_7\beta_0 - \alpha_2\beta_5 + \alpha_5\beta_2 - \alpha_4\beta_3 - \alpha_3\beta_4 + \alpha_1\beta_6 - \alpha_6\beta_1)x_3 \\
& +\left(\sum_{k=0}^7\alpha_k\beta_k - 2\alpha_4\beta_4\right)x_4 \\
& +(-\alpha_4\beta_5 - \alpha_5\beta_4 + \alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0 + \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 + \alpha_7\beta_6 - \alpha_6\beta_7)x_5 \\
& +(-\alpha_4\beta_6 - \alpha_6\beta_4 + \alpha_0\beta_2 - \alpha_2\beta_0 - \alpha_1\beta_3 + \alpha_3\beta_1 - \alpha_7\beta_5 + \alpha_5\beta_7)x_6 \\
& +(\alpha_4\beta_7 - \alpha_7\beta_4 + \alpha_0\beta_3 - \alpha_3\beta_0 - \alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2 - \alpha_5\beta_6 + \alpha_6\beta_5)x_7]e_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[(\alpha_0\beta_5 + \alpha_5\beta_0 - \alpha_4\beta_1 + \alpha_1\beta_4 - \alpha_2\beta_7 + \alpha_7\beta_2 - \alpha_6\beta_3 + \alpha_3\beta_6) x_0 \right. \\
& + (-\alpha_1\beta_5 - \alpha_5\beta_1 + \alpha_0\beta_4 - \alpha_4\beta_0 - \alpha_2\beta_6 + \alpha_6\beta_2 + \alpha_7\beta_3 - \alpha_3\beta_7) x_1 \\
& + (-\alpha_2\beta_5 - \alpha_5\beta_2 - \alpha_0\beta_7 + \alpha_7\beta_0 + \alpha_4\beta_3 - \alpha_3\beta_4 + \alpha_1\beta_6 - \alpha_6\beta_1) x_2 \\
& + (-\alpha_3\beta_5 - \alpha_5\beta_3 + \alpha_0\beta_6 - \alpha_6\beta_0 + \alpha_2\beta_4 - \alpha_4\beta_2 - \alpha_7\beta_1 + \alpha_1\beta_7) x_3 \\
& + (-\alpha_4\beta_5 - \alpha_5\beta_4 - \alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 - \alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2 - \alpha_7\beta_6 + \alpha_6\beta_7) x_4 \\
& + \left(\sum_{k=0}^7 \alpha_k \beta_k - 2\alpha_5\beta_5 \right) x_5 \\
& + (-\alpha_5\beta_6 - \alpha_6\beta_5 - \alpha_0\beta_3 + \alpha_3\beta_0 + \alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2 - \alpha_4\beta_7 + \alpha_7\beta_4) x_6 \\
& + (-\alpha_7\beta_5 - \alpha_5\beta_7 + \alpha_0\beta_2 - \alpha_2\beta_0 - \alpha_1\beta_3 + \alpha_3\beta_1 + \alpha_4\beta_6 - \alpha_6\beta_4) x_7 \Big] e_5 \\
& + \left[(\alpha_0\beta_6 + \alpha_6\beta_0 + \alpha_2\beta_4 - \alpha_4\beta_2 - \alpha_3\beta_5 + \alpha_5\beta_3 - \alpha_7\beta_1 + \alpha_1\beta_7) x_0 \right. \\
& + (-\alpha_1\beta_6 - \alpha_6\beta_1 + \alpha_0\beta_7 - \alpha_7\beta_0 + \alpha_2\beta_5 - \alpha_5\beta_2 - \alpha_4\beta_3 + \alpha_3\beta_4) x_1 \\
& + (-\alpha_2\beta_6 - \alpha_6\beta_2 + \alpha_0\beta_4 - \alpha_4\beta_0 - \alpha_1\beta_5 + \alpha_5\beta_1 + \alpha_7\beta_3 - \alpha_3\beta_7) x_2 \\
& + (-\alpha_6\beta_3 - \alpha_3\beta_6 - \alpha_0\beta_5 + \alpha_5\beta_0 + \alpha_2\beta_7 - \alpha_7\beta_2 + \alpha_4\beta_1 - \alpha_1\beta_4) x_3 \\
& + (-\alpha_4\beta_6 - \alpha_6\beta_4 - \alpha_0\beta_2 + \alpha_2\beta_0 + \alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1 + \alpha_7\beta_5 - \alpha_5\beta_7) x_4 \\
& + (-\alpha_5\beta_6 - \alpha_6\beta_5 + \alpha_0\beta_3 - \alpha_3\beta_0 - \alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_4\beta_7 - \alpha_7\beta_4) x_5 \\
& + \left(\sum_{k=0}^7 \alpha_k \beta_k - 2\alpha_6\beta_6 \right) x_6 \\
& + (-\alpha_7\beta_6 - \alpha_6\beta_7 - \alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 - \alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2 - \alpha_4\beta_5 + \alpha_5\beta_4) x_7 \Big] e_6 \\
& + \left[(\alpha_0\beta_7 + \alpha_7\beta_0 + \alpha_2\beta_5 - \alpha_5\beta_2 - \alpha_4\beta_3 + \alpha_3\beta_4 - \alpha_1\beta_6 + \alpha_6\beta_1) x_0 \right. \\
& + (-\alpha_7\beta_1 - \alpha_1\beta_7 - \alpha_0\beta_6 + \alpha_6\beta_0 - \alpha_2\beta_4 + \alpha_4\beta_2 + \alpha_3\beta_5 - \alpha_5\beta_3) x_1 \\
& + (-\alpha_2\beta_7 - \alpha_7\beta_2 + \alpha_0\beta_5 - \alpha_5\beta_0 - \alpha_4\beta_1 + \alpha_1\beta_4 - \alpha_6\beta_3 + \alpha_3\beta_6) x_2 \\
& + (-\alpha_7\beta_3 - \alpha_3\beta_7 + \alpha_0\beta_4 - \alpha_4\beta_0 - \alpha_2\beta_6 + \alpha_6\beta_2 - \alpha_1\beta_5 + \alpha_5\beta_1) x_3 \\
& + (-\alpha_4\beta_7 - \alpha_7\beta_4 - \alpha_0\beta_3 + \alpha_3\beta_0 + \alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2 + \alpha_5\beta_6 - \alpha_6\beta_5) x_4 \\
& + (-\alpha_7\beta_5 - \alpha_5\beta_7 - \alpha_0\beta_2 + \alpha_2\beta_0 + \alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1 - \alpha_4\beta_6 + \alpha_6\beta_4) x_5 \\
& + (-\alpha_7\beta_6 - \alpha_6\beta_7 + \alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0 + \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 + \alpha_4\beta_5 - \alpha_5\beta_4) x_6 \\
& + \left(\sum_{k=0}^7 \alpha_k \beta_k - 2\alpha_7\beta_7 \right) x_7 \Big] e_7 \\
& = \rho_0 e_0 + \rho_1 e_1 + \rho_2 e_2 + \rho_3 e_3 + \rho_4 e_4 + \rho_5 e_5 + \rho_6 e_6 + \rho_7 e_7
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Elde edilen son eşitlikten (3.145) denklemi yeniden düzenlenir ve iki

oktonyonun eşitliği hatırlanırsa

$$\begin{aligned}
m12 &= \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 + \alpha_4\beta_5 - \alpha_5\beta_4 + \alpha_7\beta_6 - \alpha_6\beta_7, \\
m13 &= -\alpha_1\beta_3 + \alpha_3\beta_1 + \alpha_4\beta_6 - \alpha_6\beta_4 - \alpha_7\beta_5 + \alpha_5\beta_7, \\
m14 &= -\alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_4\beta_7 - \alpha_7\beta_4 - \alpha_5\beta_6 + \alpha_6\beta_5, \\
m15 &= -\alpha_2\beta_6 + \alpha_6\beta_2 - \alpha_1\beta_5 + \alpha_5\beta_1 + \alpha_7\beta_3 - \alpha_3\beta_7, \\
m16 &= -\alpha_2\beta_7 + \alpha_7\beta_2 - \alpha_4\beta_1 + \alpha_1\beta_4 - \alpha_6\beta_3 + \alpha_3\beta_6, \\
m17 &= \alpha_2\beta_5 - \alpha_5\beta_2 - \alpha_4\beta_3 + \alpha_3\beta_4 - \alpha_1\beta_6 + \alpha_6\beta_1, \\
m18 &= \alpha_2\beta_5 - \alpha_5\beta_2 - \alpha_4\beta_3 + \alpha_3\beta_4 - \alpha_1\beta_6 + \alpha_6\beta_1, \\
m23 &= \alpha_0\beta_3 - \alpha_3\beta_0 + \alpha_4\beta_7 - \alpha_7\beta_4 - \alpha_5\beta_6 + \alpha_6\beta_5, \\
m24 &= -\alpha_0\beta_2 + \alpha_2\beta_0 - \alpha_4\beta_6 + \alpha_6\beta_4 + \alpha_7\beta_5 - \alpha_5\beta_7, \\
m25 &= \alpha_0\beta_5 - \alpha_5\beta_0 - \alpha_2\beta_7 + \alpha_7\beta_2 - \alpha_6\beta_3 + \alpha_3\beta_6, \\
m26 &= -\alpha_0\beta_4 + \alpha_4\beta_0 + \alpha_2\beta_6 - \alpha_6\beta_2 - \alpha_7\beta_3 + \alpha_3\beta_7, \\
m27 &= -\alpha_0\beta_7 + \alpha_7\beta_0 - \alpha_2\beta_5 + \alpha_5\beta_2 + \alpha_4\beta_3 - \alpha_3\beta_4, \\
m28 &= \alpha_0\beta_6 - \alpha_6\beta_0 + \alpha_2\beta_4 - \alpha_4\beta_2 - \alpha_3\beta_5 + \alpha_5\beta_3, \\
m34 &= \alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0 + \alpha_4\beta_5 - \alpha_5\beta_4 + \alpha_7\beta_6 - \alpha_6\beta_7, \\
m35 &= \alpha_0\beta_6 - \alpha_6\beta_0 - \alpha_3\beta_5 + \alpha_5\beta_3 - \alpha_7\beta_1 + \alpha_1\beta_7, \\
m36 &= \alpha_0\beta_7 - \alpha_7\beta_0 - \alpha_4\beta_3 + \alpha_3\beta_4 - \alpha_1\beta_6 + \alpha_6\beta_1, \\
m37 &= -\alpha_0\beta_4 + \alpha_4\beta_0 + \alpha_1\beta_5 - \alpha_5\beta_1 - \alpha_7\beta_3 + \alpha_3\beta_7, \\
m38 &= -\alpha_0\beta_5 + \alpha_5\beta_0 + \alpha_4\beta_1 - \alpha_1\beta_4 + \alpha_6\beta_3 - \alpha_3\beta_6, \\
m45 &= \alpha_0\beta_7 - \alpha_7\beta_0 + \alpha_2\beta_5 - \alpha_5\beta_2 - \alpha_1\beta_6 + \alpha_6\beta_1, \\
m46 &= -\alpha_0\beta_6 + \alpha_6\beta_0 - \alpha_2\beta_4 + \alpha_4\beta_2 + \alpha_7\beta_1 - \alpha_1\beta_7, \\
m47 &= \alpha_0\beta_5 - \alpha_5\beta_0 - \alpha_2\beta_7 + \alpha_7\beta_2 - \alpha_4\beta_1 + \alpha_1\beta_4, \\
m48 &= -\alpha_0\beta_4 + \alpha_4\beta_0 + \alpha_2\beta_6 - \alpha_6\beta_2 + \alpha_1\beta_5 - \alpha_5\beta_1, \\
m56 &= \alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0 + \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 + \alpha_7\beta_6 - \alpha_6\beta_7, \\
m57 &= \alpha_0\beta_2 - \alpha_2\beta_0 - \alpha_1\beta_3 + \alpha_3\beta_1 - \alpha_7\beta_5 + \alpha_5\beta_7, \\
m58 &= \alpha_0\beta_3 - \alpha_3\beta_0 - \alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2 - \alpha_5\beta_6 + \alpha_6\beta_5, \\
m67 &= -\alpha_0\beta_3 + \alpha_3\beta_0 + \alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2 - \alpha_4\beta_7 + \alpha_7\beta_4, \\
m68 &= \alpha_0\beta_2 - \alpha_2\beta_0 - \alpha_1\beta_3 + \alpha_3\beta_1 + \alpha_4\beta_6 - \alpha_6\beta_4, \\
m78 &= -\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 - \alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2 - \alpha_4\beta_5 + \alpha_5\beta_4,
\end{aligned}$$

atamaları ile 8×8 tipinde

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_0\beta_0 - \sum_{k=1}^7 \alpha_k\beta_k & -\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0 + m12 & -\alpha_0\beta_2 - \alpha_2\beta_0 + m13 & -\alpha_0\beta_3 - \alpha_3\beta_0 + m14 & -\alpha_0\beta_4 - \alpha_4\beta_0 + m15 & -\alpha_0\beta_5 - \alpha_5\beta_0 + m16 & -\alpha_0\beta_6 - \alpha_6\beta_0 + m17 & -\alpha_0\beta_7 - \alpha_7\beta_0 + m18 \\ \alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 + m12 & \sum_{k=0}^7 \alpha_k\beta_k - 2\alpha_1\beta_1 & -\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2 + m23 & -\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1 + m24 & -\alpha_4\beta_1 + \alpha_1\beta_4 + m25 & -\alpha_1\beta_5 - \alpha_5\beta_1 + m26 & -\alpha_1\beta_6 - \alpha_6\beta_1 + m27 & -\alpha_7\beta_1 - \alpha_1\beta_7 + m28 \\ \alpha_0\beta_2 + \alpha_2\beta_0 + m13 & -\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2 - m23 & \sum_{k=0}^7 \alpha_k\beta_k - 2\alpha_2\beta_2 & -\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 + m34 & -\alpha_2\beta_4 - \alpha_4\beta_2 + m35 & -\alpha_2\beta_5 - \alpha_5\beta_2 + m36 & -\alpha_2\beta_6 - \alpha_6\beta_2 + m37 & -\alpha_2\beta_7 - \alpha_7\beta_2 + m38 \\ \alpha_0\beta_3 + \alpha_3\beta_0 + m14 & -\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1 - m24 & -\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 - m34 & \sum_{k=0}^7 \alpha_k\beta_k - 2\alpha_3\beta_3 & -\alpha_4\beta_3 - \alpha_3\beta_4 + m45 & -\alpha_3\beta_5 - \alpha_5\beta_3 + m46 & -\alpha_6\beta_3 - \alpha_3\beta_6 + m47 & -\alpha_7\beta_3 - \alpha_3\beta_7 + m48 \\ \alpha_0\beta_4 + \alpha_4\beta_0 + m15 & -\alpha_4\beta_1 - \alpha_1\beta_4 - m25 & -\alpha_2\beta_4 - \alpha_4\beta_2 - m35 & -\alpha_4\beta_3 - \alpha_3\beta_4 - m45 & \sum_{k=0}^7 \alpha_k\beta_k - 2\alpha_4\beta_4 & -\alpha_4\beta_5 - \alpha_5\beta_4 + m56 & -\alpha_4\beta_6 - \alpha_6\beta_4 + m57 & \alpha_4\beta_7 - \alpha_7\beta_4 + m58 \\ \alpha_0\beta_5 + \alpha_5\beta_0 + m16 & -\alpha_1\beta_5 - \alpha_5\beta_1 - m26 & -\alpha_2\beta_5 - \alpha_5\beta_2 - m36 & -\alpha_3\beta_5 - \alpha_5\beta_3 - m46 & -\alpha_4\beta_5 - \alpha_5\beta_4 - m56 & \sum_{k=0}^7 \alpha_k\beta_k - 2\alpha_5\beta_5 & -\alpha_5\beta_6 - \alpha_6\beta_5 + m67 & -\alpha_7\beta_5 - \alpha_5\beta_7 + m68 \\ \alpha_0\beta_6 + \alpha_6\beta_0 + m17 & -\alpha_1\beta_6 - \alpha_6\beta_1 - m27 & -\alpha_2\beta_6 - \alpha_6\beta_2 - m37 & -\alpha_6\beta_3 - \alpha_3\beta_6 - m47 & -\alpha_4\beta_6 - \alpha_6\beta_4 - m57 & -\alpha_5\beta_6 - \alpha_6\beta_5 - m67 & \sum_{k=0}^7 \alpha_k\beta_k - 2\alpha_6\beta_6 & -\alpha_7\beta_6 - \alpha_6\beta_7 + m78 \\ \alpha_0\beta_7 + \alpha_7\beta_0 + m18 & -\alpha_7\beta_1 - \alpha_1\beta_7 - m28 & -\alpha_2\beta_7 - \alpha_7\beta_2 - m38 & -\alpha_7\beta_3 - \alpha_3\beta_7 + m48 & \alpha_4\beta_7 - \alpha_7\beta_4 - m58 & -\alpha_7\beta_5 - \alpha_5\beta_7 - m68 & -\alpha_7\beta_6 - \alpha_6\beta_7 - m78 & \sum_{k=0}^7 \alpha_k\beta_k - 2\alpha_7\beta_7 \end{bmatrix}$$

katsayı matrisli, $\vec{x} = [x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7]^T$ ve $\vec{\rho} = [\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5, \rho_6, \rho_7]^T$

vektörlü $A_{8 \times 8} \vec{x} = \vec{\rho}$ gerçel sistemine ulaşılır.

Sonraki aşama, gerçel sistemlerinin varlığı, tekliğinin belirlenmesi ve çözümlerinin elde edilmeleri üzerine geliştirilen metodları kullanmak ya da bir bilgisayar programından faydalanmak olacaktır.

Örnek 3. 2. 2

$$\left((e_0 - 2e_1 + 3e_3 + 5e_4 - e_5 - 6e_6 + e_7) x \right) (3e_0 - e_1 - 2e_3 + e_4 - 2e_6 - 4e_7) = e_0 - 2e_1 + 3e_2 + 6e_3 + 5e_4 - 2e_5 + 4e_6 + 8e_7 \quad (3.152)$$

oktonyonik denklemi için

$$\alpha = e_0 - 2e_1 + 3e_3 + 5e_4 - e_5 - 6e_6 + e_7,$$

$$\beta = 3e_0 - e_1 - 2e_3 + e_4 - 2e_6 - 4e_7,$$

ve

$$\rho = e_0 - 2e_1 + 3e_2 + 6e_3 + 5e_4 - 2e_5 + 4e_6 + 8e_7$$

olup (3.152) oktonyonik denkleminin

$$(\alpha x)\beta = \rho$$

formunda olduğu görülmektedir. O halde, (3.152) oktonyonik denklemi

$$\begin{aligned} -6x_0 - 18x_1 - 18x_2 - 30x_3 - 5x_4 - 12x_5 + 31x_6 + 16x_7 &= 1 \\ -32x_0 + 8x_1 - 34x_2 - x_3 - 8x_4 + 3x_5 - 16x_6 + 11x_7 &= -2 \\ -7x_0 + 34x_1 + 12x_2 - 20x_3 + 27x_4 + 8x_5 + 3x_6 + 12x_7 &= 3 \\ -16x_0 - x_1 + 20x_2 + 24x_3 + 2x_4 - 27x_5 + 27x_7 &= 6 \\ 27x_0 + 21x_1 - 27x_2 + 12x_3 + 2x_4 - 20x_5 + 13x_6 + 6x_7 &= 5 \\ -18x_0 - 5x_1 - 8x_2 + 23x_3 + 22x_4 + 12x_5 + 30x_6 - 15x_7 &= -2 \\ -9x_0 - 4x_1 - 3x_2 - 12x_3 + 19x_4 - 34x_5 - 12x_6 - 28x_7 &= 4 \\ 14x_0 - 25x_1 - 12x_2 + x_3 + 32x_4 + 7x_5 - 16x_6 + 20x_7 &= 8 \end{aligned}$$

şeklinde 8×8 gerçel sisteme indirgenir ki, bu sistem

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 3953/56595 \\ -233/18865 \\ -5/1386 \\ 131/11319 \\ 4607/30870 \\ -1510/11319 \\ -12629/339570 \\ 3772/33957 \end{bmatrix}$$

şeklinde tek çözüme sahiptir ve bu çözüm aynı zamanda (3.152) oktonyon denkleminin çözümünün vektörel temsili olup (3.152) denkleminin x oktonyon çözümü

$$\begin{aligned} x &= 3953/56595e_0 - 233/18865e_1 - 5/1386e_2 + 131/11319e_3 \\ &\quad + 4607/30870e_4 - 1510/11319e_5 - 12629/339570e_6 + 3772/33957e_7 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

$\alpha = \sum_{k=0}^7 \alpha_k e_k$, $\beta = \sum_{k=0}^7 \beta_k e_k \in \mathbf{O} - \{0\}$ ve $\rho \in \mathbf{O}$ olmak üzere $x \in \mathbf{O}$ bilinmeyeni için

$$\alpha(x\beta) = \rho$$

oktonyonik denklemi dikkate alınsın. $\alpha(x\beta) = \rho$ oktonyonik denklemi Lemma 3. 2. 2'den

$$\begin{aligned}
 \alpha(x\beta) &= \alpha(\beta x - 2\bar{\beta}\bar{x} - 2\langle \bar{\beta}, \bar{x} \rangle) \\
 &= \alpha(\beta x) - 2\alpha(\bar{\beta}\bar{x}) - 2\alpha\langle \bar{\beta}, \bar{x} \rangle \\
 &= \alpha(\beta(x_0 + \bar{x})) - 2\alpha(\bar{\beta}\bar{x}) - 2\alpha\langle \bar{\beta}, \bar{x} \rangle \\
 &= (\alpha\beta)x_0 + \alpha(\beta\bar{x}) - 2\alpha(\bar{\beta}\bar{x}) - 2\alpha\langle \bar{\beta}, \bar{x} \rangle \\
 &= (\alpha\beta)x_0 + \alpha((\beta_0 + \bar{\beta})\bar{x}) - 2\alpha\langle \bar{\beta}, \bar{x} \rangle - 2\alpha\langle \bar{\beta}, \bar{x} \rangle \\
 &= (\alpha\beta)x_0 + (\alpha\bar{x})\beta_0 - \alpha\langle \bar{\beta}, \bar{x} \rangle - 2\alpha\langle \bar{\beta}, \bar{x} \rangle
 \end{aligned} \tag{3.153}$$

şeklinde elde edilir. (3.59), (3.60), (3.62) ve (3.63) eşitliklerinde verilen oktonyonların cebirsel özellikleri ile (3.153) eşitliği

$$\begin{aligned}
 \alpha(x\beta) &= \left[\left(\alpha_0\beta_0 - \sum_{k=1}^7 \alpha_k\beta_k \right) x_0 \right. \\
 &\quad + (-\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0 + \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 + \alpha_4\beta_5 - \alpha_5\beta_4 + \alpha_7\beta_6 - \alpha_6\beta_7) x_1 \\
 &\quad + (-\alpha_0\beta_2 - \alpha_2\beta_0 - \alpha_1\beta_3 + \alpha_3\beta_1 + \alpha_4\beta_6 - \alpha_6\beta_4 - \alpha_7\beta_5 + \alpha_5\beta_7) x_2 \\
 &\quad + (-\alpha_0\beta_3 - \alpha_3\beta_0 - \alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_4\beta_7 - \alpha_7\beta_4 - \alpha_5\beta_6 + \alpha_6\beta_5) x_3 \\
 &\quad + (-\alpha_0\beta_4 - \alpha_4\beta_0 - \alpha_2\beta_6 + \alpha_6\beta_2 - \alpha_1\beta_5 + \alpha_5\beta_1 + \alpha_7\beta_3 - \alpha_3\beta_7) x_4 \\
 &\quad + (-\alpha_0\beta_5 - \alpha_5\beta_0 - \alpha_2\beta_7 + \alpha_7\beta_2 - \alpha_4\beta_1 + \alpha_1\beta_4 - \alpha_6\beta_3 + \alpha_3\beta_6) x_5 \\
 &\quad + (-\alpha_0\beta_6 - \alpha_6\beta_0 + \alpha_2\beta_4 - \alpha_4\beta_2 - \alpha_3\beta_5 + \alpha_5\beta_3 - \alpha_7\beta_1 + \alpha_1\beta_7) x_6 \\
 &\quad \left. + (-\alpha_0\beta_7 - \alpha_7\beta_0 + \alpha_2\beta_5 - \alpha_5\beta_2 - \alpha_4\beta_3 + \alpha_3\beta_4 - \alpha_1\beta_6 + \alpha_6\beta_1) x_7 \right] e_0 \\
 &\quad + \left[(\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 + \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 + \alpha_4\beta_5 - \alpha_5\beta_4 + \alpha_7\beta_6 - \alpha_6\beta_7) x_0 \right. \\
 &\quad \left. + \left(\sum_{k=0}^7 \alpha_k\beta_k - 2\alpha_1\beta_1 \right) x_1 \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(-\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2 + \alpha_0\beta_3 - \alpha_3\beta_0 - \alpha_4\beta_7 + \alpha_7\beta_4 + \alpha_5\beta_6 - \alpha_6\beta_5)x_2 \\
& +(-\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1 - \alpha_0\beta_2 + \alpha_2\beta_0 - \alpha_4\beta_6 + \alpha_6\beta_4 - \alpha_7\beta_5 + \alpha_5\beta_7)x_3 \\
& +(-\alpha_4\beta_1 - \alpha_1\beta_4 + \alpha_0\beta_5 - \alpha_5\beta_0 + \alpha_2\beta_7 - \alpha_7\beta_2 + \alpha_6\beta_3 - \alpha_3\beta_6)x_4 \\
& +(-\alpha_1\beta_5 - \alpha_5\beta_1 - \alpha_0\beta_4 + \alpha_4\beta_0 - \alpha_2\beta_6 + \alpha_6\beta_2 + \alpha_7\beta_3 - \alpha_3\beta_7)x_5 \\
& +(-\alpha_1\beta_6 - \alpha_6\beta_1 - \alpha_0\beta_7 + \alpha_7\beta_0 + \alpha_2\beta_5 - \alpha_5\beta_2 - \alpha_4\beta_3 + \alpha_3\beta_4)x_6 \\
& +(-\alpha_7\beta_1 - \alpha_1\beta_7 + \alpha_0\beta_6 - \alpha_6\beta_0 - \alpha_2\beta_4 + \alpha_4\beta_2 + \alpha_3\beta_5 - \alpha_5\beta_3)x_7]e_1 \\
& +[(\alpha_0\beta_2 + \alpha_2\beta_0 - \alpha_1\beta_3 + \alpha_3\beta_1 + \alpha_4\beta_6 - \alpha_6\beta_4 - \alpha_7\beta_5 + \alpha_5\beta_7)x_0 \\
& +(-\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2 - \alpha_0\beta_3 + \alpha_3\beta_0 + \alpha_4\beta_7 - \alpha_7\beta_4 - \alpha_5\beta_6 + \alpha_6\beta_5)x_1 \\
& +\left(\sum_{k=0}^7\alpha_k\beta_k - 2\alpha_2\beta_2\right)x_2 \\
& +(-\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 + \alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0 - \alpha_4\beta_5 + \alpha_5\beta_4 - \alpha_7\beta_6 + \alpha_6\beta_7)x_3 \\
& +(-\alpha_2\beta_4 - \alpha_4\beta_2 + \alpha_0\beta_6 - \alpha_6\beta_0 + \alpha_3\beta_5 - \alpha_5\beta_3 + \alpha_7\beta_1 - \alpha_1\beta_7)x_4 \\
& +(-\alpha_2\beta_5 - \alpha_5\beta_2 + \alpha_0\beta_7 - \alpha_7\beta_0 + \alpha_4\beta_3 - \alpha_3\beta_4 + \alpha_1\beta_6 - \alpha_6\beta_1)x_5 \\
& +(-\alpha_2\beta_6 - \alpha_6\beta_2 - \alpha_0\beta_4 + \alpha_4\beta_0 - \alpha_1\beta_5 + \alpha_5\beta_1 + \alpha_7\beta_3 - \alpha_3\beta_7)x_6 \\
& +(-\alpha_2\beta_7 - \alpha_7\beta_2 - \alpha_0\beta_5 + \alpha_5\beta_0 - \alpha_4\beta_1 + \alpha_1\beta_4 - \alpha_6\beta_3 + \alpha_3\beta_6)x_7]e_2 \\
& +[(\alpha_0\beta_3 + \alpha_3\beta_0 - \alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_4\beta_7 - \alpha_7\beta_4 - \alpha_5\beta_6 + \alpha_6\beta_5)x_0 \\
& +(-\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1 + \alpha_0\beta_2 - \alpha_2\beta_0 - \alpha_4\beta_6 + \alpha_6\beta_4 + \alpha_7\beta_5 - \alpha_5\beta_7)x_1 \\
& +(-\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 + \alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 + \alpha_4\beta_5 - \alpha_5\beta_4 + \alpha_7\beta_6 - \alpha_6\beta_7)x_2 \\
& +\left(\sum_{k=0}^7\alpha_k\beta_k - 2\alpha_3\beta_3\right)x_3 \\
& +(-\alpha_4\beta_3 - \alpha_3\beta_4 - \alpha_0\beta_7 + \alpha_7\beta_0 - \alpha_2\beta_5 + \alpha_5\beta_2 + \alpha_1\beta_6 - \alpha_6\beta_1)x_4 \\
& +(-\alpha_3\beta_5 - \alpha_5\beta_3 - \alpha_0\beta_6 + \alpha_6\beta_0 + \alpha_2\beta_4 - \alpha_4\beta_2 - \alpha_7\beta_1 + \alpha_1\beta_7)x_5 \\
& +(-\alpha_6\beta_3 - \alpha_3\beta_6 - \alpha_2\beta_7 - \alpha_7\beta_2 + \alpha_0\beta_5 - \alpha_5\beta_0 + \alpha_4\beta_1 - \alpha_1\beta_4)x_6 \\
& +(-\alpha_7\beta_3 - \alpha_3\beta_7 - \alpha_0\beta_4 + \alpha_4\beta_0 - \alpha_2\beta_6 + \alpha_6\beta_2 + \alpha_1\beta_5 - \alpha_5\beta_1)x_7]e_3 \\
& +[(\alpha_0\beta_4 + \alpha_4\beta_0 + \alpha_7\beta_3 - \alpha_3\beta_7 - \alpha_2\beta_6 + \alpha_6\beta_2 - \alpha_1\beta_5 + \alpha_5\beta_1)x_0 \\
& +(\alpha_5\beta_0 - \alpha_0\beta_5 - \alpha_6\beta_3 + \alpha_3\beta_6 - \alpha_2\beta_7 + \alpha_7\beta_2 - \alpha_4\beta_1 - \alpha_1\beta_4)x_1 \\
& +(-\alpha_0\beta_6 + \alpha_6\beta_0 - \alpha_3\beta_5 + \alpha_5\beta_3 - \alpha_2\beta_4 - \alpha_4\beta_2 - \alpha_7\beta_1 + \alpha_1\beta_7)x_2 \\
& +(-\alpha_0\beta_7 + \alpha_7\beta_0 - \alpha_4\beta_3 - \alpha_3\beta_4 + \alpha_2\beta_5 - \alpha_5\beta_2 - \alpha_1\beta_6 + \alpha_6\beta_1)x_3 \\
& +\left(\sum_{k=0}^7\alpha_k\beta_k - 2\alpha_4\beta_4\right)x_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(-\alpha_4\beta_5 - \alpha_5\beta_4 + \alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0 - \alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2 - \alpha_7\beta_6 + \alpha_6\beta_7)x_5 \\
& +(-\alpha_4\beta_6 - \alpha_6\beta_4 + \alpha_0\beta_2 - \alpha_2\beta_0 + \alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1 + \alpha_7\beta_5 - \alpha_5\beta_7)x_6 \\
& +(-\alpha_4\beta_7 - \alpha_7\beta_4 + \alpha_0\beta_3 - \alpha_3\beta_0 + \alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2 + \alpha_5\beta_6 - \alpha_6\beta_5)x_7]e_4 \\
& +[(\alpha_5\beta_0 + \alpha_0\beta_5 - \alpha_6\beta_3 + \alpha_3\beta_6 - \alpha_2\beta_7 + \alpha_7\beta_2 - \alpha_4\beta_1 + \alpha_1\beta_4)x_0 \\
& +(\alpha_0\beta_4 - \alpha_4\beta_0 - \alpha_7\beta_3 + \alpha_3\beta_7 + \alpha_2\beta_6 - \alpha_6\beta_2 - \alpha_1\beta_5 - \alpha_5\beta_1)x_1 \\
& +(-\alpha_0\beta_7 + \alpha_7\beta_0 - \alpha_4\beta_3 + \alpha_3\beta_4 - \alpha_2\beta_5 - \alpha_5\beta_2 - \alpha_1\beta_6 + \alpha_6\beta_1)x_2 \\
& +(\alpha_0\beta_6 - \alpha_6\beta_0 - \alpha_3\beta_5 - \alpha_5\beta_3 - \alpha_2\beta_4 + \alpha_4\beta_2 + \alpha_7\beta_1 - \alpha_1\beta_7)x_3 \\
& +(-\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 + \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 - \alpha_4\beta_5 - \alpha_5\beta_4 + \alpha_7\beta_6 - \alpha_6\beta_7)x_4 \\
& +\left(\sum_{k=0}^7\alpha_k\beta_k - 2\alpha_5\beta_5\right)x_5 \\
& +(-\alpha_5\beta_6 - \alpha_6\beta_5 - \alpha_0\beta_3 + \alpha_3\beta_0 - \alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2 + \alpha_4\beta_7 - \alpha_7\beta_4)x_6 \\
& +(-\alpha_7\beta_5 - \alpha_5\beta_7 + \alpha_0\beta_2 - \alpha_2\beta_0 + \alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1 - \alpha_4\beta_6 + \alpha_6\beta_4)x_7]e_5 \\
& +[(\alpha_0\beta_6 - \alpha_6\beta_0 - \alpha_3\beta_5 + \alpha_5\beta_3 + \alpha_2\beta_4 - \alpha_4\beta_2 - \alpha_7\beta_1 + \alpha_1\beta_7)x_0 \\
& +(\alpha_0\beta_7 - \alpha_7\beta_0 + \alpha_4\beta_3 - \alpha_3\beta_4 - \alpha_2\beta_5 + \alpha_5\beta_2 - \alpha_1\beta_6 - \alpha_6\beta_1)x_1 \\
& +(\alpha_0\beta_4 - \alpha_4\beta_0 - \alpha_7\beta_3 + \alpha_3\beta_7 - \alpha_2\beta_6 - \alpha_6\beta_2 + \alpha_1\beta_5 - \alpha_5\beta_1)x_2 \\
& +(\alpha_5\beta_0 - \alpha_0\beta_5 - \alpha_6\beta_3 - \alpha_3\beta_6 - \alpha_2\beta_7 + \alpha_7\beta_2 - \alpha_4\beta_1 + \alpha_1\beta_4)x_3 \\
& +(\alpha_2\beta_0 - \alpha_0\beta_2 - \alpha_1\beta_3 + \alpha_3\beta_1 - \alpha_4\beta_6 - \alpha_6\beta_4 - \alpha_7\beta_5 + \alpha_5\beta_7)x_4 \\
& +(\alpha_0\beta_3 - \alpha_3\beta_0 + \alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2 - \alpha_4\beta_7 - \alpha_7\beta_4 + \alpha_5\beta_6 - \alpha_6\beta_5)x_5 \\
& +\left(\sum_{k=0}^7\alpha_k\beta_k - 2\alpha_6\beta_6\right)x_6 \\
& +(-\alpha_7\beta_6 - \alpha_6\beta_7 + \alpha_1\beta_0 - \alpha_0\beta_1 + \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 + \alpha_4\beta_5 - \alpha_5\beta_4)x_7]e_6 \\
& +[(\alpha_0\beta_7 + \alpha_7\beta_0 - \alpha_4\beta_3 + \alpha_3\beta_4 + \alpha_2\beta_5 - \alpha_5\beta_2 - \alpha_1\beta_6 + \alpha_6\beta_1)x_0 \\
& +(\alpha_6\beta_0 - \alpha_0\beta_6 - \alpha_3\beta_5 + \alpha_5\beta_3 + \alpha_2\beta_4 - \alpha_4\beta_2 - \alpha_7\beta_1 - \alpha_1\beta_7)x_1 \\
& +(\alpha_0\beta_5 - \alpha_5\beta_0 + \alpha_6\beta_3 - \alpha_3\beta_6 - \alpha_2\beta_7 - \alpha_7\beta_2 + \alpha_4\beta_1 - \alpha_1\beta_4)x_2 \\
& +(\alpha_0\beta_4 - \alpha_4\beta_0 - \alpha_7\beta_3 - \alpha_3\beta_7 + \alpha_2\beta_6 - \alpha_6\beta_2 + \alpha_1\beta_5 - \alpha_5\beta_1)x_3 \\
& +(\alpha_3\beta_0 - \alpha_0\beta_3 - \alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2 - \alpha_4\beta_7 - \alpha_7\beta_4 - \alpha_5\beta_6 + \alpha_6\beta_5)x_4 \\
& +(\alpha_2\beta_0 - \alpha_0\beta_2 - \alpha_1\beta_3 + \alpha_3\beta_1 + \alpha_4\beta_6 - \alpha_6\beta_4 - \alpha_7\beta_5 - \alpha_5\beta_7)x_5 \\
& +(\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0 - \alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2 - \alpha_4\beta_5 + \alpha_5\beta_4 - \alpha_7\beta_6 - \alpha_6\beta_7)x_6 \\
& +\left(\sum_{k=0}^7\alpha_k\beta_k - 2\alpha_7\beta_7\right)x_7]e_7
\end{aligned}$$

$$= \rho_0 e_0 + \rho_1 e_1 + \rho_2 e_2 + \rho_3 e_3 + \rho_4 e_4 + \rho_5 e_5 + \rho_6 e_6 + \rho_7 e_7$$

şeklinde yazılır. Elde edilen son eşitlikten (3.146) denklemi yeniden düzenlenir ve iki oktonyonun eşitliği hatırlanırsa

$$\begin{aligned}
m12 &= \alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2 + \alpha_4 \beta_5 - \alpha_5 \beta_4 + \alpha_7 \beta_6 - \alpha_6 \beta_7, \\
m13 &= -\alpha_1 \beta_3 + \alpha_3 \beta_1 + \alpha_4 \beta_6 - \alpha_6 \beta_4 - \alpha_7 \beta_5 + \alpha_5 \beta_7, \\
m14 &= -\alpha_2 \beta_1 + \alpha_1 \beta_2 + \alpha_4 \beta_7 - \alpha_7 \beta_4 - \alpha_5 \beta_6 + \alpha_6 \beta_5, \\
m15 &= -\alpha_2 \beta_6 + \alpha_6 \beta_2 - \alpha_1 \beta_5 + \alpha_5 \beta_1 + \alpha_7 \beta_3 - \alpha_3 \beta_7, \\
m16 &= -\alpha_2 \beta_7 + \alpha_7 \beta_2 - \alpha_4 \beta_1 + \alpha_1 \beta_4 - \alpha_6 \beta_3 + \alpha_3 \beta_6, \\
m17 &= \alpha_2 \beta_4 - \alpha_4 \beta_2 - \alpha_3 \beta_5 + \alpha_5 \beta_3 - \alpha_7 \beta_1 + \alpha_1 \beta_7, \\
m18 &= \alpha_2 \beta_5 - \alpha_5 \beta_2 - \alpha_4 \beta_3 + \alpha_3 \beta_4 - \alpha_1 \beta_6 + \alpha_6 \beta_1, \\
m23 &= \alpha_0 \beta_3 - \alpha_3 \beta_0 - \alpha_4 \beta_7 + \alpha_7 \beta_4 + \alpha_5 \beta_6 - \alpha_6 \beta_5, \\
m24 &= -\alpha_0 \beta_2 + \alpha_2 \beta_0 - \alpha_4 \beta_6 + \alpha_6 \beta_4 - \alpha_7 \beta_5 + \alpha_5 \beta_7, \\
m25 &= \alpha_0 \beta_5 - \alpha_5 \beta_0 + \alpha_2 \beta_7 - \alpha_7 \beta_2 + \alpha_6 \beta_3 - \alpha_3 \beta_6, \\
m26 &= -\alpha_0 \beta_4 + \alpha_4 \beta_0 - \alpha_2 \beta_6 + \alpha_6 \beta_2 + \alpha_7 \beta_3 - \alpha_3 \beta_7, \\
m27 &= -\alpha_0 \beta_7 + \alpha_7 \beta_0 + \alpha_2 \beta_5 - \alpha_5 \beta_2 - \alpha_4 \beta_3 + \alpha_3 \beta_4, \\
m28 &= \alpha_0 \beta_6 - \alpha_6 \beta_0 - \alpha_2 \beta_4 + \alpha_4 \beta_2 + \alpha_3 \beta_5 - \alpha_5 \beta_3, \\
m34 &= \alpha_0 \beta_1 - \alpha_1 \beta_0 - \alpha_4 \beta_5 + \alpha_5 \beta_4 - \alpha_7 \beta_6 + \alpha_6 \beta_7, \\
m35 &= \alpha_0 \beta_6 - \alpha_6 \beta_0 + \alpha_3 \beta_5 - \alpha_5 \beta_3 + \alpha_7 \beta_1 - \alpha_1 \beta_7, \\
m36 &= \alpha_0 \beta_7 - \alpha_7 \beta_0 + \alpha_4 \beta_3 - \alpha_3 \beta_4 + \alpha_1 \beta_6 - \alpha_6 \beta_1, \\
m37 &= -\alpha_0 \beta_4 + \alpha_4 \beta_0 - \alpha_1 \beta_5 + \alpha_5 \beta_1 + \alpha_7 \beta_3 - \alpha_3 \beta_7, \\
m38 &= \alpha_0 \beta_5 - \alpha_5 \beta_0 - \alpha_6 \beta_3 - \alpha_3 \beta_6 + \alpha_4 \beta_1 - \alpha_1 \beta_4, \\
m45 &= -\alpha_0 \beta_7 + \alpha_7 \beta_0 - \alpha_2 \beta_5 + \alpha_5 \beta_2 + \alpha_1 \beta_6 - \alpha_6 \beta_1, \\
m46 &= -\alpha_0 \beta_6 + \alpha_6 \beta_0 + \alpha_2 \beta_4 - \alpha_4 \beta_2 - \alpha_7 \beta_1 + \alpha_1 \beta_7, \\
m47 &= -\alpha_2 \beta_7 - \alpha_7 \beta_2 + \alpha_0 \beta_5 - \alpha_5 \beta_0 + \alpha_4 \beta_1 - \alpha_1 \beta_4, \\
m48 &= -\alpha_0 \beta_4 + \alpha_4 \beta_0 - \alpha_2 \beta_6 + \alpha_6 \beta_2 + \alpha_1 \beta_5 - \alpha_5 \beta_1, \\
m56 &= \alpha_0 \beta_1 - \alpha_1 \beta_0 - \alpha_2 \beta_3 + \alpha_3 \beta_2 - \alpha_7 \beta_6 + \alpha_6 \beta_7, \\
m57 &= \alpha_0 \beta_2 - \alpha_2 \beta_0 + \alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1 + \alpha_7 \beta_5 - \alpha_5 \beta_7, \\
m58 &= \alpha_0 \beta_3 - \alpha_3 \beta_0 + \alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2 + \alpha_5 \beta_6 - \alpha_6 \beta_5, \\
m67 &= -\alpha_0 \beta_3 + \alpha_3 \beta_0 - \alpha_2 \beta_1 + \alpha_1 \beta_2 + \alpha_4 \beta_7 - \alpha_7 \beta_4, \\
m68 &= \alpha_0 \beta_2 - \alpha_2 \beta_0 + \alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1 - \alpha_4 \beta_6 + \alpha_6 \beta_4, \\
m78 &= \alpha_1 \beta_0 - \alpha_0 \beta_1 + \alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2 + \alpha_4 \beta_5 - \alpha_5 \beta_4,
\end{aligned}$$

atamaları ile 8×8 tipinde

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_0\beta_0 - \sum_{k=1}^7 \alpha_k\beta_k & -\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0 + m12 & -\alpha_0\beta_2 - \alpha_2\beta_0 + m13 & -\alpha_0\beta_3 - \alpha_3\beta_0 + m14 & -\alpha_0\beta_4 - \alpha_4\beta_0 + m15 & -\alpha_0\beta_5 - \alpha_5\beta_0 + m16 & -\alpha_0\beta_6 - \alpha_6\beta_0 + m17 & -\alpha_0\beta_7 - \alpha_7\beta_0 + m18 \\ \alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 + m12 & \sum_{k=0}^7 \alpha_k\beta_k - 2\alpha_1\beta_1 & -\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2 + m23 & -\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1 + m24 & -\alpha_4\beta_1 + \alpha_1\beta_4 + m25 & -\alpha_1\beta_5 - \alpha_5\beta_1 + m26 & -\alpha_1\beta_6 - \alpha_6\beta_1 + m27 & -\alpha_7\beta_1 - \alpha_1\beta_7 + m28 \\ \alpha_0\beta_2 + \alpha_2\beta_0 + m13 & -\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2 - m23 & \sum_{k=0}^7 \alpha_k\beta_k - 2\alpha_2\beta_2 & -\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 + m34 & -\alpha_2\beta_4 - \alpha_4\beta_2 + m35 & -\alpha_2\beta_5 - \alpha_5\beta_2 + m36 & -\alpha_2\beta_6 - \alpha_6\beta_2 + m37 & -\alpha_2\beta_7 - \alpha_7\beta_2 + m38 \\ \alpha_0\beta_3 + \alpha_3\beta_0 + m14 & -\alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1 - m24 & -\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2 - m34 & \sum_{k=0}^7 \alpha_k\beta_k - 2\alpha_3\beta_3 & -\alpha_4\beta_3 - \alpha_3\beta_4 + m45 & -\alpha_3\beta_5 - \alpha_5\beta_3 + m46 & -\alpha_6\beta_3 - \alpha_3\beta_6 + m47 & -\alpha_7\beta_3 - \alpha_3\beta_7 + m48 \\ \alpha_0\beta_4 + \alpha_4\beta_0 + m15 & -\alpha_4\beta_1 - \alpha_1\beta_4 - m25 & -\alpha_2\beta_4 - \alpha_4\beta_2 - m35 & -\alpha_4\beta_3 - \alpha_3\beta_4 - m45 & \sum_{k=0}^7 \alpha_k\beta_k - 2\alpha_4\beta_4 & -\alpha_4\beta_5 - \alpha_5\beta_4 + m56 & -\alpha_4\beta_6 - \alpha_6\beta_4 + m57 & \alpha_4\beta_7 - \alpha_7\beta_4 + m58 \\ \alpha_0\beta_5 + \alpha_5\beta_0 + m16 & -\alpha_1\beta_5 - \alpha_5\beta_1 - m26 & -\alpha_2\beta_5 - \alpha_5\beta_2 - m36 & -\alpha_3\beta_5 - \alpha_5\beta_3 - m46 & -\alpha_4\beta_5 - \alpha_5\beta_4 - m56 & \sum_{k=0}^7 \alpha_k\beta_k - 2\alpha_5\beta_5 & -\alpha_5\beta_6 - \alpha_6\beta_5 + m67 & -\alpha_7\beta_5 - \alpha_5\beta_7 + m68 \\ \alpha_0\beta_6 + \alpha_6\beta_0 + m17 & -\alpha_1\beta_6 - \alpha_6\beta_1 - m27 & -\alpha_2\beta_6 - \alpha_6\beta_2 - m37 & -\alpha_6\beta_3 - \alpha_3\beta_6 - m47 & -\alpha_4\beta_6 - \alpha_6\beta_4 - m57 & -\alpha_5\beta_6 - \alpha_6\beta_5 - m67 & \sum_{k=0}^7 \alpha_k\beta_k - 2\alpha_6\beta_6 & -\alpha_7\beta_6 - \alpha_6\beta_7 + m78 \\ \alpha_0\beta_7 + \alpha_7\beta_0 + m18 & -\alpha_7\beta_1 - \alpha_1\beta_7 - m28 & -\alpha_2\beta_7 - \alpha_7\beta_2 - m38 & -\alpha_7\beta_3 - \alpha_3\beta_7 + m48 & \alpha_4\beta_7 - \alpha_7\beta_4 - m58 & -\alpha_7\beta_5 - \alpha_5\beta_7 - m68 & -\alpha_7\beta_6 - \alpha_6\beta_7 - m78 & \sum_{k=0}^7 \alpha_k\beta_k - 2\alpha_7\beta_7 \end{bmatrix}$$

katsayı matrisli, $\vec{x} = [x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7]^T$ ve $\vec{\rho} = [\rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5, \rho_6, \rho_7]^T$ vektörlü $A_{8 \times 8} \vec{x} = \vec{\rho}$ gerçel sistemine ulaşılır.

Sonraki aşama, gerçel sistemlerinin varlığı, tekliğin belirlenmesi ve çözümlerinin elde edilmeleri üzerine geliştirilen metodları kullanmak ya da bir bilgisayar programından faydalanmak olacaktır.

Örnek 3. 2. 3

$$(e_0 - 2e_1 + 3e_3 + 5e_4 - e_5 - 6e_6 + e_7)(x(3e_0 - e_1 - 2e_3 + e_4 - 2e_6 - 4e_7)) = e_0 - 2e_1 + 3e_2 + 6e_3 + 5e_4 - 2e_5 + 4e_6 + 8e_7 \quad (3.154)$$

oktonyonik denklemi için

$$\alpha = e_0 - 2e_1 + 3e_3 + 5e_4 - e_5 - 6e_6 + e_7,$$

$$\beta = 3e_0 - e_1 - 2e_3 + e_4 - 2e_6 - 4e_7$$

ve

$$\rho = e_0 - 2e_1 + 3e_2 + 6e_3 + 5e_4 - 2e_5 + 4e_6 + 8e_7$$

olup (3.154) oktonyon denkleminin

$$\alpha(x\beta) = \rho$$

formunda olduğu görülmektedir. O halde, (3.154) oktonyonik denklemi

$$\begin{aligned} -6x_0 - 18x_1 - 7x_2 - 30x_3 - 5x_4 - 12x_5 + 31x_6 + 16x_7 &= 1 \\ -32x_0 + 8x_1 - 12x_2 - x_3 - 28x_4 + 23x_5 + 10x_6 + 7x_7 &= -2 \\ -7x_0 - 12x_1 + 12x_2 + 30x_3 + 5x_4 - 22x_5 + 25x_6 - 18x_7 &= 3 \\ -16x_0 - x_1 - 30x_2 + 24x_3 - 2x_4 - 9x_5 - 6x_6 + 29x_7 &= 6 \\ 27x_0 - 14x_1 - 5x_2 + 16x_3 + 2x_4 + 32x_5 + 19x_6 + 10x_7 &= 5 \\ -18x_0 - 25x_1 + 22x_2 + 5x_3 - 30x_4 + 12x_5 - 12x_6 + 7x_7 &= -2 \\ -9x_0 - 30x_1 - 25x_2 - 6x_3 + 13x_4 + 8x_5 - 12x_6 - 26x_7 &= 4 \\ 14x_0 - 21x_1 - 18x_2 - x_3 + 28x_4 + -15x_5 - 18x_6 + 20x_7 &= 8 \end{aligned}$$

sistemine indirgenir.

Böylece bu 8×8 gerçel lineer sisteminin

$$\vec{x} = [188/2695, -384/2695, -40/539, 244/2695, 288/2695, -26/539, -23/2695, 214/2695]^T$$

şeklinde tek çözümü vardır bu çözüm aynı zamanda oktonyon denkleminin çözümünün vektörel temsili olup denklemin x oktonyon çözümü

$$\begin{aligned} x = 188/2695e_0 - 384/2695e_1 - 40/539e_2 + 244/2695e_3 + 288/2695e_4 - 26/539e_5 \\ - 23/2695e_6 + 214/2695e_7 \end{aligned}$$

şeklindedir.

Bu bölümde dikkate alınan denklemler üzerine yapılan incelemeler ve elde edilen sonuçlar, 5-8 Eylül 2012 de Niğde Üniversitesi'nde gerçekleştirilen "XXV. Ulusal Matematik Sempozyumu" isimli sempozyumda sözlü olarak sunulmuş ve sonrasında bu bulgular (Bolat ve İpek, 2012) künyeli makalede yayımlanmıştır.

3.2.3. Bir Bilinmeyenli ve Bir Terimli Bazı Lineer Oktonyonik Denklemlerin Matris Temsilleri Yardımıyla İncelenmesi

Bu bölüm; önceki bölümde çözümlerinin varlığı, tekliği ve çözümlerinin sunulmaları yönünden $A_{8 \times 8} \vec{x} = \vec{\rho}$ biçiminde gerçel sisteme indirgeme metodu (GSİM) kullanılarak incelenen $\alpha x \alpha = \rho$, $\alpha(x\beta) = \rho$ ve $(\alpha x)\beta = \rho$ oktonyonik denklemlerinin, oktonyonların matris temsilleri metodu (OMTM) kullanılarak incelenmelerini içermektedir. Oktonyonların matris temsilleri metodu (OMTM) burada dikkate alınan oktonyonik denklemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliği üzerine daha hızlı tespitlerde bulunma, çözümlere daha hızlı ulaşma ve çözümleri kapalı formlarda sunabilme ve en etkilisi de işlem kolaylığı ve pratikliği sağlama yönlerinden gerçel sisteme indirgeme metoduna (GSİM) tercih edilebilecek bir metod konumundadır.

Aşağıdaki teorem, (3.144) da verilen oktonyonik denklemin $\vec{x}$ çözüm vektör temsili ve x oktonyon çözümünü vermektedir.

Teorem 3. 2. 8 $\alpha = \sum_{i=0}^7 \alpha_i e_i \in \mathbf{O} - \{0\}$, $\rho = \sum_{i=0}^7 \rho_i e_i \in \mathbf{O}$ oktonyonları için $\varpi = \left(\sum_{i=0}^7 \alpha_i^2 \right)^{-\frac{1}{2}}$, $\mu_0 = -\sum_{i=0}^7 (\alpha_i^2 + 2\alpha_0^2)$, $\mu_k = \sum_{i=0}^7 (\alpha_i^2 - 2\alpha_k^2)$, $k = 1, \dots, 7$ olmak üzere (3.144) de verilen

$$\alpha(x\alpha) = (\alpha x)\alpha = \alpha x \alpha = \rho$$

lineer oktonyonik denklemi bir tek x oktonyon çözümüne sahiptir ve x 'in vektörel temsili,

$$\vec{x} = \frac{1}{|\alpha|^4} w^T(\alpha) v^T(\alpha) \vec{\rho}, \quad (3.155)$$

ya da

$$\vec{x} = \frac{1}{|\alpha|^4} c_{w^T(\alpha)w(\rho)w^T(\alpha)}^1, \quad (3.156)$$

ya da

$$\vec{x} = \frac{1}{|\alpha|^4} c_{v^T(\alpha)v(\rho)v^T(\alpha)}^1 \quad (3.157)$$

şeklinde farklı biçimlerde ve x oktonyon çözümü,

$$\begin{aligned} x = & \varpi \left[\left(\mu_0 \rho_0 + 2\alpha_0 (\alpha_0 \rho_0 + \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2 + \alpha_3 \rho_3 + \alpha_4 \rho_4 + \alpha_5 \rho_5 + \alpha_6 \rho_6 + \alpha_7 \rho_7) \right) e_0 \right. \\ & + (-2\alpha_0 \alpha_1 \rho_0 + \alpha_1 \rho_1 - 2\alpha_2 \alpha_1 \rho_2 - 2\alpha_3 \alpha_1 \rho_3 - 2\alpha_4 \alpha_1 \rho_4 - 2\alpha_5 \alpha_1 \rho_5 - 2\alpha_6 \alpha_1 \rho_6 - 2\alpha_7 \alpha_1 \rho_7) e_1 \\ & + (-2\alpha_0 \alpha_2 \rho_0 - 2\alpha_1 \alpha_2 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2 - 2\alpha_3 \alpha_2 \rho_3 - 2\alpha_4 \alpha_2 \rho_4 - 2\alpha_5 \alpha_2 \rho_5 - 2\alpha_6 \alpha_2 \rho_6 - 2\alpha_7 \alpha_2 \rho_7) e_2 \\ & + (-2\alpha_0 \alpha_3 \rho_0 - 2\alpha_1 \alpha_3 \rho_1 - 2\alpha_2 \alpha_3 \rho_2 + \alpha_3 \rho_3 - 2\alpha_4 \alpha_3 \rho_4 - 2\alpha_5 \alpha_3 \rho_5 - 2\alpha_6 \alpha_3 \rho_6 - 2\alpha_7 \alpha_3 \rho_7) e_3 \\ & + (-2\alpha_0 \alpha_4 \rho_0 - 2\alpha_1 \alpha_4 \rho_1 - 2\alpha_2 \alpha_4 \rho_2 - 2\alpha_3 \alpha_4 \rho_3 + \alpha_4 \rho_4 - 2\alpha_5 \alpha_4 \rho_5 - 2\alpha_6 \alpha_4 \rho_6 - 2\alpha_7 \alpha_4 \rho_7) e_4 \\ & + (-2\alpha_0 \alpha_5 \rho_0 - 2\alpha_1 \alpha_5 \rho_1 - 2\alpha_2 \alpha_5 \rho_2 - 2\alpha_3 \alpha_5 \rho_3 - 2\alpha_4 \alpha_5 \rho_4 + \alpha_5 \rho_5 - 2\alpha_6 \alpha_5 \rho_6 - 2\alpha_7 \alpha_5 \rho_7) e_5 \\ & + (-2\alpha_0 \alpha_6 \rho_0 - 2\alpha_1 \alpha_6 \rho_1 - 2\alpha_2 \alpha_6 \rho_2 - 2\alpha_3 \alpha_6 \rho_3 - 2\alpha_4 \alpha_6 \rho_4 - 2\alpha_5 \alpha_6 \rho_5 + \alpha_6 \rho_6 - 2\alpha_7 \alpha_6 \rho_7) e_6 \\ & \left. + (-2\alpha_0 \alpha_7 \rho_0 - 2\alpha_1 \alpha_7 \rho_1 - 2\alpha_2 \alpha_7 \rho_2 - 2\alpha_3 \alpha_7 \rho_3 - 2\alpha_4 \alpha_7 \rho_4 - 2\alpha_5 \alpha_7 \rho_5 - 2\alpha_6 \alpha_7 \rho_6 + \alpha_7 \rho_7) e_7 \right] \end{aligned} \quad (3.158)$$

şeklindedir.

İspat. (3.144) denkleminde

$$\overrightarrow{\alpha(x\alpha)} = \overrightarrow{(\alpha x)\alpha} = \overrightarrow{\alpha x\alpha} = \vec{\rho}$$

vektörel eşitlikleri elde edilir. Buradan (3.71) ve (3.73) eşitliklerinin dikkate alınmasıyla

$$v(\alpha)w(\alpha)\vec{x} = \vec{\rho}$$

eşitliği elde edilir. $\alpha = \sum_{i=0}^7 \alpha_i e_i \in \mathbf{O} - \{0\}$ için $v(\alpha)$ ve $w(\alpha)$ matrisleri terslenebilir

olduğundan x oktonyon çözümünün vektör temsili,

$$\begin{aligned} \vec{x} &= w^{-1}(\alpha)v^{-1}(\alpha)\vec{\rho} \\ &= w(\alpha^{-1})v(\alpha^{-1})\vec{\rho} \\ &= w\left(\frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^2}\right)v\left(\frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^2}\right)\vec{\rho} \\ &= \frac{1}{|\alpha|^4} w(\bar{\alpha})v(\bar{\alpha})\vec{\rho} \end{aligned}$$

veya

$$\vec{x} = \frac{1}{|\alpha|^4} w^T(\alpha) v^T(\alpha) \vec{\rho} \quad (3.159)$$

şeklinde elde edilir. Böylece (3.155) eşitliğinin ispatı tamamlanır.

$\alpha(x\alpha) = \alpha x \alpha$ ve $w(\alpha\beta\alpha) = w(\alpha)w(\beta)w(\alpha)$ eşitlikleri dikkate alınarak

$$w(\alpha(x\alpha)) = w(\rho)$$

veya

$$w(\alpha)w(x)w(\alpha) = w(\rho)$$

eşitliği yazılır ki, buradan $w(x)$ matrisi

$$\begin{aligned} w(x) &= w^{-1}(\alpha)w(\rho)w^{-1}(\alpha) \\ &= w(\alpha^{-1})w(\rho)w(\alpha^{-1}) \\ &= \frac{1}{|\alpha|^4} w^T(\alpha)w(\rho)w^T(\alpha) \end{aligned}$$

biçiminde ifade edilir. $\vec{x} = c_{w(x)}^1$ bilgisi ile, (3.144) denkleminin çözümü x 'in vektörel temsili

$$\vec{x} = \frac{1}{|\alpha|^4} c_{w^T(\alpha)w(\rho)w^T(\alpha)}^1 \quad (3.160)$$

şeklinde olur. Böylece (3.156) eşitliğinin ispatı tamamlanır.

Benzer olarak $\alpha(x\alpha) = \alpha x \alpha$ ve $v(\alpha\beta\alpha) = v(\alpha)v(\beta)v(\alpha)$ eşitlikleri dikkate alınarak

$$v(\alpha(x\alpha)) = v(\rho)$$

veya

$$v(\alpha)v(x)v(\alpha) = v(\rho)$$

eşitliği yazılır ki, buradan $v(x)$ matrisi

$$\begin{aligned} v(x) &= v^{-1}(\alpha) v(\rho) v^{-1}(\alpha) \\ &= v(\alpha^{-1}) v(\rho) v(\alpha^{-1}) \\ &= \frac{1}{|\alpha|^4} v^T(\alpha) v(\rho) v^T(\alpha) \end{aligned}$$

biçiminde ifade edilir. $\vec{x} = c_{v(x)}^1$ bilgisi ile, (3.144) denkleminin çözümü x 'in vektörel temsili

$$\vec{x} = \frac{1}{|\alpha|^4} c_{v^T(\alpha) v(\rho) v^T(\alpha)}^1 \quad (3.161)$$

şeklinde olur. Böylece (3.157) eşitliğinin ispatı tamamlanır. (3.159), (3.160) ya da (3.161) eşitliklerinin herhangi birisi kullanılarak (3.158) ile verilen x oktonyon çözümü elde edilir.

Örnek 3. 2. 4

$$\begin{aligned} (e_0 + 4e_1 - e_2 + 3e_4 + e_5 - 7e_6 + 5e_7) x (e_0 + 4e_1 - e_2 + 3e_4 + e_5 - 7e_6 + 5e_7) &= -e_0 + 2e_1 + 3e_2 \\ &\quad + 5e_3 - 3e_4 - e_6 \end{aligned} \quad (3.162)$$

oktonyonik denklemi için

$$\alpha = e_0 + 4e_1 - e_2 + 3e_4 + e_5 - 7e_6 + 5e_7$$

ve

$$\rho = -e_0 + 2e_1 + 3e_2 + 5e_3 - 3e_4 - e_6,$$

atamalarının yapılması ile (3.162) ile verilen oktonyon denkleminin

$$\alpha x \alpha = \rho$$

formunda olduğu görülmektedir. O halde,

$$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = 4, \alpha_2 = -1, \alpha_3 = 0, \alpha_4 = 3, \alpha_5 = 1, \alpha_6 = -7, \alpha_7 = 5$$

ve

$$\rho_0 = -1, \rho_1 = 2, \rho_2 = 3, \rho_3 = 5, \rho_4 = -3, \rho_5 = 0, \rho_6 = -1, \rho_7 = 0$$

olup x oktonyon çözümü için verilen (3.158) formülünden,

$$x = 53/5202e_0 + 47/2601e_1 + 155/5202e_2 + 5/102e_3 - 53/1734e_4 \\ - 1/2601e_5 - 37/5202e_6 - 5/2601e_7$$

çözümüne ulaşılır.

Aşağıdaki teorem ile $\alpha(x\beta) = \rho$ oktonyonik denkleminin çözümünün $\vec{x}$ vektörel temsilini ve sonrasında x oktonyon çözümünü oktonyonların matris temsilleri yardımı ile verilmektedir.

Teorem 3. 2. 9 $\alpha = \sum_{i=0}^7 \alpha_i e_i, \beta = \sum_{i=0}^7 \beta_i e_i \in \mathbf{O} - \{0\}, \rho = \sum_{i=0}^7 \rho_i e_i \in \mathbf{O}$ oktonyonları için (3.145) de verilen

$$\alpha(x\beta) = \rho$$

lineer oktonyonik denklemi bir tek x oktonyon çözümüne sahiptir ve x 'in vektörel temsili,

$$\vec{x} = \frac{1}{|\beta|^2 |\alpha|^2} v^T(\beta) w^T(\alpha) \vec{\rho} \quad (3.163)$$

şeklindedir ve

$$\left. \begin{aligned} \varpi_0 &= \alpha_0 \rho_0 + \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2 + \alpha_3 \rho_3 + \alpha_4 \rho_4 + \alpha_5 \rho_5 + \alpha_6 \rho_6 + \alpha_7 \rho_7, \\ \varpi_1 &= -\alpha_1 \rho_0 + \alpha_0 \rho_1 + \alpha_3 \rho_2 - \alpha_2 \rho_3 + \alpha_5 \rho_4 - \alpha_4 \rho_5 - \alpha_7 \rho_6 + \alpha_6 \rho_7, \\ \varpi_2 &= -\alpha_2 \rho_0 - \alpha_3 \rho_1 + \alpha_0 \rho_2 + \alpha_1 \rho_3 + \alpha_6 \rho_4 + \alpha_7 \rho_5 - \alpha_4 \rho_6 - \alpha_5 \rho_7, \\ \varpi_3 &= -\alpha_3 \rho_0 + \alpha_2 \rho_1 - \alpha_1 \rho_2 + \alpha_0 \rho_3 + \alpha_7 \rho_4 - \alpha_6 \rho_5 + \alpha_5 \rho_6 - \alpha_4 \rho_7, \\ \varpi_4 &= -\alpha_4 \rho_0 - \alpha_5 \rho_1 - \alpha_6 \rho_2 - \alpha_7 \rho_3 + \alpha_0 \rho_4 + \alpha_1 \rho_5 + \alpha_2 \rho_6 + \alpha_3 \rho_7, \\ \varpi_5 &= -\alpha_5 \rho_0 + \alpha_4 \rho_1 - \alpha_7 \rho_2 + \alpha_6 \rho_3 - \alpha_1 \rho_4 + \alpha_0 \rho_5 - \alpha_3 \rho_6 + \alpha_2 \rho_7, \\ \varpi_6 &= -\alpha_6 \rho_0 + \alpha_7 \rho_1 + \alpha_4 \rho_2 - \alpha_5 \rho_3 - \alpha_2 \rho_4 + \alpha_3 \rho_5 + \alpha_0 \rho_6 - \alpha_1 \rho_7, \\ \varpi_7 &= -\alpha_7 \rho_0 - \alpha_6 \rho_1 + \alpha_5 \rho_2 + \alpha_4 \rho_3 - \alpha_3 \rho_4 - \alpha_2 \rho_5 + \alpha_1 \rho_6 + \alpha_0 \rho_7 \end{aligned} \right\} \quad (3.164)$$

olmak üzere x oktonyon çözümü,

$$\begin{aligned}
x = \frac{1}{|\beta|^2 |\alpha|^2} & \left[(\beta_0 \varpi_0 + \beta_1 \varpi_1 + \beta_2 \varpi_2 + \beta_3 \varpi_3 + \beta_4 \varpi_4 + \beta_5 \varpi_5 + \beta_6 \varpi_6 + \beta_7 \varpi_7) e_0 \right. \\
& + (-\beta_1 \varpi_0 + \beta_0 \varpi_1 - \beta_3 \varpi_2 + \beta_2 \varpi_3 - \beta_5 \varpi_4 + \beta_4 \varpi_5 + \beta_7 \varpi_6 - \beta_6 \varpi_7) e_1 \\
& + (-\beta_2 \varpi_0 + \beta_3 \varpi_1 + \beta_0 \varpi_2 - \beta_1 \varpi_3 - \beta_6 \varpi_4 - \beta_7 \varpi_5 + \beta_4 \varpi_6 + \beta_5 \varpi_7) e_2 \\
& + (-\beta_3 \varpi_0 - \beta_2 \varpi_1 + \beta_1 \varpi_2 + \beta_0 \varpi_3 - \beta_7 \varpi_4 + \beta_6 \varpi_5 - \beta_5 \varpi_6 + \beta_4 \varpi_7) e_3 \\
& + (-\beta_4 \varpi_0 + \beta_5 \varpi_1 + \beta_6 \varpi_2 + \beta_7 \varpi_3 + \beta_0 \varpi_4 - \beta_1 \varpi_5 - \beta_2 \varpi_6 - \beta_3 \varpi_7) e_4 \\
& + (-\beta_5 \varpi_0 - \beta_4 \varpi_1 + \beta_7 \varpi_2 - \beta_6 \varpi_3 + \beta_1 \varpi_4 + \beta_0 \varpi_5 + \beta_3 \varpi_6 - \beta_2 \varpi_7) e_5 \\
& + (-\beta_6 \varpi_0 - \beta_7 \varpi_1 - \beta_4 \varpi_2 + \beta_5 \varpi_3 + \beta_2 \varpi_4 - \beta_3 \varpi_5 + \beta_0 \varpi_6 + \beta_1 \varpi_7) e_6 \\
& \left. + (-\beta_7 \varpi_0 + \beta_6 \varpi_1 - \beta_5 \varpi_2 - \beta_4 \varpi_3 + \beta_7 \varpi_4 + \beta_2 \varpi_5 - \beta_1 \varpi_6 + \beta_0 \varpi_7) e_7 \right] \quad (3.165)
\end{aligned}$$

biçimindedir.

İspat. (3.145) denkleminde

$$\overline{\alpha(x\beta)} = \vec{\rho}$$

eşitliği yazılırsa (3.71) ve (3.73) eşitliklerinin dikkate alınması ile

$$w(\alpha) \overline{x\beta} = \vec{\rho}$$

veya

$$w(\alpha) v(\beta) \vec{x} = \vec{\rho}$$

eşitliği elde edilir. $\alpha, \beta \in \mathbf{O} - \{0\}$ için $v(\beta)$ ve $w(\alpha)$ matrisleri terslenebilir olduğundan

x oktonyon çözümünün vektör temsili

$$\begin{aligned}
\vec{x} &= v^{-1}(\beta) w^{-1}(\alpha) \vec{\rho} \\
&= v(\beta^{-1}) w(\alpha^{-1}) \vec{\rho} \\
&= \frac{1}{|\beta|^2 |\alpha|^2} v^T(\beta) w^T(\alpha) \vec{\rho} \quad (3.166)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. (3.166) eşitliğinden (3.165) ile verilen x oktonyon çözümüne ulaşılır.

Örnek 3. 2. 5

$$(e_0 - 2e_1 + 3e_3 + 5e_4 - e_5 - 6e_6 + e_7)(x(3e_0 - e_1 - 2e_3 + e_4 - 2e_6 - 4e_7)) = e_0 - 2e_1 + 3e_2 + 6e_3 + 5e_4 - 2e_5 + 4e_6 + 8e_7 \quad (3.167)$$

oktonyonik denklemi için

$$\alpha = e_0 - 2e_1 + 3e_3 + 5e_4 - e_5 - 6e_6 + e_7, \quad \beta = 3e_0 - e_1 - 2e_3 + e_4 - 2e_6 - 4e_7$$

ve

$$\rho = e_0 - 2e_1 + 3e_2 + 6e_3 + 5e_4 - 2e_5 + 4e_6 + 8e_7$$

atamalarının yapılması ile (3.167) ile verilen oktonyon denkleminin

$$\alpha(x\beta) = \rho$$

formunda olduğu görülmektedir. (3.163) ve (3.165) formüllerinden $\vec{x}$ vektörel çözümü

$$\vec{x} = [188 / 2695, -384 / 2695, -40 / 539, 244 / 2695, 288 / 2695, -26 / 539, -23 / 2695, 214 / 2695]^T$$

olur ve x oktonyon çözümü

$$x = 188 / 2695e_0 - 384 / 2695e_1 - 40 / 539e_2 + 244 / 2695e_3 + 288 / 2695e_4 - 26 / 539e_5 - 23 / 2695e_6 + 214 / 2695e_7$$

şeklinde elde edilir.

Aşağıdaki teorem ile, $(\alpha x)\beta = \rho$ oktonyonik denkleminin çözümünün $\vec{x}$ vektörel temsilini ve sonrasında x oktonyon çözümü oktonyonların matris temsilleri yardımı ile verilmektedir.

Teorem 3. 2. 10 $\alpha = \sum_{i=0}^7 \alpha_i e_i, \beta = \sum_{i=0}^7 \beta_i e_i \in \mathbf{O} - \{0\}, \rho = \sum_{i=0}^7 \rho_i e_i \in \mathbf{O}$ için (3.146) de verilen

$$(\alpha x)\beta = \rho$$

lineer oktonyonik denklemi bir tek x oktonyon çözümüne sahiptir ve x 'in vektörel temsili,

$$\vec{x} = \frac{1}{|\alpha|^2 |\beta|^2} w^T(\alpha) v^T(\beta) \vec{\rho} \quad (3.168)$$

biçimindedir ve

$$\left. \begin{aligned} \eta_0 &= \beta_0 \rho_0 + \beta_1 \rho_1 + \beta_2 \rho_2 + \beta_3 \rho_3 + \beta_4 \rho_4 + \beta_5 \rho_5 + \beta_6 \rho_6 + \beta_7 \rho_7, \\ \eta_1 &= -\beta_1 \rho_0 + \beta_0 \rho_1 - \beta_3 \rho_2 + \beta_2 \rho_3 - \beta_5 \rho_4 + \beta_4 \rho_5 + \beta_7 \rho_6 - \beta_6 \rho_7, \\ \eta_2 &= -\beta_2 \rho_0 + \beta_3 \rho_1 + \beta_0 \rho_2 - \beta_1 \rho_3 - \beta_6 \rho_4 - \beta_7 \rho_5 + \beta_4 \rho_6 + \beta_5 \rho_7, \\ \eta_3 &= -\beta_3 \rho_0 - \beta_2 \rho_1 + \beta_1 \rho_2 + \beta_0 \rho_3 - \beta_7 \rho_4 + \beta_6 \rho_5 - \beta_5 \rho_6 + \beta_4 \rho_7, \\ \eta_4 &= -\beta_4 \rho_0 + \beta_5 \rho_1 + \beta_6 \rho_2 + \beta_7 \rho_3 + \beta_0 \rho_4 - \beta_1 \rho_5 - \beta_2 \rho_6 - \beta_3 \rho_7, \\ \eta_5 &= -\beta_5 \rho_0 - \beta_4 \rho_1 + \beta_7 \rho_2 - \beta_6 \rho_3 + \beta_1 \rho_4 + \beta_0 \rho_5 + \beta_3 \rho_6 - \beta_2 \rho_7, \\ \eta_6 &= -\beta_6 \rho_0 - \beta_7 \rho_1 - \beta_4 \rho_2 + \beta_5 \rho_3 + \beta_2 \rho_4 - \beta_3 \rho_5 + \beta_0 \rho_6 + \beta_1 \rho_7, \\ \eta_7 &= -\beta_7 \rho_0 + \beta_6 \rho_1 - \beta_5 \rho_2 - \beta_4 \rho_3 + \beta_3 \rho_4 + \beta_2 \rho_5 - \beta_1 \rho_6 + \beta_0 \rho_7 \end{aligned} \right\} \quad (3.169)$$

atamaları ile x oktonyon çözümü açık olarak

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{|\alpha|^2 |\beta|^2} \left[(\alpha_0 \eta_0 + \alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2 + \alpha_3 \eta_3 + \alpha_4 \eta_4 + \alpha_5 \eta_5 + \alpha_6 \eta_6 + \alpha_7 \eta_7) e_0 \right. \\ &\quad + (-\alpha_1 \eta_0 + \alpha_0 \eta_1 + \alpha_3 \eta_2 - \alpha_2 \eta_3 + \alpha_5 \eta_4 - \alpha_4 \eta_5 - \alpha_7 \eta_6 + \alpha_6 \eta_7) e_1 \\ &\quad + (-\alpha_2 \eta_0 - \alpha_3 \eta_1 + \alpha_0 \eta_2 + \alpha_1 \eta_3 + \alpha_6 \eta_4 + \alpha_7 \eta_5 - \alpha_4 \eta_6 - \alpha_5 \eta_7) e_2 \\ &\quad + (-\alpha_3 \eta_0 + \alpha_2 \eta_1 - \alpha_1 \eta_2 + \alpha_0 \eta_3 + \alpha_7 \eta_4 - \alpha_6 \eta_5 + \alpha_5 \eta_6 - \alpha_4 \eta_7) e_3 \\ &\quad + (-\alpha_4 \eta_0 - \alpha_5 \eta_1 - \alpha_6 \eta_2 - \alpha_7 \eta_3 + \alpha_0 \eta_4 + \alpha_1 \eta_5 + \alpha_2 \eta_6 + \alpha_3 \eta_7) e_4 \\ &\quad + (-\alpha_5 \eta_0 + \alpha_4 \eta_1 - \alpha_7 \eta_2 + \alpha_6 \eta_3 - \alpha_1 \eta_4 + \alpha_0 \eta_5 - \alpha_3 \eta_6 + \alpha_2 \eta_7) e_5 \\ &\quad + (-\alpha_6 \eta_0 + \alpha_7 \eta_1 + \alpha_4 \eta_2 - \alpha_5 \eta_3 - \alpha_2 \eta_4 + \alpha_3 \eta_5 + \alpha_0 \eta_6 - \alpha_1 \eta_7) e_6 \\ &\quad \left. + (-\alpha_7 \eta_0 - \alpha_6 \eta_1 + \alpha_5 \eta_2 + \alpha_4 \eta_3 - \alpha_3 \eta_4 - \alpha_2 \eta_5 + \alpha_1 \eta_6 + \alpha_0 \eta_7) e_7 \right] \end{aligned} \quad (3.170)$$

şeklindedir.

İspat. (3.146) denklemi

$$\overline{(\alpha x)} \beta = \vec{\rho}$$

şeklinde yazılırsa (3.71) ve (3.73) eşitliklerinden

$$v(\beta) \overline{\alpha x} = \vec{\rho}$$

veya

$$v(\beta)w(\alpha)\vec{x} = \vec{\rho}$$

eşitliği elde edilir. $\alpha, \beta \in \mathbf{O} - \{0\}$ için $v(\beta)$ ve $w(\alpha)$ matrisleri terslenebilir olduğundan x oktonyon çözümünün vektörel temsili

$$\begin{aligned}\vec{x} &= w^{-1}(\alpha)v^{-1}(\beta)\vec{\rho} \\ &= w(\alpha^{-1})v(\beta^{-1})\vec{\rho} \\ &= \frac{1}{|\alpha|^2|\beta|^2}w^T(\alpha)v^T(\beta)\vec{\rho}\end{aligned}\quad (3.171)$$

şeklinde elde edilir. (3.171) eşitliğinden (3.170) ile verilen x oktonyon çözümü elde edilir.

Örnek 3. 2. 6

$$\begin{aligned}((e_0 - 2e_1 + 3e_3 + 5e_4 - e_5 - 6e_6 + e_7)x)(3e_0 - e_1 - 2e_3 + e_4 - 2e_6 - 4e_7) &= e_0 - 2e_1 + 3e_2 + 6e_3 \\ &+ 5e_4 - 2e_5 + 4e_6 + 8e_7\end{aligned}\quad (3.172)$$

oktonyonik denklemi için

$$\alpha = e_0 - 2e_1 + 3e_3 + 5e_4 - e_5 - 6e_6 + e_7,$$

$$\beta = 3e_0 - e_1 - 2e_3 + e_4 - 2e_6 - 4e_7$$

ve

$$\rho = e_0 - 2e_1 + 3e_2 + 6e_3 + 5e_4 - 2e_5 + 4e_6 + 8e_7$$

olup (3.172) ile verilen oktonyonik denkleminin

$$(\alpha x)\beta = \rho$$

formunda olduğu görülmektedir. Böylece x oktonyon çözümü için verilen (3.168) ve (3.170) formüllerinden $\vec{x}$ ve x oktonyon çözümü sırasıyla,

$$\vec{x} = [188 / 2695, -34 / 2695, -2 / 539, 6 / 539, 402 / 2695, -72 / 539, -9 / 245, 60 / 539]^T$$

ve

$$x = 188 / 2695e_0 - 34 / 2695e_1 - 2 / 539e_2 + 6 / 539e_3 + 402 / 2695e_4 - 72 / 539e_5 - 9 / 245e_6 + 60 / 539e_7$$

şeklinde bulunur.

Bu bölümde dikkate alınan denklemler üzerine yapılan incelemeler ve elde edilen sonuçlar, 22-26 Mayıs 2013 de İzmir de Nesin Matematik Köyü'nde gerçekleştirilen "XV. Antalya Algebra Days" isimli sempozyumda sözlü olarak sunulmuş ve sonrasında yapılan yorumlar da dikkate alınarak yayımlanması için makale olarak uluslararası hakemli bir dergiye gönderilmiştir.

3.2.4. Bir Bilinmeyenli İki Terimli Bazı Lineer Oktonyonik Denklemlerin Matris Temsilleri Yardımıyla İncelenmesi

Bu bölümde; $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{O} - \{0\}$ ve $\rho = \sum_{i=0}^7 \rho_i e_i \in \mathbf{O}$ olmak üzere oktonyon cebiri üzerinde

$$\alpha x - (\alpha x)\beta = \rho,$$

$$\alpha x - \alpha(x\beta) = \rho,$$

$$x\alpha - (\beta x)\alpha = \rho,$$

$$x\alpha - \beta(x\alpha) = \rho,$$

$$(\alpha x)\beta + (\gamma x)\delta = \rho,$$

$$\alpha(x\beta) + \gamma(x\delta) = \rho$$

formlarındaki bir bilinmeyenli iki terimli lineer oktonyonik denklemler dikkate alınmakta, oktonyonların matris temsillerini kullanarak denklemler gerçel sistemlere indirgenmekte, çözümlerin varlığı ve tekliği üzerine kriterler verilmekte ve bu kriterler ile çözümler elde edilmektedir.

Dikkate alınan denklemleri inceleme sırasında kullanılan gerçel matris denklemlerine indirgeyen bu metod değişme ve birleşme özelliği bulunmayan oktonyon cebiri üzerindeki bu tipteki denklemleri incelemenin bir etkili yolu olarak görülebilmektedir.

Teorem 3. 2. 11 $\alpha = \sum_{i=0}^7 \alpha_i e_i$, $\beta = \sum_{i=0}^7 \beta_i e_i \in \mathbf{O} - \{0\}$ ve $\rho = \sum_{i=0}^7 \rho_i e_i \in \mathbf{O}$ olmak üzere

$$\alpha x - (\alpha x)\beta = \rho \quad (3.173)$$

lineer denklemi göz önüne alınsın.

i. (3.173) denkleminde $\beta = 1$ ve $\rho = 0$ ise (3.173) denkleminin x çözümü bir keyfi oktonyondur.

ii. (3.173) denkleminde $\beta = 1$ ve $\rho \neq 0$ ise (3.173) denklemi tutarsızdır.

iii. (3.173) denkleminde $\beta \neq 1$, $\eta = \left(\left((\beta_0 - 1)^2 + \sum_{i=1}^7 \beta_i^2 \right) \left(\sum_{i=0}^7 \alpha_i^2 \right) \right)^{-1}$ ve ϕ_k 'lar

$$\begin{aligned} \phi_0 &= (1 - \beta_0) \rho_0 - \beta_1 \rho_1 - \beta_2 \rho_2 - \beta_3 \rho_3 - \beta_4 \rho_4 - \beta_5 \rho_5 - \beta_6 \rho_6 - \beta_7 \rho_7, \\ \phi_1 &= \beta_1 \rho_0 + (1 - \beta_0) \rho_1 + \beta_3 \rho_2 - \beta_2 \rho_3 + \beta_5 \rho_4 - \beta_4 \rho_5 - \beta_7 \rho_6 + \beta_6 \rho_7, \\ \phi_2 &= \beta_2 \rho_0 - \beta_3 \rho_1 + (1 - \beta_0) \rho_2 + \beta_1 \rho_3 + \beta_6 \rho_4 + \beta_7 \rho_5 - \beta_4 \rho_6 - \beta_5 \rho_7, \\ \phi_3 &= \beta_3 \rho_0 + \beta_2 \rho_1 - \beta_1 \rho_2 + (1 - \beta_0) \rho_3 + \beta_7 \rho_4 - \beta_6 \rho_5 + \beta_5 \rho_6 - \beta_4 \rho_7, \\ \phi_4 &= \beta_4 \rho_0 - \beta_5 \rho_1 - \beta_6 \rho_2 - \beta_7 \rho_3 + (1 - \beta_0) \rho_4 + \beta_1 \rho_5 + \beta_2 \rho_6 + \beta_3 \rho_7, \\ \phi_5 &= \beta_5 \rho_0 + \beta_4 \rho_1 - \beta_7 \rho_2 + \beta_6 \rho_3 - \beta_1 \rho_4 + (1 - \beta_0) \rho_5 - \beta_3 \rho_6 + \beta_2 \rho_7, \\ \phi_6 &= \beta_6 \rho_0 + \beta_7 \rho_1 + \beta_4 \rho_2 - \beta_5 \rho_3 - \beta_2 \rho_4 + \beta_3 \rho_5 + (1 - \beta_0) \rho_6 - \beta_1 \rho_7, \\ \phi_7 &= \beta_7 \rho_0 - \beta_6 \rho_1 + \beta_5 \rho_2 + \beta_4 \rho_3 - \beta_3 \rho_4 - \beta_2 \rho_5 + \beta_1 \rho_6 - (1 - \beta_0) \rho_7 \end{aligned}$$

olmak üzere (3.173) denkleminin x çözümü

$$\begin{aligned}
x = \eta \big[& (\alpha_0\phi_0 + \alpha_1\phi_1 + \alpha_2\phi_2 + \alpha_3\phi_3 + \alpha_4\phi_4 + \alpha_5\phi_5 + \alpha_6\phi_6 + \alpha_7\phi_7) e_0 \\
& + (\alpha_0\phi_1 - \alpha_1\phi_0 - \alpha_2\phi_3 + \alpha_3\phi_2 - \alpha_4\phi_5 + \alpha_5\phi_4 + \alpha_6\phi_7 - \alpha_7\phi_6) e_1 \\
& + (\alpha_0\phi_2 + \alpha_1\phi_3 - \alpha_2\phi_0 - \alpha_3\phi_1 - \alpha_4\phi_6 - \alpha_5\phi_7 + \alpha_6\phi_4 + \alpha_7\phi_5) e_2 \\
& + (\alpha_0\phi_3 - \alpha_1\phi_2 + \alpha_2\phi_1 - \alpha_3\phi_0 - \alpha_4\phi_7 + \alpha_5\phi_6 - \alpha_6\phi_5 + \alpha_7\phi_4) e_3 \\
& + (\alpha_0\phi_4 + \alpha_1\phi_5 + \alpha_2\phi_6 + \alpha_3\phi_7 - \alpha_4\phi_0 - \alpha_5\phi_1 - \alpha_6\phi_2 - \alpha_7\phi_3) e_4 \\
& + (\alpha_0\phi_5 - \alpha_1\phi_4 + \alpha_2\phi_7 - \alpha_3\phi_6 + \alpha_4\phi_1 - \alpha_5\phi_0 + \alpha_6\phi_3 - \alpha_7\phi_2) e_5 \\
& + (\alpha_0\phi_6 - \alpha_1\phi_7 - \alpha_2\phi_4 + \alpha_3\phi_5 + \alpha_4\phi_2 - \alpha_5\phi_3 - \alpha_6\phi_0 + \alpha_7\phi_1) e_6 \\
& + (\alpha_0\phi_7 + \alpha_1\phi_6 - \alpha_2\phi_5 - \alpha_3\phi_4 + \alpha_4\phi_3 + \alpha_5\phi_2 - \alpha_6\phi_1 - \alpha_7\phi_0) e_7 \big]
\end{aligned} \tag{3.174}$$

şeklindedir.

İspat. Oktonyonların sağ ve sol matris temsilleri ile (3.173) denkleminde

$$(I_8 - v(\beta))w(\alpha)\vec{x} = \vec{\rho} \tag{3.175}$$

denklemini elde edilir. (3.175) matris vektör denklemini

$$v(\alpha + \beta) = v(\alpha) + v(\beta)$$

eşitliği kullanılarak

$$v(1 - \beta)w(\alpha)\vec{x} = \vec{\rho} \tag{3.176}$$

şeklinde yazılır.

Durum i. (3.176) denkleminde $\beta = 1$ ve $\rho = 0$ ise

$$0.w(\alpha)\vec{x} = \vec{0}$$

elde edilir. Bu durumda (3.173) denkleminin x çözümü keyfi bir oktonyondur.

Durum ii. (3.176) denkleminde $\beta = 1$ ve $\rho \neq 0$ ise

$$0.w(\alpha)\vec{x} = \vec{\rho}$$

elde edilir. Bu durumda (3.173) denklemini tutarsızdır.

Durum iii. (3.176) denkleminde $\beta \neq 1$ ise $v(1 - \beta)$ matrisinin determinanı $|1 - \beta|^8 \neq 0$ olup $v(1 - \beta)$ matrisi terslenebilirdir. Aynı zamanda $\alpha \neq 0$ için $w(\alpha)$ matrisi de

terslenebilir olduğundan (3.176) denkleminin $\vec{x}$ çözümü

$$\begin{aligned}\vec{x} &= w^{-1}(\alpha)(v(1-\beta))^{-1} \vec{p} \\ &= \frac{1}{|\alpha|^2} w^T(\alpha)(v(1-\beta))^{-1} \vec{p} \\ &= \frac{1}{|\alpha|^2 |1-\beta|^2} w^T(\alpha) v^T (1-\beta) \vec{p}\end{aligned}$$

dir. Böylece oktonyonların vektör temsilinden (3.174) oktonyon çözümüne ulaşılır.

Teorem 3. 2. 12 $\alpha = \sum_{i=0}^7 \alpha_i e_i$, $\beta = \sum_{i=0}^7 \beta_i e_i \in \mathbf{O} - \{0\}$ ve $\rho = \sum_{i=0}^7 \rho_i e_i \in \mathbf{O}$ olmak üzere

$$\alpha x - \alpha(x\beta) = \rho \quad (3.177)$$

lineer denklemi dikkate alınsın.

i. (3.177) denkleminde $\beta = 1$ ve $\rho = 0$ ise (3.177) denkleminin x çözümü bir keyfi oktonyondur.

ii. (3.177) denkleminde $\beta = 1$ ve $\rho \neq 0$ ise (3.177) denklemi tutarsızdır.

iii. (3.177) denkleminde $\beta \neq 1$, $\eta = \left(\left((\beta_0 - 1)^2 + \sum_{i=1}^7 \beta_i^2 \right) \left(\sum_{i=0}^7 \alpha_i^2 \right) \right)^{-1}$ ve ψ_k 'lar

$$\begin{aligned}\psi_0 &= \alpha_0 \rho_0 - \alpha_1 \rho_1 - \alpha_2 \rho_2 - \alpha_3 \rho_3 - \alpha_4 \rho_4 - \alpha_5 \rho_5 - \alpha_6 \rho_6 - \alpha_7 \rho_7, \\ \psi_1 &= \alpha_1 \rho_0 + \alpha_0 \rho_1 - \alpha_3 \rho_2 + \alpha_2 \rho_3 - \alpha_5 \rho_4 + \alpha_4 \rho_5 + \alpha_7 \rho_6 - \alpha_6 \rho_7, \\ \psi_2 &= \alpha_2 \rho_0 + \alpha_3 \rho_1 + \alpha_0 \rho_2 - \alpha_1 \rho_3 - \alpha_6 \rho_4 - \alpha_7 \rho_5 + \alpha_4 \rho_6 + \alpha_5 \rho_7, \\ \psi_3 &= \alpha_3 \rho_0 - \alpha_2 \rho_1 + \alpha_1 \rho_2 + \alpha_0 \rho_3 - \alpha_7 \rho_4 + \alpha_6 \rho_5 - \alpha_5 \rho_6 + \alpha_4 \rho_7, \\ \psi_4 &= \alpha_4 \rho_0 + \alpha_5 \rho_1 + \alpha_6 \rho_2 + \alpha_7 \rho_3 + \alpha_0 \rho_4 - \alpha_1 \rho_5 - \alpha_2 \rho_6 - \alpha_3 \rho_7, \\ \psi_5 &= \alpha_5 \rho_0 - \alpha_4 \rho_1 + \alpha_7 \rho_2 - \alpha_6 \rho_3 + \alpha_1 \rho_4 + \alpha_0 \rho_5 + \alpha_3 \rho_6 - \alpha_2 \rho_7, \\ \psi_6 &= \alpha_6 \rho_0 - \alpha_7 \rho_1 - \alpha_4 \rho_2 + \alpha_5 \rho_3 + \alpha_2 \rho_4 - \alpha_3 \rho_5 + \alpha_0 \rho_6 + \alpha_1 \rho_7, \\ \psi_7 &= \alpha_7 \rho_0 + \alpha_6 \rho_1 - \alpha_5 \rho_2 - \alpha_4 \rho_3 + \alpha_3 \rho_4 + \alpha_2 \rho_5 - \alpha_1 \rho_6 + \alpha_0 \rho_7\end{aligned}$$

olmak üzere (3.177) denkleminin x çözümü

$$\begin{aligned}
x = \eta & \left[\left((1-\beta_0)\psi_0 - \beta_1\psi_1 - \beta_2\psi_2 - \beta_3\psi_3 - \beta_4\psi_4 - \beta_5\psi_5 - \beta_6\psi_6 - \beta_7\psi_7 \right) e_0 \right. \\
& + \left((1-\beta_0)\psi_1 + \beta_1\psi_0 - \beta_2\psi_3 + \beta_3\psi_2 - \beta_4\psi_5 + \beta_5\psi_4 + \beta_6\psi_7 - \beta_7\psi_6 \right) e_1 \\
& + \left((1-\beta_0)\psi_2 + \beta_1\psi_3 + \beta_2\psi_0 - \beta_3\psi_1 - \beta_4\psi_6 - \beta_5\psi_7 + \beta_6\psi_4 + \beta_7\psi_5 \right) e_2 \\
& + \left((1-\beta_0)\psi_3 - \beta_1\psi_2 + \beta_2\psi_1 + \beta_3\psi_0 - \beta_4\psi_7 + \beta_5\psi_6 - \beta_6\psi_5 + \beta_7\psi_4 \right) e_3 \\
& + \left((1-\beta_0)\psi_4 + \beta_1\psi_5 + \beta_2\psi_6 + \beta_3\psi_7 + \beta_4\psi_0 - \beta_5\psi_1 - \beta_6\psi_2 - \beta_7\psi_3 \right) e_4 \\
& + \left((1-\beta_0)\psi_5 - \beta_1\psi_4 + \beta_2\psi_7 - \beta_3\psi_6 + \beta_4\psi_1 + \beta_5\psi_0 + \beta_6\psi_3 - \beta_7\psi_2 \right) e_5 \\
& + \left((1-\beta_0)\psi_6 - \beta_1\psi_7 - \beta_2\psi_4 + \beta_3\psi_5 + \beta_4\psi_2 - \beta_5\psi_3 + \beta_6\psi_0 + \beta_7\psi_1 \right) e_6 \\
& \left. + \left((1-\beta_0)\psi_7 + \beta_1\psi_6 - \beta_2\psi_5 - \beta_3\psi_4 + \beta_4\psi_3 + \beta_5\psi_2 - \beta_6\psi_1 + \beta_7\psi_0 \right) e_7 \right]
\end{aligned} \tag{3.178}$$

şeklindedir.

İspat. Oktonyonların sağ ve sol matris temsilleri ile (3.177) denkleminde

$$w(\alpha)(I_8 - v(\beta)) \vec{x} = \vec{\rho} \tag{3.179}$$

denklemini elde edilir. (3.179) matris-vektör denklemini

$$v(\alpha + \beta) = v(\alpha) + v(\beta)$$

eşitliği kullanılarak

$$w(\alpha)v(1-\beta) \vec{x} = \vec{\rho} \tag{3.180}$$

şeklinde yazılır.

Durum i. (3.180) denkleminde $\beta = 1$ ve $\rho = 0$ ise

$$w(\alpha).0.\vec{x} = \vec{0}$$

elde edilir. Bu durumda (3.177) denkleminin x çözümü keyfi bir oktonyondur.

Durum ii. (3.180) denkleminde $\beta = 1$ ve $\rho \neq 0$ ise

$$w(\alpha).0.\vec{x} = \vec{\rho}$$

elde edilir. Bu durumda (3.177) denklemini tutarsızdır.

Durum iii. (3.180) denkleminde $\beta \neq 1$ ise $v(1-\beta)$ matrisinin determinanı $|1-\beta|^8 \neq 0$

olup $v(1-\beta)$ matrisi terslenebilir. Aynı zamanda $\alpha \neq 0$ için $w(\alpha)$ matrisi de

terslenebilir olduğundan (3.176) denkleminin $\vec{x}$ çözümü

$$\begin{aligned}\vec{x} &= (v(1-\beta))^{-1} w^{-1}(\alpha) \vec{\rho} \\ &= \frac{1}{|\alpha|^2} (v(1-\beta))^{-1} w^T(\alpha) \vec{\rho} \\ &= \frac{1}{|\alpha|^2 |1-\beta|^2} v^T (1-\beta) w^T(\alpha) \vec{\rho}\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Böylece oktonyonların vektör temsilinden (3.178) oktonyon çözümüne ulaşılır.

Teorem 3. 2. 13 $\alpha = \sum_{i=0}^7 \alpha_i e_i$, $\beta = \sum_{i=0}^7 \beta_i e_i \in \mathbf{O} - \{0\}$ ve $\rho = \sum_{i=0}^7 \rho_i e_i \in \mathbf{O}$ olmak üzere

$$x\alpha - (\beta x)\alpha = \rho \quad (3.181)$$

lineer denklemi dikkate alınsın.

i. (3.181) denkleminde $\beta=1$ ve $\rho=0$ ise, bu durumda (3.181) denkleminin x çözümü bir keyfi oktonyondur.

ii. (3.181) denkleminde $\beta=1$ ve $\rho \neq 0$ ise, bu durumda (3.181) denklemi tutarsızdır.

iii. (3.181) denkleminde $\beta \neq 1$, $\eta = \left(\left((\beta_0 - 1)^2 + \sum_{i=1}^7 \beta_i^2 \right) \left(\sum_{i=0}^7 \alpha_i^2 \right) \right)^{-1}$ ve φ_k 'lar

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= \alpha_0 \rho_0 + \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2 + \alpha_3 \rho_3 + \alpha_4 \rho_4 + \alpha_5 \rho_5 + \alpha_6 \rho_6 + \alpha_7 \rho_7, \\ \varphi_1 &= -\alpha_1 \rho_0 + \alpha_0 \rho_1 - \alpha_3 \rho_2 + \alpha_2 \rho_3 - \alpha_5 \rho_4 + \alpha_4 \rho_5 + \alpha_7 \rho_6 - \alpha_6 \rho_7, \\ \varphi_2 &= -\alpha_2 \rho_0 + \alpha_3 \rho_1 + \alpha_0 \rho_2 - \alpha_1 \rho_3 - \alpha_6 \rho_4 - \alpha_7 \rho_5 + \alpha_4 \rho_6 + \alpha_5 \rho_7, \\ \varphi_3 &= -\alpha_3 \rho_0 - \alpha_2 \rho_1 + \alpha_1 \rho_2 + \alpha_0 \rho_3 - \alpha_7 \rho_4 + \alpha_6 \rho_5 - \alpha_5 \rho_6 + \alpha_4 \rho_7, \\ \varphi_4 &= -\alpha_4 \rho_0 + \alpha_5 \rho_1 + \alpha_6 \rho_2 + \alpha_7 \rho_3 + \alpha_0 \rho_4 - \alpha_1 \rho_5 - \alpha_2 \rho_6 - \alpha_3 \rho_7, \\ \varphi_5 &= -\alpha_5 \rho_0 - \alpha_4 \rho_1 + \alpha_7 \rho_2 - \alpha_6 \rho_3 + \alpha_1 \rho_4 + \alpha_0 \rho_5 + \alpha_3 \rho_6 - \alpha_2 \rho_7, \\ \varphi_6 &= -\alpha_6 \rho_0 - \alpha_7 \rho_1 - \alpha_4 \rho_2 + \alpha_5 \rho_3 + \alpha_2 \rho_4 - \alpha_3 \rho_5 + \alpha_0 \rho_6 + \alpha_1 \rho_7, \\ \varphi_7 &= -\alpha_7 \rho_0 + \alpha_6 \rho_1 - \alpha_5 \rho_2 - \alpha_4 \rho_3 + \alpha_3 \rho_4 + \alpha_2 \rho_5 - \alpha_1 \rho_6 + \alpha_0 \rho_7\end{aligned}$$

olmak üzere (3.181) denkleminin x çözümü

$$\begin{aligned}
x = \eta \big[& ((1-\beta_0)\varphi_0 - \beta_1\varphi_1 - \beta_2\varphi_2 - \beta_3\varphi_3 - \beta_4\varphi_4 - \beta_5\varphi_5 - \beta_6\varphi_6 - \beta_7\varphi_7)e_0 \\
& + ((1-\beta_0)\varphi_1 + \beta_1\varphi_0 + \beta_2\varphi_3 - \beta_3\varphi_2 + \beta_4\varphi_5 - \beta_5\varphi_4 - \beta_6\varphi_7 + \beta_7\varphi_6)e_1 \\
& + ((1-\beta_0)\varphi_2 - \beta_1\varphi_3 + \beta_2\varphi_0 + \beta_3\varphi_1 + \beta_4\varphi_6 + \beta_5\varphi_7 - \beta_6\varphi_4 - \beta_7\varphi_5)e_2 \\
& + ((1-\beta_0)\varphi_3 + \beta_1\varphi_2 - \beta_2\varphi_1 + \beta_3\varphi_0 + \beta_4\varphi_7 - \beta_5\varphi_6 + \beta_6\varphi_5 - \beta_7\varphi_4)e_3 \\
& + ((1-\beta_0)\varphi_4 - \beta_1\varphi_5 - \beta_2\varphi_6 - \beta_3\varphi_7 + \beta_4\varphi_0 + \beta_5\varphi_1 + \beta_6\varphi_2 + \beta_7\varphi_3)e_4 \\
& + ((1-\beta_0)\varphi_5 + \beta_1\varphi_4 - \beta_2\varphi_7 + \beta_3\varphi_6 - \beta_4\varphi_1 + \beta_5\varphi_0 - \beta_6\varphi_3 + \beta_7\varphi_2)e_5 \\
& + ((1-\beta_0)\varphi_6 + \beta_1\varphi_7 + \beta_2\varphi_4 - \beta_3\varphi_5 - \beta_4\varphi_2 + \beta_5\varphi_3 + \beta_6\varphi_0 - \beta_7\varphi_1)e_6 \\
& + ((1-\beta_0)\varphi_7 - \beta_1\varphi_6 + \beta_2\varphi_5 + \beta_3\varphi_4 - \beta_4\varphi_3 - \beta_5\varphi_2 + \beta_6\varphi_1 + \beta_7\varphi_0)e_7 \big]
\end{aligned} \tag{3.182}$$

şeklindedir.

İspat. Oktonyonların sağ ve sol matris temsilleri ile (3.181) denkleminde

$$v(\alpha)(I_8 - w(\beta)) \vec{x} = \vec{\rho} \tag{3.183}$$

denklemini elde edilir. (3.183) matris-vektör denklemini

$$w(\alpha + \beta) = w(\alpha) + w(\beta)$$

eşitliği kullanılarak

$$v(\alpha)w(1-\beta) \vec{x} = \vec{\rho} \tag{3.184}$$

şeklide yazılır.

Durum i. (3.184) denkleminde $\beta = 1$ ve $\rho = 0$ ise

$$v(\alpha).0.\vec{x} = \vec{0}$$

elde edilir. Bu durumda (3.181) denkleminin x çözümü keyfi bir oktonyondur.

Durum ii. (3.184) denkleminde $\beta = 1$ ve $\rho \neq 0$ ise

$$v(\alpha).0.\vec{x} = \vec{\rho}$$

elde edilir. Bu durumda (3.181) denklemini tutarsızdır.

Durum iii. (3.184) denkleminde $\beta \neq 1$ ise $w(1-\beta)$ matrisinin determinanı $|1-\beta|^8 \neq 0$ olup $w(1-\beta)$ matrisi terslenebilir. Aynı zamanda $\alpha \neq 0$ için $v(\alpha)$ matrisi de

terslenebilir olduğundan (3.184) denkleminin $\vec{x}$ çözümü,

$$\begin{aligned}\vec{x} &= (w(1-\beta))^{-1} v^{-1}(\alpha) \vec{\rho} \\ &= \frac{1}{|\alpha|^2} (w(1-\beta))^{-1} v^T(\alpha) \vec{\rho} \\ &= \frac{1}{|\alpha|^2 |1-\beta|^2} w^T(1-\beta) v^T(\alpha) \vec{\rho}\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Böylece oktonyonların vektör temsilinden (3.182) oktonyon çözümüne ulaşılır.

Teorem 3. 2. 14 $\alpha = \sum_{i=0}^7 \alpha_i e_i$, $\beta = \sum_{i=0}^7 \beta_i e_i \in \mathbf{O} - \{0\}$ ve $\rho = \sum_{i=0}^7 \rho_i e_i \in \mathbf{O}$ olmak üzere

$$x\alpha - \beta(x\alpha) = \rho \quad (3.185)$$

lineer denklemi dikkate alınsın.

i. (3.185) denkleminde $\beta=1$ ve $\rho=0$ ise, bu durumda (3.185) denkleminin x çözümü bir keyfi oktonyondur.

ii. (3.185) denkleminde $\beta=1$ ve $\rho \neq 0$ ise, bu durumda (3.185) denklemi tutarsızdır.

iii. (3.185) denkleminde $\beta \neq 1$, $\eta = \left(\left((\beta_0 - 1)^2 + \sum_{i=1}^7 \beta_i^2 \right) \left(\sum_{i=0}^7 \alpha_i^2 \right) \right)^{-1}$ ve ω_k 'lar

$$\begin{aligned}\omega_0 &= (1-\beta_0)\rho_0 - \beta_1\rho_1 - \beta_2\rho_2 - \beta_3\rho_3 - \beta_4\rho_4 - \beta_5\rho_5 - \beta_6\rho_6 - \beta_7\rho_7, \\ \omega_1 &= \beta_1\rho_0 + (1-\beta_0)\rho_1 - \beta_3\rho_2 + \beta_2\rho_3 - \beta_5\rho_4 + \beta_4\rho_5 + \beta_7\rho_6 - \beta_6\rho_7, \\ \omega_2 &= \beta_2\rho_0 + \beta_3\rho_1 + (1-\beta_0)\rho_2 - \beta_1\rho_3 - \beta_6\rho_4 - \beta_7\rho_5 + \beta_4\rho_6 + \beta_5\rho_7, \\ \omega_3 &= \beta_3\rho_0 - \beta_2\rho_1 + \beta_1\rho_2 + (1-\beta_0)\rho_3 - \beta_7\rho_4 + \beta_6\rho_5 - \beta_5\rho_6 + \beta_4\rho_7, \\ \omega_4 &= \beta_4\rho_0 + \beta_5\rho_1 + \beta_6\rho_2 + \beta_7\rho_3 + (1-\beta_0)\rho_4 - \beta_1\rho_5 - \beta_2\rho_6 - \beta_3\rho_7, \\ \omega_5 &= \beta_5\rho_0 - \beta_4\rho_1 + \beta_7\rho_2 - \beta_6\rho_3 + \beta_1\rho_4 + (1-\beta_0)\rho_5 + \beta_3\rho_6 - \beta_2\rho_7, \\ \omega_6 &= \beta_6\rho_0 - \beta_7\rho_1 - \beta_4\rho_2 + \beta_5\rho_3 + \beta_2\rho_4 - \beta_3\rho_5 + (1-\beta_0)\rho_6 + \beta_1\rho_7, \\ \omega_7 &= \beta_7\rho_0 + \beta_6\rho_1 - \beta_5\rho_2 - \beta_4\rho_3 + \beta_3\rho_4 + \beta_2\rho_5 - \beta_1\rho_6 + (1-\beta_0)\rho_7\end{aligned}$$

olmak üzere (3.185) denkleminin x çözümü

$$\begin{aligned}
x = \eta \big[& (\alpha_0 \omega_0 + \alpha_1 \omega_1 + \alpha_2 \omega_2 + \alpha_3 \omega_3 + \alpha_4 \omega_4 + \alpha_5 \omega_5 + \alpha_6 \omega_6 + \alpha_7 \omega_7) e_0 \\
& + (\alpha_0 \omega_1 - \alpha_1 \omega_0 + \alpha_2 \omega_3 - \alpha_3 \omega_2 + \alpha_4 \omega_5 - \alpha_5 \omega_4 - \alpha_6 \omega_7 + \alpha_7 \omega_6) e_1 \\
& + (\alpha_0 \omega_2 - \alpha_1 \omega_3 - \alpha_2 \omega_0 + \alpha_3 \omega_1 + \alpha_4 \omega_6 + \alpha_5 \omega_7 - \alpha_6 \omega_4 - \alpha_7 \omega_5) e_2 \\
& + (\alpha_0 \omega_3 + \alpha_1 \omega_2 - \alpha_2 \omega_1 - \alpha_3 \omega_0 + \alpha_4 \omega_7 - \alpha_5 \omega_6 + \alpha_6 \omega_5 - \alpha_7 \omega_4) e_3 \\
& + (\alpha_0 \omega_4 - \alpha_1 \omega_5 - \alpha_2 \omega_6 - \alpha_3 \omega_7 - \alpha_4 \omega_0 + \alpha_5 \omega_1 + \alpha_6 \omega_2 + \alpha_7 \omega_3) e_4 \\
& + (\alpha_0 \omega_5 + \alpha_1 \omega_4 - \alpha_2 \omega_7 + \alpha_3 \omega_6 - \alpha_4 \omega_1 - \alpha_5 \omega_0 - \alpha_6 \omega_3 + \alpha_7 \omega_2) e_5 \\
& + (\alpha_0 \omega_6 + \alpha_1 \omega_7 + \alpha_2 \omega_4 - \alpha_3 \omega_5 - \alpha_4 \omega_2 + \alpha_5 \omega_3 - \alpha_6 \omega_0 - \alpha_7 \omega_1) e_6 \\
& + (\alpha_0 \omega_7 - \alpha_1 \omega_6 + \alpha_2 \omega_5 + \alpha_3 \omega_4 - \alpha_4 \omega_3 - \alpha_5 \omega_2 + \alpha_6 \omega_1 - \alpha_7 \omega_0) e_7 \big]
\end{aligned} \tag{3.186}$$

şeklindedir.

İspat. Oktonyonların sağ ve sol matris temsilleri ile (3.185) denkleminde denk

$$(I_8 - w(\beta))v(\alpha) \vec{x} = \vec{\rho} \tag{3.187}$$

denklemini elde edilir. (3.187) matris-vektör denklemini

$$w(\alpha + \beta) = w(\alpha) + w(\beta)$$

eşitliği kullanılarak

$$w(1 - \beta) v(\alpha) \vec{x} = \vec{\rho} \tag{3.188}$$

şekilde yazılır.

Durum i. (3.188) denkleminde $\beta = 1$ ve $\rho = 0$ ise

$$0.v(\alpha).\vec{x} = \vec{0}$$

elde edilir. Bu durumda (3.185) denkleminin x çözümü keyfi bir oktonyondur.

Durum ii. (3.188) denkleminde $\beta = 1$ ve $\rho \neq 0$ ise

$$0.v(\alpha).\vec{x} = \vec{\rho}$$

elde edilir. Bu durumda (3.185) denklemini tutarsızdır.

Durum iii. (3.188) denkleminde $\beta \neq 1$ ise $w(1-\beta)$ matrisinin determinanı $|1-\beta|^8 \neq 0$ olup $w(1-\beta)$ matrisi terslenebilir. Aynı zamanda $\alpha \neq 0$ için $v(\alpha)$ matrisi de terslenebilir olduğundan (3.188) denkleminin $\vec{x}$ çözümü

$$\begin{aligned}\vec{x} &= v^{-1}(\alpha) (w(1-\beta))^{-1} \vec{\rho} \\ &= \frac{1}{|\alpha|^2} v^T(\alpha) (w(1-\beta))^{-1} \vec{\rho} \\ &= \frac{1}{|\alpha|^2 |1-\beta|^2} v^T(\alpha) w^T(1-\beta) \vec{\rho}\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Böylece oktonyonların vektör temsilinden (3.186) oktonyon çözümüne ulaşılır.

Teorem 3. 2. 15 $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{O} - \{0\}$ ve $\rho = \sum_{i=0}^7 \rho_i e_i \in \mathbf{O}$ olmak üzere

$$(\alpha x)\beta + (\gamma x)\delta = \rho \quad (3.189)$$

lineer denklemi dikkate alınsın. Bu durumda, denklemin çözümü, $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ parametrelerinin durumlarına göre aşağıdaki gibidir:

1. $\beta = \delta$ olsun.

1.i. $\alpha \neq -\gamma$ olmak üzere, $\alpha + \gamma = \mu \in \mathbf{O} - \{0\}$, $\mu = \sum_{i=0}^7 \mu_i e_i$ ve (3.169) de verilen tüm η_i değerleri için, (3.189) denkleminin çözümünün $\vec{x}$ vektörel temsili ve x oktonyon çözümü sırasıyla,

$$\vec{x} = \frac{1}{|\beta|^2 |\alpha + \gamma|^2} w^T(\alpha + \gamma) v^T(\beta) \vec{\rho}$$

ve

$$\begin{aligned}
x = \frac{1}{|\beta|^2 |\mu|^2} & \left[(\mu_0 \eta_0 + \mu_1 \eta_1 + \mu_2 \eta_2 + \mu_3 \eta_3 + \mu_4 \eta_4 + \mu_5 \eta_5 + \mu_6 \eta_6 + \mu_7 \eta_7) e_0 \right. \\
& + (-\mu_1 \eta_0 + \mu_0 \eta_1 + \mu_3 \eta_2 - \mu_2 \eta_3 + \mu_5 \eta_4 - \mu_4 \eta_5 - \mu_7 \eta_6 + \mu_6 \eta_7) e_1 \\
& + (-\mu_2 \eta_0 - \mu_3 \eta_1 + \mu_0 \eta_2 + \mu_1 \eta_3 + \mu_6 \eta_4 + \mu_7 \eta_5 - \mu_4 \eta_6 - \mu_5 \eta_7) e_2 \\
& + (-\mu_3 \eta_0 + \mu_2 \eta_1 - \mu_1 \eta_2 + \mu_0 \eta_3 + \mu_7 \eta_4 - \mu_6 \eta_5 + \mu_5 \eta_6 - \mu_4 \eta_7) e_3 \\
& + (-\mu_4 \eta_0 - \mu_5 \eta_1 - \mu_6 \eta_2 - \mu_7 \eta_3 + \mu_0 \eta_4 + \mu_1 \eta_5 + \mu_2 \eta_6 + \mu_3 \eta_7) e_4 \\
& + (-\mu_5 \eta_0 + \mu_4 \eta_1 - \mu_7 \eta_2 + \mu_6 \eta_3 - \mu_1 \eta_4 + \mu_0 \eta_5 - \mu_3 \eta_6 + \mu_2 \eta_7) e_5 \\
& + (-\mu_6 \eta_0 + \mu_7 \eta_1 + \mu_4 \eta_2 - \mu_5 \eta_3 - \mu_2 \eta_4 + \mu_3 \eta_5 + \mu_0 \eta_6 - \mu_1 \eta_7) e_6 \\
& \left. + (-\mu_7 \eta_0 - \mu_6 \eta_1 + \mu_5 \eta_2 + \mu_4 \eta_3 - \mu_3 \eta_4 - \mu_2 \eta_5 + \mu_1 \eta_6 + \mu_0 \eta_7) e_7 \right]
\end{aligned} \tag{3.190}$$

şeklindedir.

1.ii. $\alpha = \gamma$ olmak üzere (3.169) de verilen tüm η_i değerleri için, (3.189)

denkleminin çözümünün $\vec{x}$ vektörel temsili ve x oktonyon çözümü sırasıyla,

$$\vec{x} = \frac{1}{2|\beta|^2 |\alpha|^2} w^T(\alpha) v^T(\beta) \vec{\rho}$$

ve

$$\begin{aligned}
x = \frac{1}{2|\beta|^2 |\alpha|^2} & \left[(\alpha_0 \eta_0 + \alpha_1 \eta_1 + \alpha_2 \eta_2 + \alpha_3 \eta_3 + \alpha_4 \eta_4 + \alpha_5 \eta_5 + \alpha_6 \eta_6 + \alpha_7 \eta_7) e_0 \right. \\
& + (-\alpha_1 \eta_0 + \alpha_0 \eta_1 + \alpha_3 \eta_2 - \alpha_2 \eta_3 + \alpha_5 \eta_4 - \alpha_4 \eta_5 - \alpha_7 \eta_6 + \alpha_6 \eta_7) e_1 \\
& + (-\alpha_2 \eta_0 - \alpha_3 \eta_1 + \alpha_0 \eta_2 + \alpha_1 \eta_3 + \alpha_6 \eta_4 + \alpha_7 \eta_5 - \alpha_4 \eta_6 - \alpha_5 \eta_7) e_2 \\
& + (-\alpha_3 \eta_0 + \alpha_2 \eta_1 - \alpha_1 \eta_2 + \alpha_0 \eta_3 + \alpha_7 \eta_4 - \alpha_6 \eta_5 + \alpha_5 \eta_6 - \alpha_4 \eta_7) e_3 \\
& + (-\alpha_4 \eta_0 - \alpha_5 \eta_1 - \alpha_6 \eta_2 - \alpha_7 \eta_3 + \alpha_0 \eta_4 + \alpha_1 \eta_5 + \alpha_2 \eta_6 + \alpha_3 \eta_7) e_4 \\
& + (-\alpha_5 \eta_0 + \alpha_4 \eta_1 - \alpha_7 \eta_2 + \alpha_6 \eta_3 - \alpha_1 \eta_4 + \alpha_0 \eta_5 - \alpha_3 \eta_6 + \alpha_2 \eta_7) e_5 \\
& + (-\alpha_6 \eta_0 + \alpha_7 \eta_1 + \alpha_4 \eta_2 - \alpha_5 \eta_3 - \alpha_2 \eta_4 + \alpha_3 \eta_5 + \alpha_0 \eta_6 - \alpha_1 \eta_7) e_6 \\
& \left. + (-\alpha_7 \eta_0 - \alpha_6 \eta_1 + \alpha_5 \eta_2 + \alpha_4 \eta_3 - \alpha_3 \eta_4 - \alpha_2 \eta_5 + \alpha_1 \eta_6 + \alpha_0 \eta_7) e_7 \right]
\end{aligned} \tag{3.191}$$

şeklindedir.

1.iii. $\gamma = \bar{\alpha}$ olmak üzere (3.189) denklemin çözümünün $\vec{x}$ vektörel temsili ve x

oktonyon çözümü sırasıyla,

$$\vec{x} = \frac{1}{2\alpha_0 |\beta|^2} v^T(\beta) \vec{p}$$

ve

$$\begin{aligned} x = \frac{1}{2\alpha_0 |\beta|^2} & \left[(\beta_0 \rho_0 + \beta_1 \rho_1 + \beta_2 \rho_2 + \beta_3 \rho_3 + \beta_4 \rho_4 + \beta_5 \rho_5 + \beta_6 \rho_6 + \beta_7 \rho_7) e_0 \right. \\ & + (-\beta_1 \rho_0 + \beta_0 \rho_1 - \beta_3 \rho_2 + \beta_2 \rho_3 - \beta_5 \rho_4 + \beta_4 \rho_5 + \beta_7 \rho_6 - \beta_6 \rho_7) e_1 \\ & + (-\beta_2 \rho_0 + \beta_3 \rho_1 + \beta_0 \rho_2 - \beta_1 \rho_3 - \beta_6 \rho_4 - \beta_7 \rho_5 + \beta_4 \rho_6 + \beta_5 \rho_7) e_2 \\ & + (-\beta_3 \rho_0 - \beta_2 \rho_1 + \beta_1 \rho_2 + \beta_0 \rho_3 - \beta_7 \rho_4 + \beta_6 \rho_5 - \beta_5 \rho_6 + \beta_4 \rho_7) e_3 \\ & + (-\beta_4 \rho_0 + \beta_5 \rho_1 + \beta_6 \rho_2 + \beta_7 \rho_3 + \beta_0 \rho_4 - \beta_1 \rho_5 - \beta_2 \rho_6 - \beta_3 \rho_7) e_4 \\ & + (-\beta_5 \rho_0 - \beta_4 \rho_1 + \beta_7 \rho_2 - \beta_6 \rho_3 + \beta_1 \rho_4 + \beta_0 \rho_5 + \beta_3 \rho_6 - \beta_2 \rho_7) e_5 \\ & + (-\beta_6 \rho_0 - \beta_7 \rho_1 - \beta_4 \rho_2 + \beta_5 \rho_3 + \beta_2 \rho_4 - \beta_3 \rho_5 + \beta_0 \rho_6 + \beta_1 \rho_7) e_6 \\ & \left. + (-\beta_7 \rho_0 + \beta_6 \rho_1 - \beta_5 \rho_2 - \beta_4 \rho_3 + \beta_3 \rho_4 + \beta_2 \rho_5 - \beta_1 \rho_6 + \beta_0 \rho_7) e_7 \right] \end{aligned} \quad (3.192)$$

şeklindedir.

1.iv. $\alpha = \bar{\gamma}$ olmak üzere (3.189) denklemin çözümünün $\vec{x}$ vektörel temsili ve x oktonyon çözümü sırasıyla,

$$\vec{x} = \frac{1}{2\gamma_0 |\beta|^2} v^T(\beta) \vec{p}$$

ve

$$\begin{aligned} x = \frac{1}{2\gamma_0 |\beta|^2} & \left[(\beta_0 \rho_0 + \beta_1 \rho_1 + \beta_2 \rho_2 + \beta_3 \rho_3 + \beta_4 \rho_4 + \beta_5 \rho_5 + \beta_6 \rho_6 + \beta_7 \rho_7) e_0 \right. \\ & + (-\beta_1 \rho_0 + \beta_0 \rho_1 - \beta_3 \rho_2 + \beta_2 \rho_3 - \beta_5 \rho_4 + \beta_4 \rho_5 + \beta_7 \rho_6 - \beta_6 \rho_7) e_1 \\ & + (-\beta_2 \rho_0 + \beta_3 \rho_1 + \beta_0 \rho_2 - \beta_1 \rho_3 - \beta_6 \rho_4 - \beta_7 \rho_5 + \beta_4 \rho_6 + \beta_5 \rho_7) e_2 \\ & + (-\beta_3 \rho_0 - \beta_2 \rho_1 + \beta_1 \rho_2 + \beta_0 \rho_3 - \beta_7 \rho_4 + \beta_6 \rho_5 - \beta_5 \rho_6 + \beta_4 \rho_7) e_3 \\ & + (-\beta_4 \rho_0 + \beta_5 \rho_1 + \beta_6 \rho_2 + \beta_7 \rho_3 + \beta_0 \rho_4 - \beta_1 \rho_5 - \beta_2 \rho_6 - \beta_3 \rho_7) e_4 \\ & + (-\beta_5 \rho_0 - \beta_4 \rho_1 + \beta_7 \rho_2 - \beta_6 \rho_3 + \beta_1 \rho_4 + \beta_0 \rho_5 + \beta_3 \rho_6 - \beta_2 \rho_7) e_5 \\ & + (-\beta_6 \rho_0 - \beta_7 \rho_1 - \beta_4 \rho_2 + \beta_5 \rho_3 + \beta_2 \rho_4 - \beta_3 \rho_5 + \beta_0 \rho_6 + \beta_1 \rho_7) e_6 \\ & \left. + (-\beta_7 \rho_0 + \beta_6 \rho_1 - \beta_5 \rho_2 - \beta_4 \rho_3 + \beta_3 \rho_4 + \beta_2 \rho_5 - \beta_1 \rho_6 + \beta_0 \rho_7) e_7 \right] \end{aligned} \quad (3.193)$$

şeklindedir.

2. $\alpha = \gamma$ olsun.

2.i. $\beta \neq -\delta$ olmak üzere $\lambda = \beta + \delta \in \mathbf{O} - \{0\}$, $\lambda = \sum_{i=0}^7 \lambda_i e_i$ ve

$$\begin{aligned}\phi_0 &= \lambda_0 \rho_0 + \lambda_1 \rho_1 + \lambda_2 \rho_2 + \lambda_3 \rho_3 + \lambda_4 \rho_4 + \lambda_5 \rho_5 + \lambda_6 \rho_6 + \lambda_7 \rho_7, \\ \phi_1 &= -\lambda_1 \rho_0 + \lambda_0 \rho_1 - \lambda_3 \rho_2 + \lambda_2 \rho_3 - \lambda_5 \rho_4 + \lambda_4 \rho_5 + \lambda_7 \rho_6 - \lambda_6 \rho_7, \\ \phi_2 &= -\lambda_2 \rho_0 + \lambda_3 \rho_1 + \lambda_0 \rho_2 - \lambda_1 \rho_3 - \lambda_6 \rho_4 - \lambda_7 \rho_5 + \lambda_4 \rho_6 + \lambda_5 \rho_7, \\ \phi_3 &= -\lambda_3 \rho_0 - \lambda_2 \rho_1 + \lambda_1 \rho_2 + \lambda_0 \rho_3 - \lambda_7 \rho_4 + \lambda_6 \rho_5 - \lambda_5 \rho_6 + \lambda_4 \rho_7, \\ \phi_4 &= -\lambda_4 \rho_0 + \lambda_5 \rho_1 + \lambda_6 \rho_2 + \lambda_7 \rho_3 + \lambda_0 \rho_4 - \lambda_1 \rho_5 - \lambda_2 \rho_6 - \lambda_3 \rho_7, \\ \phi_5 &= -\lambda_5 \rho_0 - \lambda_4 \rho_1 + \lambda_7 \rho_2 - \lambda_6 \rho_3 + \lambda_1 \rho_4 + \lambda_0 \rho_5 + \lambda_3 \rho_6 - \lambda_2 \rho_7, \\ \phi_6 &= -\lambda_6 \rho_0 - \lambda_7 \rho_1 - \lambda_4 \rho_2 + \lambda_5 \rho_3 + \lambda_2 \rho_4 - \lambda_3 \rho_5 + \lambda_0 \rho_6 + \lambda_1 \rho_7, \\ \phi_7 &= -\lambda_7 \rho_0 + \lambda_6 \rho_1 - \lambda_5 \rho_2 - \lambda_4 \rho_3 + \lambda_3 \rho_4 + \lambda_2 \rho_5 - \lambda_1 \rho_6 + \lambda_0 \rho_7\end{aligned}$$

için (3.189) denkleminin çözümünün $\vec{x}$ vektörel temsili ve x oktonyon çözümü sırasıyla,

$$\vec{x} = \frac{1}{|\alpha|^2 |\beta + \delta|^2} w^T(\alpha) v^T(\beta + \delta) \vec{\rho}$$

ve

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{|\alpha|^2 |\lambda|^2} \left[(\alpha_0 \phi_0 + \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2 + \alpha_3 \phi_3 + \alpha_4 \phi_4 + \alpha_5 \phi_5 + \alpha_6 \phi_6 + \alpha_7 \phi_7) e_0 \right. \\ &\quad + (-\alpha_1 \phi_0 + \alpha_0 \phi_1 + \alpha_3 \phi_2 - \alpha_2 \phi_3 + \alpha_5 \phi_4 - \alpha_4 \phi_5 - \alpha_7 \phi_6 + \alpha_6 \phi_7) e_1 \\ &\quad + (-\alpha_2 \phi_0 - \alpha_3 \phi_1 + \alpha_0 \phi_2 + \alpha_1 \phi_3 + \alpha_6 \phi_4 + \alpha_7 \phi_5 - \alpha_4 \phi_6 - \alpha_5 \phi_7) e_2 \\ &\quad + (-\alpha_3 \phi_0 + \alpha_2 \phi_1 - \alpha_1 \phi_2 + \alpha_0 \phi_3 + \alpha_7 \phi_4 - \alpha_6 \phi_5 + \alpha_5 \phi_6 - \alpha_4 \phi_7) e_3 \\ &\quad + (-\alpha_4 \phi_0 - \alpha_5 \phi_1 - \alpha_6 \phi_2 - \alpha_7 \phi_3 + \alpha_0 \phi_4 + \alpha_1 \phi_5 + \alpha_2 \phi_6 + \alpha_3 \phi_7) e_4 \\ &\quad + (-\alpha_5 \phi_0 + \alpha_4 \phi_1 - \alpha_7 \phi_2 + \alpha_6 \phi_3 - \alpha_1 \phi_4 + \alpha_0 \phi_5 - \alpha_3 \phi_6 + \alpha_2 \phi_7) e_5 \\ &\quad + (-\alpha_6 \phi_0 + \alpha_7 \phi_1 + \alpha_4 \phi_2 - \alpha_5 \phi_3 - \alpha_2 \phi_4 + \alpha_3 \phi_5 + \alpha_0 \phi_6 - \alpha_1 \phi_7) e_6 \\ &\quad \left. + (-\alpha_7 \phi_0 - \alpha_6 \phi_1 + \alpha_5 \phi_2 + \alpha_4 \phi_3 - \alpha_3 \phi_4 - \alpha_2 \phi_5 + \alpha_1 \phi_6 + \alpha_0 \phi_7) e_7 \right] \quad (3.194)\end{aligned}$$

şeklindedir.

2.ii. $\delta = \overline{\beta}$ olmak üzere (3.189) denkleminin $\vec{x}$ çözümünün vektörel temsili ve x oktonyon çözümü sırasıyla,

$$\vec{x} = \frac{1}{2\beta_0 |\alpha|^2} w^T(\alpha) \vec{\rho}$$

ve

$$\begin{aligned} x = \frac{1}{2\beta_0 |\alpha|^2} & \left[(\alpha_0 \rho_0 + \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2 + \alpha_3 \rho_3 + \alpha_4 \rho_4 + \alpha_5 \rho_5 + \alpha_6 \rho_6 + \alpha_7 \rho_7) e_0 \right. \\ & + (-\alpha_1 \rho_0 + \alpha_0 \rho_1 + \alpha_3 \rho_2 - \alpha_2 \rho_3 + \alpha_5 \rho_4 - \alpha_4 \rho_5 - \alpha_7 \rho_6 + \alpha_6 \rho_7) e_1 \\ & + (-\alpha_2 \rho_0 - \alpha_3 \rho_1 + \alpha_0 \rho_2 + \alpha_1 \rho_3 + \alpha_6 \rho_4 + \alpha_7 \rho_5 - \alpha_4 \rho_6 - \alpha_5 \rho_7) e_2 \\ & + (-\alpha_3 \rho_0 + \alpha_2 \rho_1 - \alpha_1 \rho_2 + \alpha_0 \rho_3 + \alpha_7 \rho_4 - \alpha_6 \rho_5 + \alpha_5 \rho_6 - \alpha_4 \rho_7) e_3 \\ & + (-\alpha_4 \rho_0 - \alpha_5 \rho_1 - \alpha_6 \rho_2 - \alpha_7 \rho_3 + \alpha_0 \rho_4 + \alpha_1 \rho_5 + \alpha_2 \rho_6 + \alpha_3 \rho_7) e_4 \\ & + (-\alpha_5 \rho_0 + \alpha_4 \rho_1 - \alpha_7 \rho_2 + \alpha_6 \rho_3 - \alpha_1 \rho_4 + \alpha_0 \rho_5 - \alpha_3 \rho_6 + \alpha_2 \rho_7) e_5 \\ & + (-\alpha_6 \rho_0 + \alpha_7 \rho_1 + \alpha_4 \rho_2 - \alpha_5 \rho_3 - \alpha_2 \rho_4 + \alpha_3 \rho_5 + \alpha_0 \rho_6 - \alpha_1 \rho_7) e_6 \\ & \left. + (-\alpha_7 \rho_0 - \alpha_6 \rho_1 + \alpha_5 \rho_2 + \alpha_4 \rho_3 - \alpha_3 \rho_4 - \alpha_2 \rho_5 + \alpha_1 \rho_6 + \alpha_0 \rho_7) e_7 \right] \end{aligned} \quad (3.195)$$

şeklindedir.

2.iii. $\beta = \bar{\delta}$ olmak üzere (3.189) denklemin çözümünün $\vec{x}$ vektörel temsili ve x oktonyon çözümü sırasıyla,

$$\vec{x} = \frac{1}{2\delta_0 |\alpha|^2} w^T(\alpha) \vec{\rho}$$

ve

$$\begin{aligned} x = \frac{1}{2\delta_0 |\alpha|^2} & \left[(\alpha_0 \rho_0 + \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2 + \alpha_3 \rho_3 + \alpha_4 \rho_4 + \alpha_5 \rho_5 + \alpha_6 \rho_6 + \alpha_7 \rho_7) e_0 \right. \\ & + (-\alpha_1 \rho_0 + \alpha_0 \rho_1 + \alpha_3 \rho_2 - \alpha_2 \rho_3 + \alpha_5 \rho_4 - \alpha_4 \rho_5 - \alpha_7 \rho_6 + \alpha_6 \rho_7) e_1 \\ & + (-\alpha_2 \rho_0 - \alpha_3 \rho_1 + \alpha_0 \rho_2 + \alpha_1 \rho_3 + \alpha_6 \rho_4 + \alpha_7 \rho_5 - \alpha_4 \rho_6 - \alpha_5 \rho_7) e_2 \\ & + (-\alpha_3 \rho_0 + \alpha_2 \rho_1 - \alpha_1 \rho_2 + \alpha_0 \rho_3 + \alpha_7 \rho_4 - \alpha_6 \rho_5 + \alpha_5 \rho_6 - \alpha_4 \rho_7) e_3 \\ & + (-\alpha_4 \rho_0 - \alpha_5 \rho_1 - \alpha_6 \rho_2 - \alpha_7 \rho_3 + \alpha_0 \rho_4 + \alpha_1 \rho_5 + \alpha_2 \rho_6 + \alpha_3 \rho_7) e_4 \\ & + (-\alpha_5 \rho_0 + \alpha_4 \rho_1 - \alpha_7 \rho_2 + \alpha_6 \rho_3 - \alpha_1 \rho_4 + \alpha_0 \rho_5 - \alpha_3 \rho_6 + \alpha_2 \rho_7) e_5 \\ & + (-\alpha_6 \rho_0 + \alpha_7 \rho_1 + \alpha_4 \rho_2 - \alpha_5 \rho_3 - \alpha_2 \rho_4 + \alpha_3 \rho_5 + \alpha_0 \rho_6 - \alpha_1 \rho_7) e_6 \\ & \left. + (-\alpha_7 \rho_0 - \alpha_6 \rho_1 + \alpha_5 \rho_2 + \alpha_4 \rho_3 - \alpha_3 \rho_4 - \alpha_2 \rho_5 + \alpha_1 \rho_6 + \alpha_0 \rho_7) e_7 \right] \end{aligned} \quad (3.196)$$

şeklindedir.

İspat. (3.189) denkleminde

$$\overrightarrow{(\alpha x)\beta} + \overrightarrow{(\gamma x)\delta} = \vec{\rho}$$

eşitliği yazılır. (3.71) ve (3.73) eşitlikleri ile

$$v(\beta)w(\alpha)\vec{x} + v(\delta)w(\gamma)\vec{x} = \vec{\rho}$$

ya da

$$\left[v(\beta)w(\alpha) + v(\delta)w(\gamma) \right] \vec{x} = \vec{\rho} \quad (3.197)$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi ise (3.197) denkleminin çözümü; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ parametrelerinin durumlarına göre bulunacaktır.

Durum 1. $\beta = \delta$ olsun. Bu durumda, (3.197) denkleminde

$$v(\beta)[w(\alpha) + w(\gamma)]\vec{x} = \vec{\rho}$$

eşitliği ve $w(\cdot)$ 'nin lineerliği ile

$$v(\beta)[w(\alpha + \gamma)]\vec{x} = \vec{\rho}$$

eşitliği elde edilir. $\beta \in \mathbf{O} - \{0\}$ olduğundan $v(\beta)$ matrisi terslenebilir ve böylece

$$[w(\alpha + \gamma)]\vec{x} = v^{-1}(\beta)\vec{\rho} \quad (3.198)$$

eşitliğine ulaşılır.

Durum 1. i. (3.198) eşitliğinde $\alpha \neq -\gamma$ alınırsa $\alpha + \gamma \neq 0$ olduğundan $w(\alpha + \gamma)$ matrisi terslenebilir ve x oktonyon çözümünün vektör temsili,

$$\begin{aligned} \vec{x} &= w^{-1}(\alpha + \gamma)v^{-1}(\beta)\vec{\rho} \\ &= \frac{1}{|\beta|^2|\alpha + \gamma|^2} w^T(\alpha + \gamma)v^T(\beta)\vec{\rho} \end{aligned} \quad (3.199)$$

şeklinde elde edilir. Böylece (3.199) eşitliğinden (3.190) eşitliği elde edilir.

Durum 1. ii. (3.198) eşitliğinde $\alpha = \gamma$ alınır

$$[w(\alpha + \alpha)]\vec{x} = v^{-1}(\beta)\vec{\rho}$$

eşitliği ve $w(\cdot)$ 'nin lineerliği ile

$$2w(\alpha)\vec{x} = v^{-1}(\beta)\vec{\rho}$$

eşitliği elde edilir. $\alpha \in \mathbf{O} - \{0\}$ olduğundan $w(\alpha)$ matrisi terslenebilir ve böylece x oktonyon çözümünün vektör temsili,

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \frac{1}{2} w^{-1}(\alpha) v^{-1}(\beta) \vec{\rho} \\ &= \frac{1}{2|\beta|^2 |\alpha|^2} w^T(\alpha) v^T(\beta) \vec{\rho}\end{aligned}\tag{3.200}$$

şeklinde elde edilir. Böylece (3.200) eşitliğinden (3.191) eşitliği elde edilir.

Durum 1. iii. (3.198) eşitliğinde $\gamma = \bar{\alpha}$ alınır

$$w(\alpha + \bar{\alpha})\vec{x} = v^{-1}(\beta)\vec{\rho}$$

eşitliği elde edilir. $w(\cdot)$ 'nin lineerliği ve $\alpha + \bar{\alpha} = 2\alpha_0$ olması ile

$$2\alpha_0 w(1)\vec{x} = v^{-1}(\beta)\vec{\rho}$$

eşitliği elde edilir. $w(1) = I_8$ olduğundan x oktonyon çözümünün vektör temsili,

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \frac{1}{2\alpha_0} v^{-1}(\beta) \vec{\rho} \\ &= \frac{1}{2\alpha_0 |\beta|^2} v^T(\beta) \vec{\rho}\end{aligned}\tag{3.201}$$

şeklinde elde edilir. Böylece (3.201) eşitliğinden (3.192) eşitliği elde edilir.

Durum 1. iv. (3.198) eşitliğinde $\alpha = \bar{\gamma}$ alınır

$$w(\gamma + \bar{\gamma})\vec{x} = v^{-1}(\beta)\vec{\rho}$$

eşitliği elde edilir. $w(\cdot)$ 'nin lineerliği ve $\gamma + \bar{\gamma} = 2\gamma_0$ olması ile

$$2\gamma_0 w(1)\vec{x} = v^{-1}(\beta)\vec{\rho}$$

eşitliği elde edilir. $w(1) = I_8$ olduğundan x oktonyon çözümünün vektör temsili,

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \frac{1}{2\gamma_0} v^{-1}(\beta)\vec{\rho} \\ &= \frac{1}{2\gamma_0 |\beta|^2} v^T(\beta)\vec{\rho}\end{aligned}\tag{3.202}$$

şeklinde elde edilir. Böylece (3.202) eşitliğinden (3.193) eşitliği elde edilir.

Durum 2. $\alpha = \gamma$ olsun. Bu durumda, (3.197) denklemden

$$[v(\beta)w(\alpha) + v(\delta)w(\alpha)]\vec{x} = \vec{\rho}$$

eşitliği ve böylece

$$[v(\beta) + v(\delta)]w(\alpha)\vec{x} = \vec{\rho}$$

eşitliği elde edilir. $v(\cdot)$ 'nin lineerliği ile

$$[v(\beta + \delta)]w(\alpha)\vec{x} = \vec{\rho}\tag{3.203}$$

eşitliğine ulaşılır.

Durum 2. i. (3.203) eşitliğinde $\beta \neq -\delta$, alınırsa $\beta + \delta \neq 0$ ve $\alpha \neq 0$ olduğundan $v(\beta + \delta)$

ve $w(\alpha)$ matrisleri terslenebilir ve böylece x oktonyon çözümünün vektör temsili,

$$\begin{aligned}\vec{x} &= w^{-1}(\alpha)v^{-1}(\beta + \delta)\vec{\rho} \\ &= \frac{1}{|\alpha|^2 |\beta + \delta|^2} w^T(\alpha)v^T(\beta + \delta)\vec{\rho}\end{aligned}\tag{3.204}$$

şeklinde elde edilir. Böylece (3.204) eşitliğinden (3.194) eşitliği elde edilir.

Durum 2. ii. (3.203) eşitliğinde $\delta = \bar{\beta}$ alınırsa,

$$\left[v(\beta + \bar{\beta}) \right] w(\alpha) \bar{x} = \bar{\rho}$$

eşitliği elde edilir. $v(\cdot)$ 'nin lineerliği ile

$$2\beta_0 v(1) w(\alpha) \bar{x} = \bar{\rho}$$

eşitliği elde edilir. $v(1) = I_8$ ve $\alpha \in \mathbf{O} - \{0\}$ için $w(\alpha)$ matrisi terslenebilir olduğundan x oktonyon çözümünün vektör temsili,

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{2\beta_0} w^{-1}(\alpha) \bar{\rho} \\ &= \frac{1}{2\beta_0 |\alpha|^2} w^T(\alpha) \bar{\rho} \end{aligned} \quad (3.205)$$

şeklinde elde edilir. Böylece (3.205) eşitliğinden (3.195) eşitliği elde edilir.

Durum 2. iii. (3.203) eşitliğinde $\beta = \bar{\delta}$ alınırsa,

$$\left[v(\bar{\delta} + \delta) \right] w(\alpha) \bar{x} = \bar{\rho}$$

eşitliği elde edilir. $v(\cdot)$ 'nin lineerliği ile

$$2\delta_0 v(1) w(\alpha) \bar{x} = \bar{\rho}$$

eşitliği elde edilir. $v(1) = I_8$ ve $\alpha \in \mathbf{O} - \{0\}$ için $w(\alpha)$ matrisi terslenebilir ve böylece x oktonyon çözümünün vektör temsili,

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{2\delta_0} w^{-1}(\alpha) \bar{\rho} \\ &= \frac{1}{2\delta_0 |\alpha|^2} w^T(\alpha) \bar{\rho} \end{aligned} \quad (3.206)$$

şeklinde elde edilir. Böylece (3.206) eşitliğinden (3.196) eşitliği elde edilir.

Teorem 3. 2. 16 $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{O} - \{0\}$ ve $\rho = \sum_{i=0}^7 \rho_i e_i \in \mathbf{O}$ olmak üzere

$$\alpha(x\beta) + \gamma(x\delta) = \rho \quad (3.207)$$

lineer denklemi dikkate alınsın. Bu durumda, (3.207) lineer oktonyonik denklemin çözümü; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ parametrelerinin durumlarına göre aşağıdaki gibidir:

1. $\beta = \delta$ olsun.

1.i. $\alpha \neq -\gamma$ olmak üzere, $\alpha + \gamma = \mu \in \mathbf{O} - \{0\}$, $\mu = \sum_{i=0}^7 \mu_i e_i$ ve

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= \mu_0 \rho_0 + \mu_1 \rho_1 + \mu_2 \rho_2 + \mu_3 \rho_3 + \mu_4 \rho_4 + \mu_5 \rho_5 + \mu_6 \rho_6 + \mu_7 \rho_7, \\ \zeta_1 &= -\mu_1 \rho_0 + \mu_0 \rho_1 + \mu_3 \rho_2 - \mu_2 \rho_3 + \mu_5 \rho_4 - \mu_4 \rho_5 - \mu_7 \rho_6 + \mu_6 \rho_7, \\ \zeta_2 &= -\mu_2 \rho_0 - \mu_3 \rho_1 + \mu_0 \rho_2 + \mu_1 \rho_3 + \mu_6 \rho_4 + \mu_7 \rho_5 - \mu_4 \rho_6 - \mu_5 \rho_7, \\ \zeta_3 &= -\mu_3 \rho_0 + \mu_2 \rho_1 - \mu_1 \rho_2 + \mu_0 \rho_3 + \mu_7 \rho_4 - \mu_6 \rho_5 + \mu_5 \rho_6 - \mu_4 \rho_7, \\ \zeta_4 &= -\mu_4 \rho_0 - \mu_5 \rho_1 - \mu_6 \rho_2 - \mu_7 \rho_3 + \mu_0 \rho_4 + \mu_1 \rho_5 + \mu_2 \rho_6 + \mu_3 \rho_7, \\ \zeta_5 &= -\mu_5 \rho_0 + \mu_4 \rho_1 - \mu_7 \rho_2 + \mu_6 \rho_3 - \mu_1 \rho_4 + \mu_0 \rho_5 - \mu_3 \rho_6 + \mu_2 \rho_7, \\ \zeta_6 &= -\mu_6 \rho_0 + \mu_7 \rho_1 + \mu_4 \rho_2 - \mu_5 \rho_3 - \mu_2 \rho_4 + \mu_3 \rho_5 + \mu_0 \rho_6 - \mu_1 \rho_7, \\ \zeta_7 &= -\mu_7 \rho_0 - \mu_6 \rho_1 + \mu_5 \rho_2 + \mu_4 \rho_3 - \mu_3 \rho_4 - \mu_2 \rho_5 + \mu_1 \rho_6 + \mu_0 \rho_7 \end{aligned}$$

için (3.207) denklemin çözümünün $\vec{x}$ vektörel temsili ve x oktonyon çözümü sırasıyla,

$$\vec{x} = \frac{1}{|\beta|^2 |\alpha + \gamma|^2} v^T(\beta) w^T(\alpha + \gamma) \vec{\rho}$$

ve

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2|\beta|^2 |\alpha|^2} [(\beta_0 \zeta_0 + \beta_1 \zeta_1 + \beta_2 \zeta_2 + \beta_3 \zeta_3 + \beta_4 \zeta_4 + \beta_5 \zeta_5 + \beta_6 \zeta_6 + \beta_7 \zeta_7) e_0 \\ &+ (-\beta_1 \zeta_0 + \beta_0 \zeta_1 - \beta_3 \zeta_2 + \beta_2 \zeta_3 - \beta_5 \zeta_4 + \beta_4 \zeta_5 + \beta_7 \zeta_6 - \beta_6 \zeta_7) e_1 \\ &+ (-\beta_2 \zeta_0 + \beta_3 \zeta_1 + \beta_0 \zeta_2 - \beta_1 \zeta_3 - \beta_6 \zeta_4 - \beta_7 \zeta_5 + \beta_4 \zeta_6 + \beta_5 \zeta_7) e_2 \\ &+ (-\beta_3 \zeta_0 - \beta_2 \zeta_1 + \beta_1 \zeta_2 + \beta_0 \zeta_3 - \beta_7 \zeta_4 + \beta_6 \zeta_5 - \beta_5 \zeta_6 + \beta_4 \zeta_7) e_3 \\ &+ (-\beta_4 \zeta_0 + \beta_5 \zeta_1 + \beta_6 \zeta_2 + \beta_7 \zeta_3 + \beta_0 \zeta_4 - \beta_1 \zeta_5 - \beta_2 \zeta_6 - \beta_3 \zeta_7) e_4 \\ &+ (-\beta_5 \zeta_0 - \beta_4 \zeta_1 + \beta_7 \zeta_2 - \beta_6 \zeta_3 + \beta_1 \zeta_4 + \beta_0 \zeta_5 + \beta_3 \zeta_6 - \beta_2 \zeta_7) e_5 \\ &+ (-\beta_6 \zeta_0 - \beta_7 \zeta_1 - \beta_4 \zeta_2 + \beta_5 \zeta_3 + \beta_2 \zeta_4 - \beta_3 \zeta_5 + \beta_0 \zeta_6 + \beta_1 \zeta_7) e_6 \\ &+ (-\beta_7 \zeta_0 + \beta_6 \zeta_1 - \beta_5 \zeta_2 - \beta_4 \zeta_3 + \beta_3 \zeta_4 + \beta_2 \zeta_5 - \beta_1 \zeta_6 + \beta_0 \zeta_7) e_7] \end{aligned} \quad (3.208)$$

şeklindedir.

1.ii. $\alpha = \gamma$ olmak üzere (3.164) da verilen tüm ϖ_i değerleri için (3.207) denklemin çözümünün $\vec{x}$ vektörel temsili ve x oktonyon çözümü sırasıyla,

$$\vec{x} = \frac{1}{2|\beta|^2|\alpha|^2} v^T(\beta) w^T(\alpha) \vec{\rho}$$

ve

$$\begin{aligned} x = \frac{1}{2|\beta|^2|\alpha|^2} & \left[(\beta_0\varpi_0 + \beta_1\varpi_1 + \beta_2\varpi_2 + \beta_3\varpi_3 + \beta_4\varpi_4 + \beta_5\varpi_5 + \beta_6\varpi_6 + \beta_7\varpi_7) e_0 \right. \\ & + (-\beta_1\varpi_0 + \beta_0\varpi_1 - \beta_3\varpi_2 + \beta_2\varpi_3 - \beta_5\varpi_4 + \beta_4\varpi_5 + \beta_7\varpi_6 - \beta_6\varpi_7) e_1 \\ & + (-\beta_2\varpi_0 + \beta_3\varpi_1 + \beta_0\varpi_2 - \beta_1\varpi_3 - \beta_6\varpi_4 - \beta_7\varpi_5 + \beta_4\varpi_6 + \beta_5\varpi_7) e_2 \\ & + (-\beta_3\varpi_0 - \beta_2\varpi_1 + \beta_1\varpi_2 + \beta_0\varpi_3 - \beta_7\varpi_4 + \beta_6\varpi_5 - \beta_5\varpi_6 + \beta_4\varpi_7) e_3 \\ & + (-\beta_4\varpi_0 + \beta_5\varpi_1 + \beta_6\varpi_2 + \beta_7\varpi_3 + \beta_0\varpi_4 - \beta_1\varpi_5 - \beta_2\varpi_6 - \beta_3\varpi_7) e_4 \\ & + (-\beta_5\varpi_0 - \beta_4\varpi_1 + \beta_7\varpi_2 - \beta_6\varpi_3 + \beta_1\varpi_4 + \beta_0\varpi_5 + \beta_3\varpi_6 - \beta_2\varpi_7) e_5 \\ & + (-\beta_6\varpi_0 - \beta_7\varpi_1 - \beta_4\varpi_2 + \beta_5\varpi_3 + \beta_2\varpi_4 - \beta_3\varpi_5 + \beta_0\varpi_6 + \beta_1\varpi_7) e_6 \\ & \left. + (-\beta_7\varpi_0 + \beta_6\varpi_1 - \beta_5\varpi_2 - \beta_4\varpi_3 + \beta_7\varpi_4 + \beta_2\varpi_5 - \beta_1\varpi_6 + \beta_0\varpi_7) e_7 \right] \end{aligned} \quad (3.209)$$

şeklindedir.

1.iii. $\gamma = \bar{\alpha}$ olmak üzere (3.207) denklemin çözümünün $\vec{x}$ vektörel temsili ve x oktonyon çözümü sırasıyla,

$$\vec{x} = \frac{1}{2\alpha_0|\beta|^2} v^T(\beta) \vec{\rho}$$

ve

$$\begin{aligned} x = \frac{1}{2\alpha_0|\beta|^2} & \left[(\beta_0\rho_0 + \beta_1\rho_1 + \beta_2\rho_2 + \beta_3\rho_3 + \beta_4\rho_4 + \beta_5\rho_5 + \beta_6\rho_6 + \beta_7\rho_7) e_0 \right. \\ & + (-\beta_1\rho_0 + \beta_0\rho_1 - \beta_3\rho_2 + \beta_2\rho_3 - \beta_5\rho_4 + \beta_4\rho_5 + \beta_7\rho_6 - \beta_6\rho_7) e_1 \\ & + (-\beta_2\rho_0 + \beta_3\rho_1 + \beta_0\rho_2 - \beta_1\rho_3 - \beta_6\rho_4 - \beta_7\rho_5 + \beta_4\rho_6 + \beta_5\rho_7) e_2 \\ & + (-\beta_3\rho_0 - \beta_2\rho_1 + \beta_1\rho_2 + \beta_0\rho_3 - \beta_7\rho_4 + \beta_6\rho_5 - \beta_5\rho_6 + \beta_4\rho_7) e_3 \\ & + (-\beta_4\rho_0 + \beta_5\rho_1 + \beta_6\rho_2 + \beta_7\rho_3 + \beta_0\rho_4 - \beta_1\rho_5 - \beta_2\rho_6 - \beta_3\rho_7) e_4 \\ & + (-\beta_5\rho_0 - \beta_4\rho_1 + \beta_7\rho_2 - \beta_6\rho_3 + \beta_1\rho_4 + \beta_0\rho_5 + \beta_3\rho_6 - \beta_2\rho_7) e_5 \\ & + (-\beta_6\rho_0 - \beta_7\rho_1 - \beta_4\rho_2 + \beta_5\rho_3 + \beta_2\rho_4 - \beta_3\rho_5 + \beta_0\rho_6 + \beta_1\rho_7) e_6 \\ & \left. + (-\beta_7\rho_0 + \beta_6\rho_1 - \beta_5\rho_2 - \beta_4\rho_3 + \beta_3\rho_4 + \beta_2\rho_5 - \beta_1\rho_6 + \beta_0\rho_7) e_7 \right] \end{aligned} \quad (3.210)$$

şeklindedir.

1.iv. $\alpha = \bar{\gamma}$ ise (3.207) denklemin çözümünün $\vec{x}$ vektörel temsili ve x oktonyon çözümü sırasıyla,

$$\vec{x} = \frac{1}{2\gamma_0 |\beta|^2} v^T(\beta) \vec{\rho}$$

ve

$$\begin{aligned} x = \frac{1}{2\gamma_0 |\beta|^2} & \left[(\beta_0 \rho_0 + \beta_1 \rho_1 + \beta_2 \rho_2 + \beta_3 \rho_3 + \beta_4 \rho_4 + \beta_5 \rho_5 + \beta_6 \rho_6 + \beta_7 \rho_7) e_0 \right. \\ & + (-\beta_1 \rho_0 + \beta_0 \rho_1 - \beta_3 \rho_2 + \beta_2 \rho_3 - \beta_5 \rho_4 + \beta_4 \rho_5 + \beta_7 \rho_6 - \beta_6 \rho_7) e_1 \\ & + (-\beta_2 \rho_0 + \beta_3 \rho_1 + \beta_0 \rho_2 - \beta_1 \rho_3 - \beta_6 \rho_4 - \beta_7 \rho_5 + \beta_4 \rho_6 + \beta_5 \rho_7) e_2 \\ & + (-\beta_3 \rho_0 - \beta_2 \rho_1 + \beta_1 \rho_2 + \beta_0 \rho_3 - \beta_7 \rho_4 + \beta_6 \rho_5 - \beta_5 \rho_6 + \beta_4 \rho_7) e_3 \\ & + (-\beta_4 \rho_0 + \beta_5 \rho_1 + \beta_6 \rho_2 + \beta_7 \rho_3 + \beta_0 \rho_4 - \beta_1 \rho_5 - \beta_2 \rho_6 - \beta_3 \rho_7) e_4 \\ & + (-\beta_5 \rho_0 - \beta_4 \rho_1 + \beta_7 \rho_2 - \beta_6 \rho_3 + \beta_1 \rho_4 + \beta_0 \rho_5 + \beta_3 \rho_6 - \beta_2 \rho_7) e_5 \\ & + (-\beta_6 \rho_0 - \beta_7 \rho_1 - \beta_4 \rho_2 + \beta_5 \rho_3 + \beta_2 \rho_4 - \beta_3 \rho_5 + \beta_0 \rho_6 + \beta_1 \rho_7) e_6 \\ & \left. + (-\beta_7 \rho_0 + \beta_6 \rho_1 - \beta_5 \rho_2 - \beta_4 \rho_3 + \beta_3 \rho_4 + \beta_2 \rho_5 - \beta_1 \rho_6 + \beta_0 \rho_7) e_7 \right] \end{aligned} \quad (3.211)$$

şeklindedir.

2. $\alpha = \gamma$ olsun.

2.i. $\beta \neq -\delta$ olmak üzere $\lambda = \beta + \delta \in \mathbf{O} - \{0\}$, $\lambda = \sum_{i=0}^7 \lambda_i e_i$ ve (3.164) da verilen

tüm ϖ_i değerleri için (3.207) denklemin çözümünün $\vec{x}$ vektörel temsili ve x oktonyon

çözümü sırasıyla,

$$\vec{x} = \frac{1}{|\alpha|^2 |\beta + \delta|^2} v^T(\beta + \delta) w^T(\alpha) \vec{\rho}$$

ve

$$\begin{aligned}
x = \frac{1}{|\alpha|^2 |\lambda|^2} & \left[(\lambda_0 \varpi_0 + \lambda_1 \varpi_1 + \lambda_2 \varpi_2 + \lambda_3 \varpi_3 + \lambda_4 \varpi_4 + \lambda_5 \varpi_5 + \lambda_6 \varpi_6 + \lambda_7 \varpi_7) e_0 \right. \\
& + (-\lambda_1 \varpi_0 + \lambda_0 \varpi_1 - \lambda_3 \varpi_2 + \lambda_2 \varpi_3 - \lambda_5 \varpi_4 + \lambda_4 \varpi_5 + \lambda_7 \varpi_6 - \lambda_6 \varpi_7) e_1 \\
& + (-\lambda_2 \varpi_0 + \lambda_3 \varpi_1 + \lambda_0 \varpi_2 - \lambda_1 \varpi_3 - \lambda_6 \varpi_4 - \lambda_7 \varpi_5 + \lambda_4 \varpi_6 + \lambda_5 \varpi_7) e_2 \\
& + (-\lambda_3 \varpi_0 - \lambda_2 \varpi_1 + \lambda_1 \varpi_2 + \lambda_0 \varpi_3 - \lambda_7 \varpi_4 + \lambda_6 \varpi_5 - \lambda_5 \varpi_6 + \lambda_4 \varpi_7) e_3 \\
& + (-\lambda_4 \varpi_0 + \lambda_5 \varpi_1 + \lambda_6 \varpi_2 + \lambda_7 \varpi_3 + \lambda_0 \varpi_4 - \lambda_1 \varpi_5 - \lambda_2 \varpi_6 - \lambda_3 \varpi_7) e_4 \\
& + (-\lambda_5 \varpi_0 - \lambda_4 \varpi_1 + \lambda_7 \varpi_2 - \lambda_6 \varpi_3 + \lambda_1 \varpi_4 + \lambda_0 \varpi_5 + \lambda_3 \varpi_6 - \lambda_2 \varpi_7) e_5 \\
& + (-\lambda_6 \varpi_0 - \lambda_7 \varpi_1 - \lambda_4 \varpi_2 + \lambda_5 \varpi_3 + \lambda_2 \varpi_4 - \lambda_3 \varpi_5 + \lambda_0 \varpi_6 + \lambda_1 \varpi_7) e_6 \\
& \left. + (-\lambda_7 \varpi_0 + \lambda_6 \varpi_1 - \lambda_5 \varpi_2 - \lambda_4 \varpi_3 + \lambda_3 \varpi_4 + \lambda_2 \varpi_5 - \lambda_1 \varpi_6 + \lambda_0 \varpi_7) e_7 \right]
\end{aligned} \tag{3.212}$$

şeklindedir.

2.ii. $\delta = \overline{\beta}$ olmak üzere (3.207) denklemin çözümünün $\vec{x}$ vektörel temsili ve x oktonyon çözümü sırasıyla,

$$\vec{x} = \frac{1}{2\beta_0 |\alpha|^2} w^T(\alpha) \vec{\rho}$$

ve

$$\begin{aligned}
x = \frac{1}{2\beta_0 |\alpha|^2} & \left[(\alpha_0 \rho_0 + \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2 + \alpha_3 \rho_3 + \alpha_4 \rho_4 + \alpha_5 \rho_5 + \alpha_6 \rho_6 + \alpha_7 \rho_7) e_0 \right. \\
& + (-\alpha_1 \rho_0 + \alpha_0 \rho_1 + \alpha_3 \rho_2 - \alpha_2 \rho_3 + \alpha_5 \rho_4 - \alpha_4 \rho_5 - \alpha_7 \rho_6 + \alpha_6 \rho_7) e_1 \\
& + (-\alpha_2 \rho_0 - \alpha_3 \rho_1 + \alpha_0 \rho_2 + \alpha_1 \rho_3 + \alpha_6 \rho_4 + \alpha_7 \rho_5 - \alpha_4 \rho_6 - \alpha_5 \rho_7) e_2 \\
& + (-\alpha_3 \rho_0 + \alpha_2 \rho_1 - \alpha_1 \rho_2 + \alpha_0 \rho_3 + \alpha_7 \rho_4 - \alpha_6 \rho_5 + \alpha_5 \rho_6 - \alpha_4 \rho_7) e_3 \\
& + (-\alpha_4 \rho_0 - \alpha_5 \rho_1 - \alpha_6 \rho_2 - \alpha_7 \rho_3 + \alpha_0 \rho_4 + \alpha_1 \rho_5 + \alpha_2 \rho_6 + \alpha_3 \rho_7) e_4 \\
& + (-\alpha_5 \rho_0 + \alpha_4 \rho_1 - \alpha_7 \rho_2 + \alpha_6 \rho_3 - \alpha_1 \rho_4 + \alpha_0 \rho_5 - \alpha_3 \rho_6 + \alpha_2 \rho_7) e_5 \\
& + (-\alpha_6 \rho_0 + \alpha_7 \rho_1 + \alpha_4 \rho_2 - \alpha_5 \rho_3 - \alpha_2 \rho_4 + \alpha_3 \rho_5 + \alpha_0 \rho_6 - \alpha_1 \rho_7) e_6 \\
& \left. + (-\alpha_7 \rho_0 - \alpha_6 \rho_1 + \alpha_5 \rho_2 + \alpha_4 \rho_3 - \alpha_3 \rho_4 - \alpha_2 \rho_5 + \alpha_1 \rho_6 + \alpha_0 \rho_7) e_7 \right]
\end{aligned} \tag{3.213}$$

şeklindedir.

2.iii. $\beta = \overline{\delta}$ olmak üzere (3.207) denklemin çözümünün $\vec{x}$ vektörel temsili ve x okyonyon çözümü sırasıyla,

$$\vec{x} = \frac{1}{2\delta_0 |\alpha|^2} w^T(\alpha) \vec{\rho}$$

ve

$$\begin{aligned} x = \frac{1}{2\delta_0 |\alpha|^2} & \left[(\alpha_0 \rho_0 + \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2 + \alpha_3 \rho_3 + \alpha_4 \rho_4 + \alpha_5 \rho_5 + \alpha_6 \rho_6 + \alpha_7 \rho_7) e_0 \right. \\ & + (-\alpha_1 \rho_0 + \alpha_0 \rho_1 + \alpha_3 \rho_2 - \alpha_2 \rho_3 + \alpha_5 \rho_4 - \alpha_4 \rho_5 - \alpha_7 \rho_6 + \alpha_6 \rho_7) e_1 \\ & + (-\alpha_2 \rho_0 - \alpha_3 \rho_1 + \alpha_0 \rho_2 + \alpha_1 \rho_3 + \alpha_6 \rho_4 + \alpha_7 \rho_5 - \alpha_4 \rho_6 - \alpha_5 \rho_7) e_2 \\ & + (-\alpha_3 \rho_0 + \alpha_2 \rho_1 - \alpha_1 \rho_2 + \alpha_0 \rho_3 + \alpha_7 \rho_4 - \alpha_6 \rho_5 + \alpha_5 \rho_6 - \alpha_4 \rho_7) e_3 \\ & + (-\alpha_4 \rho_0 - \alpha_5 \rho_1 - \alpha_6 \rho_2 - \alpha_7 \rho_3 + \alpha_0 \rho_4 + \alpha_1 \rho_5 + \alpha_2 \rho_6 + \alpha_3 \rho_7) e_4 \\ & + (-\alpha_5 \rho_0 + \alpha_4 \rho_1 - \alpha_7 \rho_2 + \alpha_6 \rho_3 - \alpha_1 \rho_4 + \alpha_0 \rho_5 - \alpha_3 \rho_6 + \alpha_2 \rho_7) e_5 \\ & + (-\alpha_6 \rho_0 + \alpha_7 \rho_1 + \alpha_4 \rho_2 - \alpha_5 \rho_3 - \alpha_2 \rho_4 + \alpha_3 \rho_5 + \alpha_0 \rho_6 - \alpha_1 \rho_7) e_6 \\ & \left. + (-\alpha_7 \rho_0 - \alpha_6 \rho_1 + \alpha_5 \rho_2 + \alpha_4 \rho_3 - \alpha_3 \rho_4 - \alpha_2 \rho_5 + \alpha_1 \rho_6 + \alpha_0 \rho_7) e_7 \right] \end{aligned} \quad (3.214)$$

şeklindedir.

İspat. (3.207) denkleminde

$$\overrightarrow{(\alpha x)} + \overrightarrow{(\gamma x)} = \vec{\rho}$$

eşitliği yazılır. (3.71) ve (3.73) eşitlikleri ile

$$w(\alpha) v(\beta) \vec{x} + w(\gamma) v(\delta) \vec{x} = \vec{\rho}$$

ya da

$$\left[w(\alpha) v(\beta) + w(\gamma) v(\delta) \right] \vec{x} = \vec{\rho} \quad (3.215)$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi, (3.215) denkleminin çözümü $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ parametrelerinin durumlarına göre bulunacaktır.

Durum 1. $\beta = \delta$ olsun. Bu durumda, (3.215) eşitliğinden

$$\left[w(\alpha) + w(\gamma) \right] v(\beta) \vec{x} = \vec{\rho}$$

eşitliği elde edilir. $w(\cdot)$ 'nın lineerliği ile

$$w(\alpha + \gamma)v(\beta)\vec{x} = \vec{\rho} \quad (3.216)$$

eşitliğine ulaşılır.

Durum 1. i. (3.216) eşitliğinde $\alpha \neq -\gamma$ alınır, $\alpha + \gamma \neq 0$ ve $\beta \in \mathbf{O} - \{0\}$ olduğundan $w(\alpha + \gamma)$ ve $v(\beta)$ matrisleri terslenebilir ve x oktonyon çözümünün vektör temsili,

$$\begin{aligned} \vec{x} &= v^{-1}(\beta)w^{-1}(\alpha + \gamma)\vec{\rho} \\ &= \frac{1}{|\beta|^2|\alpha + \gamma|^2}v^T(\beta)w^T(\alpha + \gamma)\vec{\rho} \end{aligned} \quad (3.217)$$

şeklinde elde edilir. Böylece (3.217) eşitliğinden (3.208) eşitliği elde edilir.

Durum 1. ii. (3.216) eşitliğinde $\alpha = \gamma$ alınır

$$[w(\alpha + \alpha)]v(\beta)\vec{x} = \vec{\rho}$$

eşitliği ve $w(\cdot)$ 'nin lineerliğinin dikkate alınması ile de

$$2w(\alpha)v(\beta)\vec{x} = \vec{\rho}$$

eşitliği elde edilir. $\alpha, \beta \in \mathbf{O} - \{0\}$ olduğundan $w(\alpha)$ ve $v(\beta)$ matrisleri terslenebilir ve böylece x oktonyon çözümünün vektör temsili,

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \frac{1}{2}v^{-1}(\beta)w^{-1}(\alpha)\vec{\rho} \\ &= \frac{1}{2|\beta|^2|\alpha|^2}v^T(\beta)w^T(\alpha)\vec{\rho} \end{aligned} \quad (3.218)$$

şeklinde elde edilir. Böylece (3.218) eşitliğinden (3.209) eşitliği elde edilir.

Durum 1. iii. (3.216) eşitliğinde $\gamma = \bar{\alpha}$ alınır

$$w(\alpha + \bar{\alpha})v(\beta)\vec{x} = \vec{\rho}$$

eşitliği ve $w(\cdot)$ 'nin lineerliğinin dikkate alınması ile de

$$2\alpha_0 w(1)v(\beta)\vec{x} = \vec{\rho}$$

eşitliği elde edilir. $w(1) = I_8$ ve $\beta \in \mathbf{O} - \{0\}$ için $v(\beta)$ matrisi terslenebilir olduğundan x oktonyon çözümünün vektör temsili,

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \frac{1}{2\alpha_0} v^{-1}(\beta) \vec{\rho} \\ &= \frac{1}{2\alpha_0 |\beta|^2} v^T(\beta) \vec{\rho}\end{aligned}\tag{3.219}$$

şeklinde elde edilir. Böylece (3.219) eşitliğinden (3.210) eşitliği elde edilir.

Durum 1. iv. . (3.216) eşitliğinde $\alpha = \bar{\gamma}$ alınırsa

$$w(\bar{\gamma} + \gamma) v(\beta) \vec{x} = \vec{\rho}$$

eşitliği ve $w(\cdot)$ 'nın lineerliğinin dikkate alınması ile

$$2\gamma_0 w(1) v(\beta) \vec{x} = \vec{\rho}$$

eşitliği elde edilir. $w(1) = I_8$ ve $\beta \in \mathbf{O} - \{0\}$ için $v(\beta)$ matrisi terslenebilir olduğundan x oktonyon çözümünün vektör temsili,

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \frac{1}{2\gamma_0} v^{-1}(\beta) \vec{\rho} \\ &= \frac{1}{2\gamma_0 |\beta|^2} v^T(\beta) \vec{\rho}\end{aligned}\tag{3.220}$$

şeklinde elde edilir. Böylece (3.220) eşitliğinden (3.211) eşitliği elde edilir.

Durum 2. $\alpha = \gamma$ olsun. Bu durumda, (3.215) eşitliğinden

$$[w(\alpha) v(\beta) + w(\alpha) v(\delta)] \vec{x} = \vec{\rho}$$

ya da

$$w(\alpha) [v(\beta) + v(\delta)] \vec{x} = \vec{\rho}$$

eşitliği ve $v(\cdot)$ 'nin lineerliğinin dikkate alınması ile de

$$w(\alpha) [v(\beta + \delta)] \vec{x} = \vec{\rho}$$

eşitliği elde edilir. $\alpha \in \mathbf{O} - \{0\}$ için $w(\alpha)$ matrisi terslenebilir olduğundan

$$v(\beta + \delta)\vec{x} = w^{-1}(\alpha)\vec{\rho} \quad (3.221)$$

eşitliğine ulaşılır.

Durum 2. i. (3.221) eşitliğinde $\beta \neq -\delta$, alınırsa $\beta + \delta \neq 0$ olduğundan $v(\beta + \delta)$ matrisi terslenebilir ve x oktonyon çözümünün vektör temsili,

$$\begin{aligned} \vec{x} &= v^{-1}(\beta + \delta)w^{-1}(\alpha)\vec{\rho} \\ &= \frac{1}{|\alpha|^2|\beta + \delta|^2}v^T(\beta + \delta)w^T(\alpha)\vec{\rho} \end{aligned} \quad (3.222)$$

şeklinde elde edilir. Böylece (3.222) eşitliğinden (3.212) eşitliği elde edilir.

Durum 2. ii. (3.221) eşitliğinde $\delta = \bar{\beta}$ alınırsa

$$v(\beta + \bar{\beta})\vec{x} = w^{-1}(\alpha)\vec{\rho}$$

eşitliği ve $v(\cdot)$ 'nin lineerliğinin dikkate alınması ile

$$2\beta_0 v(1)\vec{x} = w^{-1}(\alpha)\vec{\rho}$$

eşitliği elde edilir. $v(1) = I_8$ olduğundan x oktonyon çözümünün vektör temsili,

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \frac{1}{2\beta_0}w^{-1}(\alpha)\vec{\rho} \\ &= \frac{1}{2\beta_0|\alpha|^2}w^T(\alpha)\vec{\rho} \end{aligned} \quad (3.223)$$

şeklinde elde edilir. Böylece (3.223) eşitliğinden (3.213) eşitliği elde edilir.

Durum 2. iii. (3.221) eşitliğinde $\beta = \bar{\delta}$ alınırsa

$$v(\bar{\delta} + \delta)\vec{x} = w^{-1}(\alpha)\vec{\rho}$$

eşitliği ve $v(\cdot)$ 'nin lineerliğinin dikkate alınması ile

$$2\delta_0 v(1)\vec{x} = w^{-1}(\alpha)\vec{\rho}$$

eşitliği elde edilir. $v(1) = I_8$ olduğundan x oktonyon çözümünün vektör temsili,

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \frac{1}{2\delta_0} w^{-1}(\alpha) \vec{\rho} \\ &= \frac{1}{2\delta_0 |\alpha|^2} w^T(\alpha) \vec{\rho}\end{aligned}\tag{3.224}$$

şeklinde elde edilir. Böylece (3.224) eşitliğinden (3.214) eşitliği elde edilir.

Bu bölümde dikkate alınan denklemler üzerine yapılan incelemeler ve elde edilen sonuçlar, 22-26 Mayıs 2013 de İzmir de Nesin Matematik Köyü'nde gerçekleştirilen “XV. Antalya Algebra Days” isimli sempozyumda sözlü olarak sunulmuş ve sonrasında yapılan yorumlar da dikkate alınarak yayımlanması için makale olarak uluslararası hakemli bir dergiye gönderilmiştir.

3.2.5. Bazı İki Yanlı Lineer Oktonyonik Denklem Sistemlerinin Çözümlerinin İncelenmesi

Bu bölümde; x ve y iki bilinmeyenli iki denklemden oluşan

$$\begin{array}{lll} ax + yb = c & ax + yb = c & ax + by = c \\ xa + yb = d' & ax + by = d' & xa + by = d' \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} ax + yb = c & ax + ya = c & ax + yb = c \\ xb + yb = d' & xb + yb = d' & xa + by = d \end{array}$$

formlarındaki lineer oktonyonik denklem sistemleri dikkate alınmakta, oktonyonların matris temsilleri, oktonyonların vektörel temsilleri gerçel matrislerin adi ve genelleştirilmiş tersleri yardımıyla bu oktonyonik denklem sistemlerinin çözümlerinin varlığı ve tekliği üzerine kriterler elde edilmekte ve çözümlerinin vektörel temsilleri kapalı formlarda verilmektedir.

Teorem 3. 2. 17 $a, b, c, d \in \mathbf{O} - \{0\}$ olmak üzere

$$\begin{cases} ax + yb = c \\ xa + yb = d \end{cases} \quad (3.225)$$

lineer oktonyon denklem sistemi dikkate alınsın. (3.225) denklem sisteminin bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart $a(c-d) = (c-d)\bar{a}$ eşitliğinin sağlanmasıdır. Bu durumda, $\vec{p}$ keyfi reel vektörü için $a(c-d) = (c-d)\bar{a}$ koşullu (3.225) sisteminin x ve y oktonyon çözümlerinin vektör temsilleri,

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \delta^-(a, a) \left(\overrightarrow{c-d} \right) + 2 \left[I_8 - \delta^-(a, a) \delta(a, a) \right] \vec{p}, \\ \vec{y} &= v^{-1}(b) \left(\vec{c} - w(a) \left[\delta^-(a, a) \left(\overrightarrow{c-d} \right) + 2 \left[I_8 - \delta^-(a, a) \delta(a, a) \right] \vec{p} \right] \right) \end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat. (3.225) denklem sisteminin birinci denkleminde ikinci denklemi çıkarılırsa,

$$ax - xa = c - d \quad (3.226)$$

elde edilir. Bilinmektedir ki (3.226) denkleminin bir çözüme sahip olabilmesi için gerek ve yeter şart $a(c-d) = (c-d)\bar{a}$ eşitliğinin sağlanmasıdır. Bu durumda, oktonyonların sağ ve sol matris temsilleri kullanılarak (3.226) denkleminde denk olan

$$[w(a) - v(a)]\vec{x} = \delta(a, a)\vec{x} = \overrightarrow{c-d} \quad (3.227)$$

denklemini yazabiliriz. Bu denklemin çözülebilir olması için gerek ve yeter şart $\delta(a, a)\delta^-(a, a)\left(\overrightarrow{c-d}\right) = \overrightarrow{c-d}$ eşitliğinin sağlanmasıdır. Bu durumda, $\vec{p}$ keyfi reel vektörü için (3.227) denkleminin genel çözümü

$$\vec{x} = \delta^-(a, a) \left(\overrightarrow{c-d} \right) + 2 \left[I_8 - \delta^-(a, a) \delta(a, a) \right] \vec{p}$$

şeklinde elde edilir. (3.225) sisteminin birinci denklemi olan $ax + yb = c$ denklemi denk olarak

$$w(a)\vec{x} + v(b)\vec{y} = \vec{c} \quad (3.228)$$

şeklinde yazılabilir. $\bar{x}$ çözümünün (3.228) denkleminde yerine yazılmasıyla $\bar{y}$ çözümü

$$\bar{y} = v^{-1}(b) \left(\bar{c} - w(a) \left[\delta^{-}(a, a) (\overline{c-d}) + 2 \left[I_8 - \delta^{-}(a, a) \delta(a, a) \right] \bar{p} \right] \right)$$

elde edilir. Sonuç olarak; (3.225) sisteminin x ve y oktonyon çözümlerinin vektör temsilleri olan $\bar{x}$ ve $\bar{y}$ çözümlerine ulaşılır.

Teorem 3. 2. 18 $a, b, c, d \in \mathbf{O} - \{0\}$ olmak üzere

$$\begin{cases} ax + yb = c \\ ax + by = d \end{cases} \quad (3.229)$$

lineer oktonyon denklem sistemi dikkate alınsın. (3.229) denklem sisteminin bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart $b(d-c) = (d-c)\bar{b}$ eşitliğinin sağlanmasıdır. Bu durumda, $\bar{p}$ keyfi reel vektörü için $b(d-c) = (d-c)\bar{b}$ koşullu (3.225) sisteminin x ve y oktonyon çözümlerinin vektör temsilleri

$$\begin{aligned} \bar{x} &= w^{-1}(a) \left(\bar{c} - v(b) \left[\delta^{-}(b, b) (\overline{d-c}) + 2 \left[I_8 - \delta^{-}(b, b) \delta(b, b) \right] \bar{p} \right] \right), \\ \bar{y} &= \delta^{-}(b, b) (\overline{d-c}) + 2 \left[I_8 - \delta^{-}(b, b) \delta(b, b) \right] \bar{p} \end{aligned} \quad (3.230)$$

şeklindedir.

İspat. (3.229) denklem sisteminin ikinci denkleminde birinci denklemi çıkarılırsa ,

$$by - yb = d - c \quad (3.231)$$

elde edilir. Bilinmektedir ki (3.231) denkleminin bir çözüme sahip olabilmesi için gerek ve yeter şart $b(c-d) = (c-d)\bar{b}$ eşitliğinin sağlanmasıdır. Bu durumda, oktonyonların sağ ve sol matris temsilleri kullanılarak (3.231) denkleminde denk olan

$$[w(b) - v(b)] \bar{y} = \delta(b, b) \bar{y} = \overline{d-c} \quad (3.232)$$

denklemini yazabiliriz. Bu denklemin çözülebilir olması için gerek ve yeter şart $\delta(b, b) \delta^{-}(b, b) (\overline{d-c}) = \overline{d-c}$ eşitliğinin sağlanmasıdır. Bu durumda, (3.232) denkleminin

genel çözümü $\vec{p}$ keyfi reel vektörü için

$$\vec{y} = \delta^-(b, b)(\overrightarrow{d-c}) + 2[I_8 - \delta^-(b, b)\delta(b, b)]\vec{p}$$

şeklinde elde edilir. (3.229) sisteminin birinci denklemi olan $ax + yb = c$ denklemi denk olarak

$$w(a)\vec{x} + v(b)\vec{y} = \vec{c} \quad (3.233)$$

yazılabilir. $\vec{y}$ çözümünün (3.233) denkleminde yerine yazılmasıyla $\vec{x}$ çözümü

$$\vec{x} = w^{-1}(a)\left(\vec{c} - v(b)\left[\delta^-(b, b)(\overrightarrow{d-c}) + 2[I_8 - \delta^-(b, b)\delta(b, b)]\vec{p}\right]\right).$$

elde edilir. Sonuç olarak; (3.229) sisteminin x ve y oktonyon çözümlerinin vektör temsilleri olan $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ çözümlerine ulaşılır.

Teorem 3. 2. 19 $a, b, c, d \in \mathbf{O} - \{0\}$ olmak üzere

$$\begin{cases} ax + by = c \\ xa + by = d \end{cases} \quad (3.234)$$

lineer oktonyon denklem sistemi dikkate alınsın. (3.234) denklem sisteminin bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart $a(c-d) = (c-d)\bar{a}$ eşitliğinin sağlanmasıdır. Bu durumda, $\vec{p}$ keyfi reel vektörü için $a(c-d) = (c-d)\bar{a}$ koşullu (3.234) sisteminin x ve y oktonyon çözümlerinin vektör temsilleri

$$\begin{aligned} \vec{x} &= w^{-1}(a)\left(\vec{c} - w(b)\left[w^{-1}(b)\left[\delta^-(a, a)(w(a)\vec{d} - v(a)\vec{c}) + 2[I_8 - \delta^-(a, a)\delta(a, a)]\vec{p}\right]\right]\right), \\ \vec{y} &= w^{-1}(b)\left[\delta^-(a, a)(w(a)\vec{d} - v(a)\vec{c}) + 2[I_8 - \delta^-(a, a)\delta(a, a)]\vec{p}\right] \end{aligned} \quad (3.235)$$

şeklindedir.

İspat. (3.234) denklem sisteminin birinci denkleminde ikinci denklemi çıkarılırsa,

$$ax - xa = c - d \quad (3.236)$$

elde edilir. Bilinmektedir ki (3.236) denkleminin bir çözüme sahip olabilmesi için gerek ve

yeter şart $a(c-d) = (c-d)\bar{a}$ eşitliğinin sağlanmasıdır. Bu durumda, oktonyonların sağ ve sol matris temsilleri kullanılarak (3.236) denkleminde denk olan

$$[w(a) - v(a)]\vec{x} = \delta(a, a)\vec{x} = \overline{c-d} \quad (3.237)$$

denklemini yazabiliriz. Bu denklemin çözülebilir olması için gerek ve yeter şart $\delta(a, a)\delta^-(a, a)(\overline{c-d}) = \overline{c-d}$ eşitliğinin sağlanmasıdır. Bu durumda, $\vec{p}$ keyfi reel vektörü için (3.237) denkleminin genel çözümü

$$\vec{x} = \delta^-(a, a)(\overline{c-d}) + 2[I_8 - \delta^-(a, a)\delta(a, a)]\vec{p}$$

şeklinde elde edilir. (3.234) sisteminin birinci denklemi olan $ax + by = c$ denklemi denk olarak

$$w(a)\vec{x} + w(b)\vec{y} = \vec{c} \quad (3.238)$$

yazılabilir. $\vec{x}$ çözümünün (3.238) denkleminde yerine yazılmasıyla $\vec{y}$ çözümü

$$\vec{y} = w^{-1}(b)\left(\vec{c} - w(a)\left[\delta^-(a, a)(\overline{c-d}) + 2[I_8 - \delta^-(a, a)\delta(a, a)]\vec{p}\right]\right)$$

elde edilir. Sonuç olarak; (3.234) sisteminin x ve y oktonyon çözümlerinin vektör temsilleri olan $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ çözümlerine ulaşılır.

Teorem 3. 2. 20 $a, b, c, d \in \mathbf{O} - \{0\}$ olmak üzere

$$\left. \begin{array}{l} ax + yb = c \\ xb + ya = d \end{array} \right\} \quad (3.239)$$

lineer oktonyon denklem sistemi dikkate alınsın. (3.239) denklem sisteminin sıfırdan farklı bir çözüme sahip olması için gerek ve yeter şart $a \sim b$ olmasıdır. Bu durumda, $\vec{p}$ keyfi reel vektörü için (3.239) sisteminin x ve y oktonyon çözümlerinin vektör temsilleri,

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \delta^-(a, b)(\overline{d-c}) + 2[I_8 - \delta^-(a, b)\delta(a, b)]\vec{p}, \\ \vec{y} &= v^{-1}(b)\left[\vec{c} - w(a)\left[\delta^-(a, b)(\overline{d-c}) + 2[I_8 - \delta^-(a, b)\delta(a, b)]\vec{p}\right]\right] \end{aligned}$$

şeklindedir. Eğer a , b 'ye benzer değilse (3.239) sisteminin tek bir çözümü vardır ve (3.239)sisteminin x ve y oktonyon çözümlerinin vektör temsilleri,

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \delta^{-1}(a, b)(\overrightarrow{d-c}), \\ \vec{y} &= v^{-1}(b)\left[\vec{c} - w(a)\left[\delta^{-1}(a, b)(\overrightarrow{d-c})\right]\right]\end{aligned}\quad (3.240)$$

şeklindedir.

İspat. (3.239) denklem sisteminin ikinci denkleminde birinci denklemi çıkarılırsa,

$$ax - xb = c - d \quad (3.241)$$

elde edilir. Oktonyonların sağ ve sol matris temsilleri kullanılarak (3.241) denkleminde denk olan

$$[w(a) - v(b)]\vec{x} = \delta(a, b)\vec{x} = \overrightarrow{c-d} \quad (3.242)$$

denklemini elde ederiz. $a \sim b$ koşulu altında $ax = xb$ denklemi sıfırdan farklı bir çözüme sahip olduğu bilinmektedir. Böylece, $\delta(a, b)$ matrisi $a \sim b$ koşulu altında singülerdir. Bu durumda, (3.242) denkleminin çözülebilir olması için gerek ve yeter şart

$$\delta(a, b)\delta^{-1}(a, b)(\overrightarrow{c-d}) = \overrightarrow{c-d}$$

olmasıdır ve (3.242) denkleminin genel çözümü $\vec{p}$ keyfi reel vektörü için

$$\vec{x} = \delta^{-1}(a, b)(\overrightarrow{c-d}) + 2[I_8 - \delta^{-1}(a, b)\delta(a, b)]\vec{p}$$

dir. (3.239) sisteminin birinci denklemi olan $ax + yb = c$ denklemi denk olarak

$$w(a)\vec{x} + v(b)\vec{y} = \vec{c} \quad (3.243)$$

şeklinde yazılabilir. $\vec{x}$ çözümünün (3.243) denkleminde yerine yazılmasıyla $\vec{y}$ çözümü

$$\vec{y} = v^{-1}(b)\left[\vec{c} - w(a)\left[\delta^{-1}(a, b)(\overrightarrow{c-d}) + 2[I_8 - \delta^{-1}(a, b)\delta(a, b)]\vec{p}\right]\right]$$

elde edilir. Eğer a oktonyonu b oktonyonuna benzer değilse, (3.239) sistemi tek bir x ve y çözüm çiftine sahiptir ve bu çözüm çiftlerinin vektör temsilleri

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \delta^{-1}(a, b) \left(\overrightarrow{c-d} \right), \\ \bar{y} &= v^{-1}(b) \left(\bar{c} - w(a) \left[\delta^{-1}(a, b) \left(\overrightarrow{c-d} \right) \right] \right)\end{aligned}$$

şeklindedir.

Teorem 3. 2. 21 $a, b, c, d \in \mathbf{O} - \{0\}$ olmak üzere

$$\begin{cases} ax + ya = c \\ xb + yb = d \end{cases} \quad (3.244)$$

lineer oktonyon denklem sistemi dikkate alınsın. Bu durumda, $\bar{p}$ keyfi reel vektörü için (3.244) sisteminin x ve y oktonyon çözümlerinin vektör temsilleri

$$\begin{aligned}\bar{x} &= w^{-1}(a) \left(\bar{c} - v(b) \left[\delta^{-}(a, a) w(a) v^{-1}(b) \left(\bar{d} - v(b) w^{-1}(a) \bar{c} \right) + 2 \left[I_8 - \delta^{-}(a, a) \delta(a, a) \right] \bar{p} \right] \right), \\ \bar{y} &= \delta^{-}(a, a) w(a) v^{-1}(b) \left(\bar{d} - v(b) w^{-1}(a) \bar{c} \right) + 2 \left[I_8 - \delta^{-}(a, a) \delta(a, a) \right] \bar{p}\end{aligned} \quad (3.245)$$

şeklindedir.

İspat. (3.244) denklem sistemindeki her bir denklerim iki yanına oktonyonların sağ ve sol matris temsillerinin uygulanmasıyla (3.244) sistemine denk olan

$$\begin{cases} w(a)\bar{x} + v(a)\bar{y} = \bar{c} \\ v(b)\bar{x} + v(b)\bar{y} = \bar{d} \end{cases} \quad (3.246)$$

sistemi elde ederiz. Bu sistem reel lineer denklem sistemidir. İlk olarak bu sistemin birinci denklemini ele alınsın. $a \neq 0$ olduğundan $w(a)$ matrisi terslenebilir. O takdirde, $\bar{x}$ çözümü

$$\bar{x} = w^{-1}(a) [\bar{c} - v(a)\bar{y}]$$

şeklindedir. Bu çözümün (3.246) sisteminin ikinci denkleminde yerine yazılmasıyla

$$v(b)w^{-1}(a) [\bar{c} - v(a)\bar{y}] + v(b)\bar{y} = \bar{d}$$

ya da denk olarak

$$v(b) \left[-w^{-1}(a)v(a) + I_8 \right] \bar{y} = \bar{d} - v(b)w^{-1}(a)\bar{c}$$

denklemini elde edilir. $b \neq 0$ olduğundan $v(b)$ matrisi terslenebilir ve böylece

$$\left[-v(a) + w(a) \right] \bar{y} = w(a)v^{-1}(b) \left[\bar{d} - v(b)w^{-1}(a)\bar{c} \right] \quad (3.247)$$

bulunur. $\bar{e} = w(a)v^{-1}(b) \left[\bar{d} - v(b)w^{-1}(a)\bar{c} \right]$ olmak üzere (3.247) denkleminin çözülebilir olması için gerek ve yeter şart $\delta(a, a)\delta^-(a, a)\bar{e} = \bar{e}$ olmasıdır. Bu durumda, (3.247) denkleminin genel çözümü $\bar{p}$ keyfi reel vektörü için

$$\bar{y} = \delta^-(a, a)w(a)v^{-1}(b) \left[\bar{d} - v(b)w^{-1}(a)\bar{c} \right] + 2 \left[I_8 - \delta^-(a, a)\delta(a, a) \right] \bar{p}$$

dir. O halde, $\bar{y}$ çözümünün $\bar{x} = w^{-1}(a) \left[\bar{c} - v(a)\bar{y} \right]$ denkleminde yerine yazılmasıyla $\bar{x}$ çözümü

$$\bar{x} = w^{-1}(a) \left[\bar{c} - v(a) \left(\delta^-(a, a)w(a)v^{-1}(b) \left[\bar{d} - v(b)w^{-1}(a)\bar{c} \right] + 2 \left[I_8 - \delta^-(a, a)\delta(a, a) \right] \bar{p} \right) \right]$$

elde edilir. Sonuç olarak; (3.244) sisteminin x ve y oktonyon çözümlerinin vektör temsilleri olan $\bar{x}$ ve $\bar{y}$ çözümlerine ulaşılır.

Teorem 3. 2. 22 $a, b, c, d \in \mathbf{O} - \{0\}$ olmak üzere

$$\begin{cases} ax + yb = c \\ xa + by = d \end{cases} \quad (3.248)$$

formunda lineer oktonyon denklem sistemi dikkate alınsın. Bu durumda, $\bar{p}$ keyfi reel vektörü için (3.248) sisteminin x ve y oktonyon çözümlerinin vektör temsilleri

$$\begin{aligned} \bar{x} &= w^{-1}(a) \left[\bar{c} - v(b) \left[\delta^-(ab, ab) \left(w(a)\bar{d} - v(a)\bar{c} \right) + 2 \left[I_8 - \delta^-(ab, ab)\delta(ab, ab) \right] \bar{p} \right] \right], \\ \bar{y} &= \delta^-(ab, ab) \left(w(a)\bar{d} - v(a)\bar{c} \right) + 2 \left[I_8 - \delta^-(ab, ab)\delta(ab, ab) \right] \bar{p} \end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat. (3.248) denklem sistemindeki her bir denklemin iki yanına oktonyonların sağ ve sol matris temsillerinin uygulanmasıyla (3.244) sistemine denk olan

$$\left. \begin{aligned} w(a)\vec{x} + v(b)\vec{y} &= \vec{c} \\ v(a)\vec{x} + w(b)\vec{y} &= \vec{d} \end{aligned} \right\} \quad (3.249)$$

sistemini elde ederiz. Bu sistem reel lineer denklem sistemidir. İlk olarak bu sistemin birinci denklemini dikkate alınsın. $a \neq 0$ olduğundan $w(a)$ matrisi terslenebilir. O takdirde, $\vec{x}$ çözümü

$$\vec{x} = w^{-1}(a)(\vec{c} - v(b)\vec{y})$$

şeklindedir. Bu çözümün (3.249) sisteminin ikinci denkleminde yerine yazılmasıyla

$$v(a)w^{-1}(a)(\vec{c} - v(b)\vec{y}) + w(b)\vec{y} = \vec{d}$$

ya da denk olarak

$$[-v(a)v(b) + w(a)w(b)]\vec{y} = w(a)(\vec{d} - v(a)w^{-1}(a)\vec{c}) \quad (3.250)$$

denklemini elde edilir. (3.250) denklemini, (3.81) ve (3.82) eşitliklerinin uygulanması ile denk olarak

$$[w(ab) - v(ba)]\vec{y} = \delta(ab, ba)\vec{y} = w(a)(\vec{d} - v(a)w^{-1}(a)\vec{c}) \quad (3.251)$$

şeklinde yazılır. $\vec{e} = w(a)(\vec{d} - v(a)w^{-1}(a)\vec{c})$ olmak üzere (3.251) denkleminin çözülebilir olması için gerek ve yeter şart $\delta(ab, ba)\delta^-(ab, ba)\vec{e} = \vec{e}$ olmasıdır. Bu durumda $\vec{p}$ keyfi reel vektörü için (3.251) denkleminin genel çözümü,

$$\vec{y} = \delta^-(ab, ba)w(a)(\vec{d} - v(a)w^{-1}(a)\vec{c}) + 2[I_8 - \delta^-(ab, ba)\delta(ab, ba)]\vec{p}$$

şeklinde elde edilir. O halde, $\vec{y}$ çözümünün $\vec{x} = w^{-1}(a)(\vec{c} - v(b)\vec{y})$ denkleminde yerine

yazılmasıyla $\vec{x}$ çözümü,

$$\vec{x} = w^{-1}(a) \left(\vec{c} - v(b) \left[\delta^-(ab, ba) w(a) (\vec{d} - v(a) w^{-1}(a) \vec{c}) + 2 \left[I_8 - \delta^-(ab, ba) \delta(ab, ba) \right] \vec{p} \right] \right)$$

elde edilir. Sonuç olarak; (3.248) sisteminin x ve y oktonyon çözümlerinin vektör temsilleri olan $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ çözümlerine ulaşılır.

Bu bölümde dikkate alınan sistemler üzerine yapılan incelemeler ve elde edilen sonuçlar, 2-5 Temmuz 2013 de Konya’da gerçekleştirilen “4. International Conference on Matrix Analysis and Applications” isimli sempozyumda sözlü olarak sunulmuş ve sonrasında yapılan yorumlar da dikkate alınarak yayımlanması için makale olarak uluslararası hakemli bir dergiye gönderilmiştir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Literatürde (Tian, 1999a; Tian, 1999b; Tian, 2000; Shpakivskyi, 2011; Helmstetter, 2012; Flaut and Shpakivskyi, 2013) ile verilen çalışmalarda

$$ax = xa, ax = xb, ax - xa = b, ax - x\bar{a} = b, ax - xb = c,$$

$$(ab)x - a(bx) = c, a(xb) - (ax)b = c, x(ab) - (xa)b = c$$

formlarındaki x bilinmeyenli lineer kuaterniyonik ve oktonyonik denklemler incelenmiş, bu denklemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliği üzerine kriterler sunulmuş ve bu denklemlerin x çözümleri verilmiştir. Bu literatür bilgisinin dikkate alınması ile bu tip denklemler; lineer kompleks kuaterniyonik denklemler ya da lineer oktonyonik denklemler olarak dikkate alınarak, bu denklemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliği üzerine sonuçlar elde etme ve çözümleri sunma tezimizin 3.2 Bölümünün temel amacı olmuştur.

Böylece genel olarak $A, B, C \in \mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ olmak üzere bu tip denklemlerin $\mathbf{H}_{\mathbb{C}}$ de

$$AX = XA, AX = XB, AX - XA = C, AX - XB = C, AX - XA^* = C, A^*X - XA = C$$

şeklinde ifade edilerek kompleks kuaterniyonların sol ve sağ matris temsillerinin kullanılması ile her bir gerçel denklemin temsili matris denklemi elde edilmiş, gerçel temsili matris denklemlerinin incelenmeleri sonucu ulaşılan bulgular ile dikkate alınan denklemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliği hakkında kriterlere sahip olunması ve çözümlerinin sunulmaları ile Bölüm 3.2.1 amaca uygun bir şekilde oluşturulabilmiştir.

$$\alpha x \beta + \gamma x \delta = \rho, \sum_{s=1}^N \alpha_s x \beta_s = \rho \text{ lineer kuaterniyonik denklemlerini, kuaterniyonların}$$

çarpımı ve eşitliği kurallarının dikkate alınması ile $A_{4 \times 4} \vec{x} = \vec{\rho}$ şeklindeki gerçel temsili denklem sistemine indirgeme, denklemlerinin çözümlerinin varlığı ve tekliği üzerine yorumlara ve çözümlerin verilmelerine gerçel temsili sistemleri üzerinden ulaşma literatürde verilen (Shpakivskyi, 2011) çalışmanın temel amacı olmuştur.

Bu literatür bilgisinin ışığında **O** oktonyon cebirinde

$$\alpha(x\alpha) = (\alpha x)\alpha = \alpha x\alpha = \rho, \quad \alpha(x\beta) = \rho \quad \text{ve} \quad (\alpha x)\beta = \rho$$

formlarındaki lineer oktonyonik denklemleri oktonyonların çarpımı ve eşitliği kurallarının dikkate alınması ile $A_{8 \times 8} \vec{x} = \vec{\rho}$ şeklindeki gerçel temsili denklem sistemine indirgeme, denklemlerinin çözümlerinin varlığı ve tekliği üzerine yorumlara ve çözümlerin verilmelerine gerçel temsili sistemleri üzerinden ulaşma amaçlarımız Bölüm 3.2.2 de gerçekleşmiştir.

Bölüm 3.2.3 de ise,

$$\alpha(x\alpha) = (\alpha x)\alpha = \alpha x\alpha = \rho, \quad \alpha(x\beta) = \rho \quad \text{ve} \quad (\alpha x)\beta = \rho$$

lineer oktonyonik denklemleri dikkate alınmış, bu denklemlerin oktonyonların matris temsilleri ile gerçel temsili denklem sistemleri elde edilmiş, bu sistemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliği üzerine kriterler sunulmuş ve oktonyonik denklemlerin x çözümlerinin $\vec{x}$ vektör temsilleri kapalı formlarda verilmiş olup, böylece literatürdeki sonuçlar genelleştirilmiştir.

Literatürde (Tian, 1999b; Tian, 2000; Flaut and Shpakivskyi, 2013) ile verilen çalışmalarda bazı lineer kuaterniyonik ve oktonyonik denklemlerinin kuaterniyonların ve oktonyonların matris temsilleri ile gerçel temsili denklem sistemleri elde edilmiş, bu sistemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliği üzerine kriterler sunulmuş ve bu denklemlerin x çözümlerinin $\vec{x}$ vektör temsilleri kapalı formlarda verilmiştir. Adı geçen çalışmaları ayrıntılı bir şekilde incelememiz sonucu, bir bilinmeyenli iki terimli

$$\alpha x - (\alpha x)\beta = \rho, \quad \alpha x - \alpha(x\beta) = \rho,$$

$$x\alpha - (\beta x)\alpha = \rho, \quad x\alpha - \beta(x\alpha) = \rho,$$

ve

$$(\alpha x)\beta + (\gamma x)\delta = \rho, \quad \alpha(x\beta) + \gamma(x\delta) = \rho,$$

formlarındaki lineer oktonyonik denklemlerin oktonyonların matris temsilleri ile temsili

gerçel sistemlerinin elde edilmeleri, bu temsili gerçel sistemler aracılığıyla bu oktonyonik denklemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliği üzerine kriterlerin verilmesi ve çözümlerinin ifade edilmeleri şeklinde Bölüm 3.2.4 oluşturulmuştur.

Literatürde (Shpakivskyi, 2011) ile verilen çalışmada iki bilinmeyenli iki denklemlili lineer kuaterniyonik denklem sistemi, kuaterniyonik denklemlerin gerçel sisteme indirgenmesi metodu ile çözümlenmiştir. Bu çalışma ayrıntılı bir şekilde incelenerek, x ve y iki bilinmeyenli iki denklemden oluşan

$$\begin{array}{lll} ax + yb = c & ax + yb = c & ax + by = c \\ xa + yb = d' & ax + by = d' & xa + by = d' \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} ax + yb = c & ax + ya = c & ax + yb = c \\ xb + yb = d' & xb + yb = d' & xa + by = d \end{array}$$

formlarındaki lineer oktonyonik denklem sistemlerinin dikkate alınmaları, oktonyonların matris temsilleri, oktonyonların vektörel temsilleri, gerçel matrislerin adi ve genelleştirilmiş tersleri yardımıyla bu oktonyonik denklem sistemlerinin çözümlerinin varlığı ve tekliği üzerine kriterlerin verilmesi ve çözümlerinin ifade edilmeleri çalışmamızın 3.2.5 Bölümünü oluşturmuştur.

Kuaterniyonik ve oktonyonik denklemlerin bir bilgisayar program kullanılmadan incelenmeleri çok dikkat, zaman ve uğraş isteyen bir süreçtir. Hesaplamalarımızda ve özellikle de denklemlerin kuaterniyon ve oktonyon çözümlerinin sunumlarında matematikçilerin yaygın olarak kullandığı Maple bilgisayar programında yer alan kuaterniyon ve oktonyon paketlerinden kontrol amaçlı faydalanılmıştır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

$AX = XA$, $AX = XB$, $AX - XA = C$, $AX - XB = C$, $AX - XA^* = C$ ve $A^*X - XA = C$ lineer kompleks kuaterniyonik denklemlerinin dikkate alınmaları kompleks kuaterniyonların matris temsilleri ile temsili gerçel sistemlerinin sunulmaları, çözümlerinin varlığı ve tekliği üzerine kriterler elde edilmesi ve çözümlerin bulunması bazı lineer kuaterniyon ve oktonyon denklemlerinin incelendiği çalışmamızın ilk ürünü olmuştur.

İkinci aşama; $\alpha(x\alpha) = (\alpha x)\alpha = \alpha x\alpha = \rho$, $\alpha(x\beta) = \rho$ ve $(\alpha x)\beta = \rho$ lineer oktonyonik denklemlerin $A_{8 \times 8} \vec{x} = \vec{\rho}$ gerçel sisteme indirgenmesi ve sonrasında çözümlerinin elde edilmesi ile sonuçlanmıştır.

Oktonyonların matris temsilleri ile $\alpha(x\alpha) = (\alpha x)\alpha = \alpha x\alpha = \rho$, $\alpha(x\beta) = \rho$ ve $(\alpha x)\beta = \rho$ lineer oktonyon denklemlerin gerçel sistemlere indirgenmeleri, bu sistemlerden hareketle oktonyonik denklemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliği üzerine kriterlerin belirlenmesi ve çözümlerinin $\vec{x}$ vektörel temsillerinin sunulması çalışmanın üçüncü aşamasında sonuçlanmıştır.

Bir bilinmeyenli iki terimli $\alpha x - (\alpha x)\beta = \rho$, $\alpha x - \alpha(x\beta) = \rho$, $x\alpha - (\beta x)\alpha = \rho$, $x\alpha - \beta(x\alpha) = \rho$, $(\alpha x)\beta + (\gamma x)\delta = \rho$ ve $\alpha(x\beta) + \gamma(x\delta) = \rho$ formlarındaki lineer oktonyonik denklemlerin oktonyonların matris temsilleri ile temsili gerçel sistemlerinin elde edilmeleri, bu temsili gerçel sistemler aracılığıyla bu oktonyonik denklemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliği üzerine kriterlerin verilmesi ve çözümlerinin ifade edilmeleri çalışmamızın dördüncü aşamasında verilmiştir.

x ve y iki bilinmeyenli iki denklemden oluşan

$$\begin{array}{lll} ax + yb = c & ax + yb = c & ax + by = c \\ xa + yb = d' & ax + by = d' & xa + by = d' \\ ax + yb = c & ax + ya = c & ax + yb = c \\ xb + yb = d' & xb + yb = d' & xa + by = d \end{array}$$

formlarındaki lineer oktonyonik denklem sistemlerinin dikkate alınmaları, oktonyonların matris temsilleri, oktonyonların vektörel temsilleri gerçel matrislerin adi ve genelleştirilmiş tersleri yardımıyla bu oktonyonik denklem sistemlerinin çözümlerinin varlığı ve tekliği üzerine kriterlerin verilmesi ve çözümlerinin ifade edilmeleri çalışmamızın beşinci aşamasında sonuçlanmıştır.

Tezimizde kuaterniyonlar ve oktonyonlar cebiri içerisinde incelenen denklem ve denklem sistemleri sedenion cebiri gibi kuaterniyon ve oktonyon cebirini kapsayan diğer cebirlerde incelenebilir. Ayrıca oktonyon cebirinde incelediğimiz reel oktonyon katsayılı denklem ve denklem sistemleri kompleks oktonyon katsayılı denklem ve denklem sistemleri olarak tanımlanabilir, bu tip denklem ve denklem sistemlerinin çözümlerinin varlığı ve tekliği üzerine kriterler verilebilir ve çözümler elde edilebilir.

KAYNAKLAR

- Adler, S. L., 1995. **Quaternionic Quantum Mechanics and Quantum Fields**, Oxford University Press, New York, USA.
- Adetunde, I. A., Oladejo, N. and Apio, D., 2010. On the Generalized Inverse of a Matrix. **American Journal of Scientific Research**, ISSN 1450-223X Issue 7, 77-89.
- Au-Yeung, Y. H., 1984. On the convexity of numerical range in quaternionic Hilbert spaces. **Linear and Multilinear Algebra** 1693-100.
- Benkart, G. ve Perez-Izquierdo, J. M., 1999. A quantum octonion algebra. **Transactions of The American Mathematical Society**, 352: 935- 968.
- Brenner, J. L., 1951. Matrices of quaternions. **Pacific J. Math.**, 1:329-335.
- Bremner, M., 1999. Quantum octonions. **Communications in Algebra**, 27:2809-2831.
- Bernevig, B.A., Hu J., Toumbas N. ve Zhang S.C., 2003. Eightdimensional quantum Hall effect and octonions. **Physical Review Letters**, 91: 236803.
- Bolat, C., 2010. **Bileşenleri reel aralıklar olan matrislerin karakteristikleri**. Yüksek Lisans Tezi. Mustafa Kemal Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Hatay, Türkiye.
- Bolat, C. ve İpek, A., 2010. Quaternion interval numbers and a matrix approach to them. **Transylvanian Journal of Mathematics and Mechanics**, 2(2): 131-139.
- Bolat, C. ve İpek, A., 2012. A method to find the solution of the linear octonionic equation $\alpha(x\alpha) = (\alpha x)\alpha = \alpha x\alpha = \rho$. **Gen. Math. Notes**, 2 (12): 10-18.
- Baez, J.C., 2002. The octonions. **Bulletin American Mathematical Society**, 39: 145-205.
- Benkart, G. ve Perez-Izquierdo, J. M., 1999. A quantum octonion algebra. **Transactions of The American Mathematical Society**, 352: 935- 968.
- Bremner, M., 1999. Quantum octonions. **Communications in Algebra**, 27: 2809-2831.
- Bernevig, B.A., Hu J., Toumbas N. and Zhang S.C., 2003. Eightdimensional quantum Hall effect and octonions. **Physical Review Letters**, 91: 236803.

- Bozkurt, D., Türen, B. ve Solak, S., 2005. **Lineer cebir, 3. baskı**. Dizgi Ofset Matbaacılık, Konya.
- Chou, J. C. K., 1992, Quaternion kinematic and dynamic differential equations. **IEEE Transaction on Robotics and Automation**, 8(1), 53-64.
- Çallıalp, F. ve Kuroğlu, N., 1996. **Lineer cebir, 2. baskı**. Ondokuz Mayıs Üniversitesi Yayınları, Samsun.
- Daboul, J. ve Delbourgo, R., 1999. Matrix representation of octonions and generalizations. **Journal of Mathematical Physics**, 40: 4134-4150.
- Davies, A.J. and Joshi, G.C., 1986. A bimodular representation of tendimensional fermions, **Journal of Mathematical Physics**, 27: 3036-3039.
- Demir, S., 2003. **Kompleks ve Dual Kuaterniyonların Fiziksel Uygulamaları**. Doktora Lisans Tezi. Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü Fizik Anabilim Dalı, Eskişehir, Türkiye.
- Edmonds, J.D., 1992. Nature's unnatural numbers: an octonion-based extension of the Dirac/Clifford algebra and Dirac/Maxwell equations. **Physics Essays** 5: 56-60.
- Flaut C., Shpakivskyi V., 2013. Real matrix representations for the complex quaternions. **Advances in Applied Clifford Algebras**, 23(3): 657-671.
- Flaut C., 2001. Some equation in algebras obtained by Cayley-Dickson process. **An. St. Univ. Ovidius Constanta**, 9(2):45-68.
- Graybill, F.A., 1983. Matrices with applications in statistics. **Colorado State University, Fort Collins**, Wadsworth.
- Grob, J., Trenkler, G. and Troschke, S. O., 2001. Quaternions: further contributions to a matrix oriented approach. **Linear Algebra and its Applications**, 326: 205-213.
- Gough, W., 1984. Quaternions and Spherical Harmonics. **European Journal of Physics**, 5:163-171.
- Gürsey, F., 1996. On the role of division, Jordan and related algebras in particle physics. **World Scientific**, Singapore.
- Halıcı, H., 2012. On Fibonacci Quaternions. **Adv. in Appl. Clifford Algebras**, 22: 321-327.

- Halıcı, H., 2013. On Complex Fibonacci Quaternions. **Adv. in Appl. Clifford Algebras**, 23: 105-112.
- Hamilton, W. R., 1866. Elements of Quaternions. **University of Dublin Press**. Edited by William Edwin Hamilton, son of the deceased author.
- Hamilton, W. R., 1899. **Elements of Quaternions Volume I, II and III**. Chelsea, New York, USA.
- Hamilton, W. R., 1853. **Lectures on Quaternions**. Royal Irish Academy.
- Hamilton, W. R., 1844. On quaternions, or on a new system of imaginaries in algebra. **Philosophical Magazine**. 3(25): 489–495.
- Helmstetter, J., 2012. The Quaternionic Equation $ax + xb = c$. **Adv. Appl. Clifford Algebras** © 2012 Springer Basel AG DOI 10.1007/s00006-012-0322-z.
- Horn, R.A., Johnson, C.R., 1985. **Matrix Analysis**. Cambridge University Press, New York.
- Huang, L., 1996. The Matrix Equation $AXB - GXD = E$ Over the Quaternion Field. **Linear Algebra Its Applications**, 234: 197-208.
- Işık, A., 2002. **Lineer cebir, 3. baskı**. Erzurum: Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Yayınları.
- Janovska, O., Opfer, G., 2008. Linear equations in quaternionic variables. **Mitt. Math. Ges. Hamburg**, 27: 223-234.
- Johnson R. E., 1944. On the equation $x\alpha = x + \beta$ over an algebraic division ring. **Bulletin of the American Mathematical Society**, 50:202-207.
- Kyrchei, I. I., 2010. Cramer's rule for some quaternion matrix equations. **Applied Mathematic and Computation**, doi:10.1016/j.amc.2010.07.003.
- Kurdglaidze, D.F., 1986. Classical theory of the octonian field. **Russian Physics Journal**, 29: 1001-1005.
- Leo, S.D. and Rotelli, P., 1997. Translations between quaternions and complex quantum mechanics. **Progress of Theoretical Physics**, 92: 917-926.
- Leo, S.D. and Abdel-Khalek, K., 1996a, Octonionic Dirac equation. **Progress of Theoretical Physics**, 96: 833-845.

- Leo, S.D. and Abdel-Khalek, K., 1996b. Octonionic quantum mechanics and complex geometry. **Progress of Theoretical Physics**, 96: 823-831.
- Lounesto, P., 1997. **Clifford algebras and spinors**. Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Marques, S., 1988. The Dirac equation in a non-Riemannian Manifold. I. An analysis using the complex algebra. **Journal of Mathematical Physics**, 29: 2127-2131.
- Marques-Bonham, S., 1991. The Dirac equation in a non-Riemannian manifold III: An analysis using the algebra of quaternions and octonions. **Journal of Mathematical Physics**, 32: 1383-1394.
- Marques-Bonham, S., 1990. The Dirac equation in a non-Riemannian manifold: II. An analysis using an internal local n-dimensional space of Yang-Mills type. **Journal of Mathematical Physics**, 31: 1478-1482.
- Mierzejewski, D., 2011. Linear Manifolds in Sets of Solutions of Quaternionic Polynomial Equations of Several Types. **Adv. Appl. Clifford Algebras**, 21: 417-428.
- Niven, I., 1941. **Equations in Quaternions**. Amer. Math. Monthly, 48, 654-661.
- Okubo, S., 1995. **Introduction to octonion and other non-associative algebras in physics**. Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- Porter, R. M., 1997. Quaternionic linear and quadratic equations. **J. Nat. Geom.**, 11(2): 101-106.
- Rao, C.R. ve Mitra, S.K., 1971. **Generalized Inverse of Matrices and its Application**. United States of America.
- Scray, J. ve Manogue, C.A., 1996. Octonionic representations of Clifford Algebras and triality. **Foundations of Physics**, 26: 17-70.
- Shpakivskyi, V., 2006. Solution of general linear quaternionic equations. **The XI Kravchuk International Scientific Conference**, Kyiv(Kiev), Ukraine, p. 661.
- Shpakivskyi, S. V., 2011. Linear quaternionic equations and their systems. **Adv. Appl. Clifford Algebras**, 21:637-645.
- Silva, C. C. and Martins, R. A., 2002. Polar and Axial Vectors Versus Quaternions. **American Journal of Physics**, 9(70): 958-964.

- Song, G.J., Wang, Q.W., 2011. Condensed Cramer rule for some restricted quaternion linear equations. **Appl. Math. Comput.**, 218: 3110-3121.
- Springer, T.A. ve Veldkamp, F.D., 2000. Octonions, Jordan algebras and exceptional groups. **Springer Verlag**, Berlin Heidelberg New York.
- Tian, Y., 1999a. Similarity and consimilarity of elements in the real Cayley-Dickson algebras. **Adv. Appl. Clifford Alg.**, 9(1): 61-76.
- Tian, Y., 1999b. Universal Factorization equalities for quaternion matrices and their applications. **Math. J. Okayama Univ.**, 41: 45-62.
- Tian, Y., 2000. Matrix representations of octonions and their applications. **Adv. Appl. Clifford Alg.**, 10(1), 61-90.
- Tolan, T., 2006. **Maxwell denklemleri ve dirac denkleminin oktonyonik temsili**. Doktora Lisans Tezi. Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir, Türkiye.
- Venit, S. ve Bishop, W., 1985. **Elementary linear algebra**. California State University at Los Angeles, PWS Publishers.
- Wang, M., 2010, On positive definite solutions of quaternionic matrix equations. **International Journal of Mathematical and Computer Sciences**, 6: 4.
- Wang, Q. W., Yu, S. W. and Zhang, Q., 2009, The real solutions to a system of quaternion matrix equations with applications. **Communications in Algebra**, 37: 2060-2079, Copyright Taylor & Francis Group, LLC ISSN: 0092-7872 print/1532-4125 online, DOI: 10.1080/00927870802317590.
- Wang, Q. W., 2005, The General Solution to a System of Real Quaternion Matrix Equations. **Computers and Mathematics with Applications**, 49: 665-675.
- Zhang, F., 1997. Quaternions and matrices of quaternions. **Linear Algebra Appl.**, 251, 21.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamın her aşamasında, büyük bir titizlik, sabır ve özveriyle bana destek olan, yoğun idari ve akademik görevlerine rağmen her fırsatta ilgisini ve desteğini esirgemeyen, yol gösteren, tez danışmanım değerli hocam Sayın Doç. Dr. Ahmet İPEK'e (Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi), çok değerli vakitlerini ve bilgilerini benden esirgemeyen jüri üyesi hocalarım Sayın Prof. Dr. Durmuş BOZKURT'a (Selçuk Üniversitesi), Sayın Doç. Dr. Ramazan TÜRKMEN'e (Selçuk Üniversitesi), Sayın Yrd. Doç. Dr. Kamil ARI'ya (Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi) ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Turgut YELOĞLU'na (Mustafa Kemal Üniversitesi) en derin saygılarımı ve minnettarlığımı iletmek isterim.

Son olarak hayatımın her aşamasında bana maddi ve manevi destek olan hayat boyu her türlü sıkıntıda yanımda yer alan ve çalışmalarım esnasında bana anlayış gösteren haklarını ödeyemeyeceğim sevgili aileme teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Cennet BOLAT

Hatay, 2014

ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Adana da doğdum. İlkokulu Kabasakal Köyü İlkokulu, Ortaokulu Öğretmen Zeynep Erdoğan Ortaokulu ve Lise'yi Ramazan Atıl Lisesi'nde tamamladım. 2002 yılında Selçuk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde lisans öğrenimine başladım. 2006 yılında mezun oldum. Aynı yıl Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans öğrenimine başladım. 2008 yılında mezun oldum. 2008 yılında Mustafa Kemal Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak göreve başladım. Aynı yıl Mustafa Kemal Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda ikinci kez yüksek lisans öğrenimine başladım. 2010 yılında mezun oldum. 2010 yılı güz döneminde Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Doktora öğrenimine başladım. 2011 yılı bahar döneminde Mustafa Kemal Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Enformatik Anabilim Dalı doktora programına yatay geçiş yaparak doktora öğrenimine devam ettim. Halen Mustafa Kemal Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktayım.