



MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

**ELEMANLARI İKİNCİ MERTEBEDEN REKÜRANS İLİŞKİLİ LİNEER SAYI
DİZİLERİ OLAN BAZI ÖZEL TANIMLI DEVİRLİ MATRİSLERİN
NORMLARI**

Musa SÖZER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Antakya/HATAY

OCAK-2011

T.C.
MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ELEMANLARI İKİNCİ MERTEBEDEN REKÜRANS İLİŞKİLİ LİNEER
SAYI DİZİLERİ OLAN BAZI ÖZEL TANIMLI DEVİRLİ MATRİSLERİN
NORMLARI**

MUSA SÖZER
YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Yrd. Doç. Dr. Oğuz KILIÇOĞLU danışmanlığında hazırlanan bu tez 10/01/2011 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

Yrd. Doç. Dr. Oğuz KILIÇOĞLU
Başkan

Yrd. Doç. Dr. Ahmet İPEK
Üye

Yrd. Doç. Dr. Yakup HAMEŞ
Üye

Bu tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.

Kod No:

Prof. Dr. Necat AĞCA
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	II
ABSTRACT	III
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	IV
ÇİZELGELER DİZİNİ	VI
1. GİRİŞ	1
1.1. “Norm” Kavramı	2
1.2. Yineleme İlişkili Sayı Dizileri Hakkında	3
1.3. Kapsam ve Önem	4
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR	6
3. MATERYAL VE YÖNTEM	10
3.1. MATERYAL	10
3.1.1. Vektör Normları	10
3.1.2. Matris Normları	16
3.1.3. Matris Normları Arasındaki Bağlıntılar:	20
3.1.4. Devirli Matrisler	21
3.1.5. II-inci Mertebeden Yineleme İlişkili Lineer Diziler	23
3.2. YÖNTEM	26
3.2.1. II-inci Mertebeden Doğrusal Yineleme İlişkili Reel Sayı Girdili Devirli Matrislerin Normları	26
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA	36
5. SONUÇ ve ÖNERİLER	38
KAYNAKLAR	39
TEŞEKKÜR	43
ÖZGEÇMİŞ	44

ÖZET

**ELEMANLARI İKİNCİ MERTEBEDEN REKÜRANS İLİŞKİLİ LİNEER SAYI
DİZİLERİ OLAN BAZI ÖZEL TANIMLI DEVİRLİ MATRİSLERİN
NORMLARI**

Klasik Fibonacci ve Lucas sayı dizileri üzerine yapılmış, hemen hemen matematiğin her alanında oldukça fazla çalışma yer almaktadır. Elemanları klasik Fibonacci ve Lucas sayıları olan devirli (başka deyişle dairesel ya da circulant) matrislerin normlarını hesaplama çoğu çalışmanın amacı olmuştur. Bu yöndeki çalışmaların bazılarında, tanımlanan devirli matrislerin normları tam olarak hesaplanırken, bazılarında ise normlar için matrisin elemanlarına bağlı alt ve üst sınırlar sunulmuştur.

Bu çalışmada, klasik Fibonacci sayı dizisi $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve Lucas sayı dizisi $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$ 'i de kapsayan en genel anlamda

$$F_{s,t,0} = a, F_{s,t,1} = b \text{ ve } F_{s,t,n+1} = sF_{s,t,n} + tF_{s,t,n-1}, n \geq 1$$

şeklinde tanımlanan ikinci mertebeden lineer (doğrusal) rekürans (yineleme) ilişkili $\{F_{s,t,n}\}_{n=0}^{\infty}$ sayı dizisinin bazı özellikleri elde edildi.

Daha sonra elemanları bu formdaki sayı dizilerinin terimleri olan,

$$A = \begin{bmatrix} F_{s,t,0} & F_{s,t,1} & \cdots & F_{s,t,n-1} \\ F_{s,t,n-1} & F_{s,t,0} & \cdots & F_{s,t,n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{s,t,1} & F_{s,t,2} & \cdots & F_{s,t,0} \end{bmatrix}$$

ve

$$B = \begin{bmatrix} F_{s,t,2} & F_{s,t,3} & \cdots & F_{s,t,1} \\ F_{s,t,3} & F_{s,t,4} & \cdots & F_{s,t,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{s,t,1} & F_{s,t,2} & \cdots & F_{s,t,0} \end{bmatrix}$$

matrisleri tanımlanarak, bu matrislerin $\|\bullet\|_1$, $\|\bullet\|_{\infty}$ normları tam olarak hesaplandı ve $\|\bullet\|_2$, $\|\bullet\|_F$ normları için matrisin elemanlarına bağlı alt ve üst sınırlar elde edildi.

2011, 44 sayfa

Anahtar Kelimeler: Vektör Normu; Matris Normu; Devirli Matris; Yineleme İlişkili Sayı Dizileri.

ABSTRACT

**THE NORMS OF SOME SPECIAL DEFINED CIRCULANT MATRICES WITH
LINEAR SECOND ORDER RECURRENCE NUMBER SEQUENCES**

In almost every area of mathematics, it have existed a great deal study established on classical Fibonacci and Lucas number sequences. Computing on the norms of the circulant matrices with classical Fibonacci and Lucas numbers has been the goal of many scientific studies. In some ones of studies in this direction, when the norms of the defined circulant matrices are computed exactly, in the other studies in this direction for the norms of the defined circulant matrices it has been established the lower and upper bounds related with the elements of matrices.

In this study, some properties of the most general linear second order recurrence sequence, $\{F_{s,t,n}\}_{n=0}^{\infty}$, defined as

$$F_{s,t,0} = a, F_{s,t,1} = b \text{ ve } F_{s,t,n+1} = sF_{s,t,n} + tF_{s,t,n-1}, \quad n \geq 1,$$

and also including the classical Fibonacci number sequence $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ and Lucas number sequence $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$, have been obtained.

Afterwards, defining the matrices, whose elements are the terms of the number sequence in that form, such that

$$A = \begin{bmatrix} F_{s,t,0} & F_{s,t,1} & \cdots & F_{s,t,n-1} \\ F_{s,t,n-1} & F_{s,t,0} & \cdots & F_{s,t,n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{s,t,1} & F_{s,t,2} & \cdots & F_{s,t,0} \end{bmatrix}$$

and

$$B = \begin{bmatrix} F_{s,t,2} & F_{s,t,3} & \cdots & F_{s,t,1} \\ F_{s,t,3} & F_{s,t,4} & \cdots & F_{s,t,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{s,t,1} & F_{s,t,2} & \cdots & F_{s,t,0} \end{bmatrix}$$

the row and column norms of these matrices have been computed exactly, and the lower and upper bounds for the Euclidean and spectral norms of these matrices have been obtained.

2011, 44 pages

Key Words: Vector Norm; Matrix Norm; Circulant Matrix; Recurrence Number Sequence.

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$M_{m \times n}(\mathbb{F})$	Elemanları $\mathbb{F}$ cismine Ait Olan $m \times n$ Tipindeki Matrislerin Kümesi
$\ \cdot\ $	Norm
$\ x\ $	x Vektörünün Normu
$\ A\ $	A Matrisinin Normu
$\text{iz}(A)$	A Matrisinin İzi
A^{-1}	A Matrisinin Tersi
$\rho(A)$	A Matrisinin Spektral Yarıçapı
$\lambda(A)$	A Matrisinin Özdeğeri
$ A $	A Matrisinin Mutlak Değeri
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}^n$	Kompleks Vektörler Kümesi
$\mathbb{C}^{m \times n}$	Kompleks Matrisler Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
R_n	Taylor Serisinde n -inci Terime Kadar Olan Toplamdaki Kesme Hatası
$B_r(x)$	x Merkezli r Yarıçaplı Açık Yuvar
$B_r[x]$	x Merkezli r Yarıçaplı Kapalı Yuvar
$S_r(x)$	x Merkezli r Yarıçaplı Küre
$\ x\ _1$	x Vektörünün Toplam Normu
$\ x\ _2$	x Vektörünün Euclidean (veya Frobenius) Normu
$\ x\ _p$	x Vektörünün Hölder Normu
$\ x\ _\infty$	x Vektörünün Maksimum Normu
$\ A\ _1$	A Matrisinin Sütun Normu

$\ A\ _{\infty}$	A Matrisinin Satır Normu
$\ A\ _E$	A Matrisinin Euclide (veya Frobenius) Normu
A^T	A Matrisinin Transpozu
A^H	A Matrisinin Hermitian (eşlenik) Transpozu
$\sigma(A)$	A Matrisinin Singüler Değerleri
$A \circ B$	A ve B Matrislerinin Hadamard Çarpımı
$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$	İkinci Mertebeden Lineer Başlangıç Değerli Yineleme İlişkili Reel Sayı Dizisi
$\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$	Klasik Fibonacci Sayı Dizisi
$\{F_{k,n}\}_{n=0}^{\infty}$	k-Fibonacci Sayı Dizisi
$\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$	Klasik Lucas Sayı Dizisi
$\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$	Klasik Pell Sayı Dizisi
$\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$	Klasik Pell-Lucas Sayı Dizisi
$\{J_n\}_{n=0}^{\infty}$	Klasik Jacobsthal Sayı Dizisi
$\{j_n\}_{n=0}^{\infty}$	Klasik Jacobsthal-Lucas Sayı Dizisi
$\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$	Klasik Mersenne Sayı Dizisi
$\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$	Klasik Fermat Sayı Dizisi
$\{F_{s,t,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$	n -inci (s, t) - F ibonacci Dizisi

ÇİZELGELER DİZİNİ

	Sayfa
Çizelge 3.2.1. (a, b) ve (s, t) nin bazı değerleri için $F_{s, t, n}$ dizileri.....	26
Çizelge 3.2.2. Çizelge 3.2.1' de belirtilen sayı dizilerinin ilk 6 terimi	27

ŞEKİLLER DİZİNİ

	Sayfa
Şekil 3.1.1. $\mathbb{R}^2$ içinde açık, kapalı birim yuvarlar ve birim küreler	13

1. GİRİŞ

Devirli matrislerin fizik, olasılık ve istatistik, nümerik analiz, sayılar teorisi, geometri gibi alanlarla pek çok ilişkisi vardır. Bunun dışında devirli matrislerin birtakım özellikleri açıklanırken Fourier analizi ve grup teorisi alanlarından faydalanılır (Davis, 1979).

Frank makalesinde devirli matrislerin tanımını vermiş ve bir devirli matrisin üretilmesi konusunu incelemiştir. Benzer şekilde bir diğer çalışmada Rostermundt devirli matrislerin tanımı, oluşumu, üreteçleri ve özdeğerleri ile ilgili bilgiler vermiştir (Küçüközbek, 2007).

Bir matrisi pozitif reel sayıya dönüştürme işlemi olan matris normları matematiğin çeşitli alanlarında önemli bir yer teşkil eder. 2006 yılındaki çalışmasında Yalçiner, Catalan sayılarını kullanarak devirli matris tanımlamış, bu matrisin spektral normu için bir üst sınır elde etmiştir.

Başka bir çalışmada Fibonacci ve Lucas sayılarına bağlı olarak tanımlanan devirli matrislerin Furobenius normu incelenmiş ve spektral normları için alt ve üst sınırlar elde edilmiştir (Solak, 2005).

Bu çalışmada; öncelikle konuyla ilgili ön bilgi niteliğinde norm kavramına değinilmiş, t -inci mertebeden doğrusal yineleme ilişkili sayı dizileri tanımlanmış, vektör normu ve matris normu kavramları tanımlanarak, bu normlardan bazıları arasındaki bağıntılar verilmiş, son olarak da devirli matrisin tanımı ile devirli matrislerin özellikleri verilmiş ve ikinci mertebeden doğrusal yineleme ilişkili sayı dizileri tanımlanmıştır. Daha sonra elemanları II. mertebeden doğrusal yineleme ilişkili sayı dizilerinin terimleri olan devirli matrisler tanımlanmış, tanımlanan bu matrislerin bazı normları tam olarak hesaplanmış ve bazı normları için de alt ve üst sınırlar elde edilmiştir.

1.1. “Norm” Kavramı

$\mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$) üzerinde tanımlanan mutlak değer (veya modül) fonksiyonu ile; verilen sayının büyüklüğü, sayıya en yakın asal sayının tespiti, fonksiyonların limitlerinin bulunması, dizilerin yakınsaklık veya ıraksaklığının belirlenmesi, fonksiyonların sürekliliğinin kontrolü yapılabilmektedir.

Mutlak değer fonksiyonunun soyutlanmış hali, vektör uzayı üzerinde tanımlanan “norm” kavramıdır. Günümüzde mutlak değer fonksiyonuna, $\mathbb{R}$ cismi üzerinde tanımlanan $\mathbb{R}$ vektör uzayı üzerindeki bir norm olarak bakılmaktadır.

Üzerinde norm tanımlı vektör uzay (normlu uzay) içerisinde, vektör dizilerinin yakınsaklığı, dönüşümlerin limitleri ve sürekliliği gibi problemler tanımlanan norm ile incelenmektedir.

Norm ayrıca, sayısal değişkenlerde hata hesaplama, diferansiyel denklemlerin kararlılığı, doğrusal denklem sistemlerinin iyi konumluluğu, sosyolojide popülasyon modelleme ve kimyada ise denge durumlarının hesaplanması problemlerinde kullanılmaktadır.

“Neden farklı normlara ihtiyaç duyulmuştur?” sorusu norm denildiğinde ilk akla gelen sorulardandır. Bir vektör uzayı üzerindeki farklı normlar farklı geometrik ve analitik yapılara yol açabilmektedir. Sonsuz boyutlu bir vektör uzayı içinde bir dizinin yakınsaklığı, normun seçimine bağlı olarak değişiklik gösterebilmektedir. Bu durum analiz ve fonksiyonel analizde çok ilginç sorulara ve araştırmalara yol açmaktadır. Sonlu boyutlu bir V vektör uzayındaki bütün normlar denktir. Bir başka deyişle sonlu boyutlu bir vektör uzayı üzerinde sadece bir tane norm topolojisi vardır. Sonuç olarak, sonlu boyutlu bir vektör uzayı içindeki vektörlerin bir dizisinin yakınsaklığı norm seçiminden bağımsız olmasına rağmen farklı normlara ihtiyaç duyulmaktadır. Verilen bir dizinin yakınsaklığını bir norm ile ispatlamak, başka bir norm ile ispatlamaya göre daha kolay olabilmektedir.

1.2. Yineleme İlişkili Sayı Dizileri Hakkında

Tanım 1.3.1. $c_1, c_2, \dots, c_t, u_{n-1}, u_{n-2}, u_{n-t} \in \mathbb{C}$ ($c_t \neq 0$) olmak üzere,

$$u_n = c_1 u_{n-1} + c_2 u_{n-2} + \dots + c_t u_{n-t}, n \geq t, \quad (1.1)$$

ile tanımlanan $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sayı dizisine, *t-inci mertebeden doğrusal yineleme ilişkili kompleks sayı dizisi* denir.

Tanım 1.3.2. $c_1, c_2, \dots, c_t$ ($c_t \neq 0$), $u_{n-1}, u_{n-2}, u_{n-t} \in \mathbb{R}$ olmak üzere (1.1) ilişkisi ile verilen $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sayı dizisine, *t-inci mertebeden doğrusal yineleme ilişkili reel sayı dizisi* denir.

Yineleme ilişkili sayı dizilerinin,

- Rasyonel fonksiyonları temsil eden kuvvet serileri teorisi (Poorten, 1989),
- Pseudo-rastgele sayı üreticileri (Niederreiter, 1991, 1992, 1995) ve (Tezuka, 1996),
- k - düzgün (Becker, 1994) ve otomatik diziler (Lipshitz ve Poorten, 1990),
- Lineer yineleme ilişkili dizilerden oluşan Diophantine denklem sınıflarının çözüm dizileri (Shorey, 1986, 2000) ve (Tijdeman, 1998, 2002),
- Sonlu cisim üzerinde cebirsel değişkenli zeta fonksiyonları (Lidl ve Niederreiter, 1983),
- Dinamik zeta fonksiyonları (Bowen ve Landford, 1970), (Hinkkanen, 1994) ve (Manning, 1971),
- Grup teoriden gelen üretic fonksiyonları (du Sautoy, 1993, 1994),
- Değişmeli cebirde Hilbert serileri (Matsumura, 1989),
- Poincare serileri (Borevich ve Shafarevich, 1966), (Denef, 1984) ve (du Sautoy, 1993),

gibi bilimin temel başlıklarını oluşturan bir çok alanın ilerlemesinde önemi büyüktür. Bu şekildeki diziler nümerik analizin önemli alanı olan yaklaşım teoride, şifre biliminde, bilgisayar ile grafik çizimlerinde (McIlroy, 1992) ve de zaman serileri analizinde (Box ve Jenkins, 1970) sıkça kullanılmaktadır. Günümüzde, lineer yineleme ilişkili diziler için elde edilen bilgilerin bir araya getirildiği ve sunulduğu birçok kaynak vardır (Cerlienco,

Mignotte ve Piras, 1987), (Lidl ve Niederreiter, 1983), (Mignotte, 1989), (Mikhalev ve Nechaev, 1996), (Myerson ve Poorten, 1995), (Necaev, 1971), (Poorten, 1989) ve (Shorey ve Tijdeman, 1986).

1.3. Kapsam ve Önem

Çalışmada, klasik Fibonacci, Lucas, Pell, Jacobsthal, Mersenne, Pell-Lucas, Jacobsthal-Lucas, Fermat ve k -Fibonacci sayı dizilerini de kapsayan en genel anlamda

$$F_{s,t,0} = a, F_{s,t,1} = b \text{ ve } F_{s,t,n+1} = sF_{s,t,n} + tF_{s,t,n-1}, \quad n \geq 1,$$

şeklinde tanımlanan ikinci mertebeden doğrusal yineleme ilişkili $\{F_{s,t,n}\}_{n=0}^{\infty}$ sayı dizisinin bazı özellikleri elde edildi.

Daha sonra elemanları bu formdaki sayı dizilerinin terimleri olan,

$$A = \begin{bmatrix} F_{s,t,0} & F_{s,t,1} & \cdots & F_{s,t,n-1} \\ F_{s,t,n-1} & F_{s,t,0} & \cdots & F_{s,t,n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_{s,t,1} & F_{s,t,2} & \cdots & F_{s,t,0} \end{bmatrix}$$

ve

$$B = \begin{bmatrix} F_{s,t,2} & F_{s,t,3} & \cdots & F_{s,t,1} \\ F_{s,t,3} & F_{s,t,4} & \cdots & F_{s,t,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_{s,t,1} & F_{s,t,2} & \cdots & F_{s,t,0} \end{bmatrix}$$

matrisleri tanımlanarak, bu matrislerin satır ve sütun normları tam olarak hesaplandı ve Euclidean ve spektral normları için matrisin elemanlarına bağlı alt ve üst sınırlar elde edildi.

Çalışma, sayılar teorisi, sayısal analiz ve de matris teorisinin ilgi alanlarına giren bir çalışma olmuştur. $\{F_{s,t,n}\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin terimlerinden oluşturulan A ve B matrislerinin normları üzerine elde edilen bulgular, literatürde yer alan çoğu çalışmada ulaşılan sonuçların genelleştirilmiş durumlarıdır.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Literatürde, matrisler ile yineleme ilişkili sayı dizileri arasındaki ilişkilerin kurulduğu ve bu ilişkilerin kullanılarak sayı dizilerinin incelendiği çalışmalar oldukça fazladır. Bu bölümde, bu tez çalışmasının hazırlanmasının gerekliliğine işaret eden çalışmalardan söz edilecektir.

King' in (1960) yüksek lisans tezinde; literatürde Fibonacci Q -matrisi veya “Altın Matris” olarak bilinen

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisi ile klasik Fibonacci sayı dizisi $\{f_n\}_{n \geq 0}$ arasında

$$Q^n = \begin{pmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{pmatrix}$$

şeklinde bir ilişki sunulmakta ve daha sonra matris metotlarının kullanılması ile de Fibonacci sayıları için çeşitli özdeşlikler verilmektedir. Silvester (1979), King' in (1960) çalışmasına benzer olarak

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisini tanımlayarak, A matrisi ile n -inci klasik Fibonacci sayısı f_n arasında

$$A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

bağıntısını sundu. Aynı çalışmada; (2.1) ilişkisinden hareketle, matris metotlarını kullanarak klasik Fibonacci sayıları için özdeşlikler verdi. Kalman (1982) klasik Fibonacci dizisinin bir genelleştirmesinin matris temsiliyi sunarak matris metotları ile bu dizinin herhangi bir terimini veren bir formül üretmiştir. Er (1984), k -mertebeli Fibonacci sayılarının k -dizilerini tanımlamış ve bu dizilerin matris temsillerinden hareketle, Fibonacci

sayıları için toplam formülleri elde etmiştir. Karaduman (2004), k -mertebeli Fibonacci sayılarının k -dizileri ve matris temsilleri için yeni özellikler sundu. (2004)' te Taşçı ve Kılıç, genelleştirilmiş k -mertebeli Lucas sayılarının k -dizilerini tanımladılar, bu dizilerin matris temsillerini sunup matris metotları ile tanımlanan diziler ve temsil matrisleri için özellikler elde ettiler. Benzer olarak, Kılıç ve Taşçı (2006), genelleştirilmiş k -mertebeli Pell sayılarının k -dizilerini tanımladılar, tanımlanan dizilerin matris gösterimlerini sundular ve daha sonra matris metotları ile tanımlanan dizi ve temsil matrisi için özellikler elde ettiler. Nallı (2006), Q^n ve Q^{-n} matrislerinin Hadamard çarpım matrisi $Q^n \circ Q^{-n}$ 'i elde ederek, $Q^n \circ Q^{-n}$ matrisinin bazı özelliklerini sundu. (2004)' de Stakhov ve Rozin tarafından, simetrik hiperbolik Fibonacci sinüs ve kosinüs fonksiyonları tanımlandı, klasik Fibonacci sayıları ile olan bağıntıları açıklandı ve son olarak da tanımlanan fonksiyonların fizikteki uygulamalarına değinildi. "Altın matris" teorisinin gelişmesinde büyük rol oynayan ve de çalışmalarında, bu yapıdaki matrislerin fizikteki uygulamalarına yer veren Stakhov' un (2006)' daki çalışmasında, elemanları simetrik hiperbolik Fibonacci sinüs ve kosinüs fonksiyonları olan

$$Q^{2x} = \begin{pmatrix} cFs(2x+1) & sFs(2x) \\ sFs(2x) & cFs(2x-1) \end{pmatrix} \text{ ve } Q^{2x+1} = \begin{pmatrix} sFs(2x+2) & cFs(2x+1) \\ cFs(2x+1) & sFs(2x) \end{pmatrix}$$

matrisleri tanımlandı, Q^{2x} ve Q^{2x+1} matrisleri üzerine bazı matris metotları uygulanarak simetrik hiperbolik Fibonacci sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının bazı özellikleri sunuldu ve son olarak Q^{2x} ve Q^{2x+1} matrislerin şifre bilimindeki uygulamalarına yer verildi. Nallı (2007), Q^{2x} ve Q^{2x+1} matrislerinin Hadamard çarpımlarını inceledi. Falcon ve Plaza (2007), öncelikle geometrik bir yaklaşımla, $1 \leq k$ tamsayısı için klasik Fibonacci dizisinin genelleştirilmesi olan k -Fibonacci sayı dizisi $\{F_{k,n}\}_{n \geq 0}$ ni;

$$F_{k,0} = 0, F_{k,1} = 1 \text{ ve } F_{k,n+1} = kF_{k,n} + F_{k,n-1}$$

şeklinde tanımladılar ve daha sonra

$$\begin{pmatrix} k-1 & 1 \\ k & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F_{k,n+1} - F_{k,n} & F_{k,n} \\ F_{k,n+1} - F_{k,n-1} & F_{k,n} + F_{k,n-1} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

bağıntısını sundular. Aynı çalışmanın kalan kısmında, (2.2) bağıntısını göz önüne alarak, matris metotları ile k -Fibonacci sayıları için özdeşlikler ve formüller sundular. (2008)' de Köken ve Bozkurt' un çalışmasında, Jacobsthal F -matrisi olarak isimlendirilen

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

matrisi tanımlanmakta, F matrisi ile n -inci Jacobsthal j_n ve Jacobsthal-Lucas c_n sayıları arasındaki

$$\begin{pmatrix} j_{n+1} \\ j_n \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} j_n \\ j_{n-1} \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad \begin{pmatrix} c_{n+1} \\ c_n \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} c_n \\ c_{n-1} \end{pmatrix}$$

bağıntılar sunulmakta ve bu bağıntılardan hareketle Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayıları için özdeşlikler üretilmektedir.

H. Karner, J. Schneid ve C. W. Ueberhuber (2003) çalışmalarında, devirli matrisleri sağ ve sol devirli matris olarak sınıflandırmışlardır. Bu sağ devirli matris aslında çalışmamızda göz önüne aldığımız yukarıda tanımlanan devirli matristir. Ayrıca ters sağ devirli ve ters sol devirli matrisler tanımlanarak, bu matrislerin özdeğer ve singüler değer ayrışmaları Fourier matrisleri kullanılarak elde edilmiştir. Bu bahsedilen ters sağ devirli matris ise yukarıda tanımını verdiğimiz negacylic matristir.

D. Geller, I. Kra, S. Popescu ve S. Simanca, devirli matrislerin determinantını ve karakteristik polinomunu, birimin n . dereceden primitif kökünü kullanarak elde etmişlerdir. Devirli matrislerin oluşturduğu uzayın sonlu boyutlu değişmeli bir cebir yapısında olduğunu göstermişlerdir. Devirli matrislerin düzgün olması için gerek ve yeter şartlar verilmiş, devirli matrislerin determinantı ve kompleks projektif uzaydaki eğriler arasındaki ilişki incelenmiştir.

D. A. Lind (1970), devirli ve ters devirli matrisi, *Fibonacci* sayısı ile tanımlayarak bu matrislerin determinantlarını birimin n . dereceden pirimitif kökünü kullanarak elde etmiştir.

Solak (2005), *Fibonacci* sayıları ile devirli matrisleri tanımlayarak, bu matrisin normlarını incelemiştir.

Alptekin (2005), *Pell* sayıları ile devirli ve yarı-devirli matrisleri tanımlayarak, bu matrislerin özdeğerleri, normları ve determinantlarını incelemiştir.

Koçer (2007), *Modified Pell*, *Jacobsthal* ve *Jacobsthal-Lucas* sayıları ile tanımlı devirli, negacyclic ve yarı- devirli matrislerin özdeğerleri, determinantları ve normlarını elde etmiştir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Materyal bölümünde; sayısal hata, vektör normu, matris normu, devirli matris, yineleme ilişkili sayı dizisi kavramları verilmektedir. Yöntem bölümünde ise, çalışmanın özgün sonuçları sunulmaktadır.

3.1. MATERYAL

3.1.1. Vektör Normları

Bu bölümde vektör normları üzerinde duracağız. Norm işlemi $\|\bullet\|$ veya $\|\bullet\|_a$ sembolleri ile gösterilecektir. Burada “a”, normun çeşidini belirten sabittir.

Tanım 3.1.1. $\mathbb{F}$ kompleks sayılar cismi ve X , $\mathbb{F}$ cismi üzerinde tanımlanmış bir vektör uzayı olsun.

$$\begin{aligned} \|\bullet\| : X &\rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ x &\rightarrow \|x\| \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilen ve $\forall x, y \in X, \forall \alpha \in \mathbb{F}$ için,

- a) $\|x\| \geq 0$;
- b) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- c) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;
- d) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

aksiyomlarını sağlayan $\|\bullet\|$ dönüşümüne *vektör normu* denir.

Diğer bir ifadeyle vektör normu, x vektörünü sıfıra ya da pozitif bir reel sayıya dönüştüren bir dönüşümdür.

Üzerinde bir $\|\bullet\|$ normu tanımlanmış olan bir X vektör uzayına *normlu vektör uzay* ya da sadece *normlu uzay* adı verilir ve $(X, \|\bullet\|)$ ile gösterilir. X bir normlu uzay ise $\|x\| = 1$ eşitliğini sağlayan $x \in X$ vektörüne *birim vektör* adı verilir. Aslında norm aksiyomlarından **(a)**, diğer üç aksiyomun bir sonucudur; çünkü bu aksiyomların yardımıyla her $x \in X$ için

$$\|0\| = \|0x\| = |0|\|x\| = 0$$

ve

$$0 = \|0\| \leq \|x + (-x)\| \leq \|x\| + \|-x\| = 2\|x\|$$

bulunur.

Aşağıdaki örnek $\mathbb{F}^n$ vektör uzayı üzerinde birden fazla norm tanımlanabileceğini göstermektedir.

Örnek 3.1.1. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n$ ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere

a)

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j| = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|;$$

b)

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2};$$

c)

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} = \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p};$$

d)

$$\|x\|_\infty = \max \{ |x_j| : 1 \leq j \leq n \}$$

ile tanımlı $\|\bullet\|_1$, $\|\bullet\|_2$, $\|\bullet\|_p$ ve $\|\bullet\|_\infty$ fonksiyonları $\mathbb{F}^n$ üzerinde birer norm tanımlar.

Örnek 3.1.2. $x = (2, 4, 6, \dots, 2n) \in \mathbb{R}^n$ vektörünün $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ ve $\|\cdot\|_\infty$ normlarına göre değerleri sırasıyla,

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^n |x_j| = \sum_{j=1}^n |2j| = 2 + 4 + \dots + 2n = n(n+1) ,$$

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^n |2j|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{|2|^2 + |4|^2 + \dots + |n|^2} = \sqrt{\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}} ,$$

$$\|x\|_\infty = \max \{|x_j| : 1 \leq j \leq n\} = \max \{|2j| : 1 \leq j \leq n\} = \max \{2, 4, 6, \dots, 2n\} = 2n$$

dir.

Tanım 3.1.2. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu vektör uzayı olsun. Herhangi bir $x \in X$ noktası ve herhangi bir $r > 0$ reel sayısı için

$$B_r(x) = \{y \in X : \|x - y\| < r\}$$

kümesine x merkezli r yarıçaplı açık yuvar (açık top),

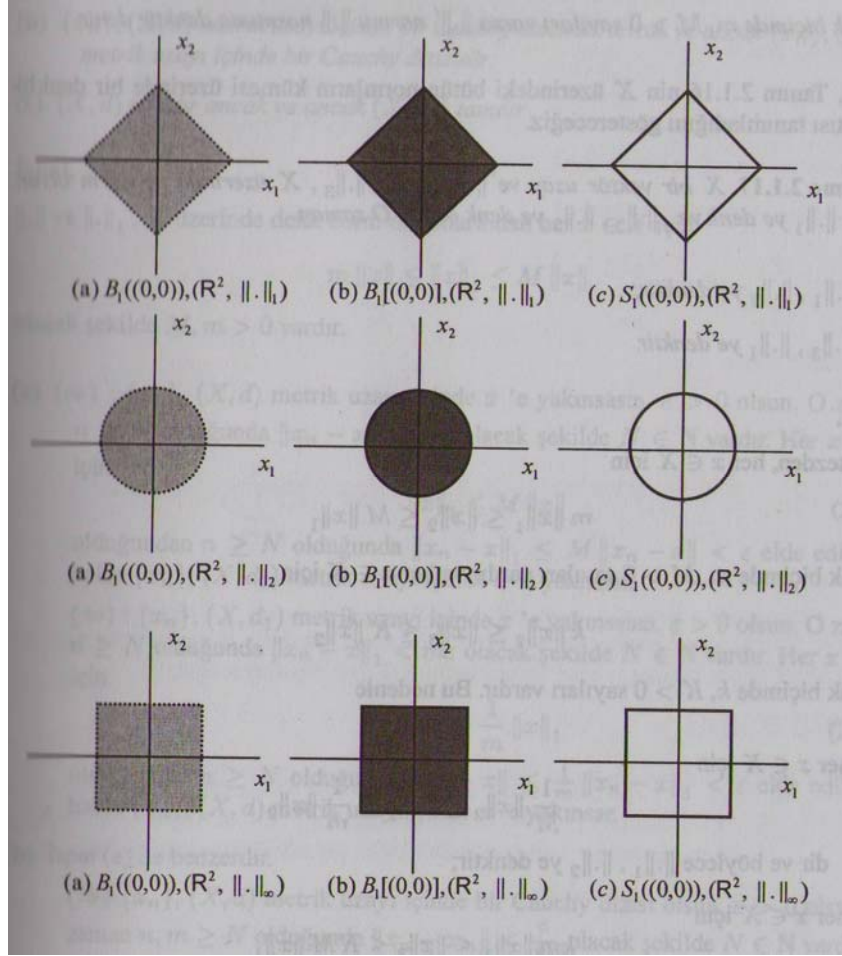
$$B_r[x] = \{y \in X : \|x - y\| \leq r\}$$

kümesine x merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar (kapalı top) ve

$$S_r(x) = \{y \in X : \|x - y\| = r\}$$

kümesine x merkezli r yarıçaplı küre denir. Eğer $r = 1$ ve $x = 0$ ise, $B_1(0)$ kümesine açık birim yuvar, $B_1[0]$ kümesine kapalı birim yuvar ve $S_1(0)$ kümesine birim küre adı verilir.

Örnek 3.1.3. $\mathbb{R}^2$ uzayı üzerinde $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ normlarına göre açık, kapalı birim yuvarlar ve birim küreler Şekil 3.1.1' de gösterilmiştir.



Şekil 3.1.1. $\mathbb{R}^2$ içinde açık, kapalı birim yuvarlar ve birim küreler

$\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ normları altında yuvarların şekillerinin ne kadar farklı oldukları Şekil 3.1.1.' de görülmektedir. Bununla birlikte bir vektör uzay üzerinde farklı iki norma sahip olsak bile eğer bu normlar “çok farklı” değilseler uzayın metrik uzay özellikleri her iki norm için de aynı olabilir. “Çok farklı değil” ifadesinden kastedilen aşağıdaki tanımda kesin olarak belirtilmiştir.

Tanım 3.1.3. Bir X vektör uzayı üzerinde $\|\cdot\|$ ve $\|\cdot\|'$ normları tanımlı olsun. Eğer her $x \in X$ için,

$$m\|x\| \leq \|x\|' \leq M\|x\|$$

olacak biçimde $m, M > 0$ reel sayıları varsa, $\|\cdot\|'$ normu $\|\cdot\|$ normuna *denktir* denir.

Önerme 3.1.1. X bir vektör uzay ve $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_3$, X üzerinde birbirinden farklı üç norm olmak üzere $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_1$ 'e ve $\|\cdot\|_3$, $\|\cdot\|_2$ 'ye denk olsun. O halde,

- $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ 'ye denktir.
- $\|\cdot\|_3$, $\|\cdot\|_1$ 'e denktir.

Son önermeden, Tanım 3.1.3. ile verilen denklik kavramının X üzerindeki bütün normların kümesi üzerinde denklik bağıntısı tanımladığını söyleyebiliriz.

Örnek 3.1.4. Örnek 3.1.1 de verilen $\mathbb{F}^n$ uzayı üzerinde tanımlı $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ normlarını göz önüne aldığımızda her $x \in \mathbb{F}^n$ için

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty$$

olduğunu, yani bu üç normun denk olduğunu gösterelim.

$$\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k| \right)^2, \quad |x_j|^2 \leq \sum_{k=1}^n |x_k|^2, \quad (\forall j = 1, \dots, n)$$

eşitsizliklerinden

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1$$

bulunur. Ayrıca

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k| \leq \sum_{k=1}^n \max_{j=1, \dots, n} |x_j| = \max_{j=1, \dots, n} |x_j| \sum_{k=1}^n 1 = n \|x\|_\infty$$

eşitsizliğinden

$$\|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty$$

elde edilir.

Buraya kadar vektör normu tanımını ve özelliklerini verdik. Şimdi de vektör normlarının çeşitlerinden bahsedelim.

Tanım 3.1.4. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ kompleks vektörü için

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

şeklinde tanımlanan norma, x vektörünün *toplam normu* denir.

Tanım 3.1.5. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ kompleks vektörü için

$$\|x\|_2 = \left(|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

şeklinde tanımlanan norma, x vektörünün *Euclidean* veya *Frobenius* normu adı verilir.

Tanım 3.1.4. ve Tanım 3.1.5. ile verilen normların genel hali Tanım 3.1.6' da verilmiştir.

Tanım 3.1.6. $1 < p < \infty$ olmak üzere $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ kompleks vektörü için

$$\|x\|_p = \left(|x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_n|^p \right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

şeklinde tanımlanan norma *Hölder normu* (veya l_p normu) denir.

Tanım 3.1.7. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ kompleks vektörü için

$$\|x\|_\infty = \max \{ |x_i| : 1 \leq i \leq n \}$$

şeklinde tanımlanan norma, x vektörünün *maksimum normu* denir.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ herhangi bir kompleks vektör olmak üzere $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ normları arasında;

a) $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2$

b) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$

c) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty$

$$\mathbf{d)} \quad \frac{1}{n} \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$$

bağıntıları mevcuttur.

Örnek 3.1.5. $x = [-1, 0, 1]^T$ vektörünün yukarıda verilen bağıntıları gerçeklediğini gösterelim:

$$\|x\|_2 = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \cong 1,41$$

$$\|x\|_1 = |-1| + |0| + |1| = 2$$

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i| = 1$$

elde edilir. O halde verilen x vektörünün $\|\cdot\|_2, \|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_\infty$ normları arasında **(a), (b), (c)** ve **(d)** bağıntılarının sağlandığı görülür.

3.1.2. Matris Normları

Bu bölümde kompleks sayı girdili matrislerin normlarından bahsedilecektir.

Tanım 3.1.8. $M_{n \times n}(\mathbb{C})$, bileşenleri $\mathbb{C}$ cisminin elemanları olan $n \times n$ tipinde kare matrislerin kümesi olsun.

$$\|\cdot\|: M_{n \times n}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$A \rightarrow \|A\|$$

şeklinde ifade edilen ve $A, B \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ olmak üzere her $a \in \mathbb{C}$ için,

$$\mathbf{i)} \quad A \neq 0 \text{ ise, } \|A\| > 0, \quad A = 0 \Leftrightarrow \|A\| = 0,$$

$$\mathbf{ii)} \quad \|aA\| = |a| \|A\|,$$

$$\text{iii)} \quad \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|,$$

$$\text{iv)} \quad \|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

aksiyomlarını sağlayan $\|\cdot\|$ dönüşümüne *matris normu* denir.

Tanım 3.1.9. $M_{m \times n}(\mathbb{C})$, bileşenleri $\mathbb{C}$ cisminin elemanları olan $m \times n$ tipinde matrislerin kümesi olsun.

$$\|\cdot\|: M_{m \times n}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$A \rightarrow \|A\|$$

şeklinde ifade edilen ve $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ olmak üzere her $a \in \mathbb{C}$ için,

$$\text{i)} \quad A \neq 0 \text{ ise, } \|A\| > 0, \quad A = 0 \Leftrightarrow \|A\| = 0,$$

$$\text{ii)} \quad \|aA\| = |a| \|A\|,$$

$$\text{iii)} \quad \|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

aksiyomlarını sağlayan $\|\cdot\|$ dönüşümüne *genelleştirilmiş matris normu* denir.

O halde bir matris normu daima genelleştirilmiş matris normudur. Fakat tersi her zaman doğru değildir. Örneğin toplam normu $\sum_{i,j} |a_{ij}|$ genelleştirilmiş matris normudur ancak matris normu değildir.

Tanım 3.1.10. A , $m \times n$ tipinde bir matris olmak üzere,

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^m |a_{ij}| \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanan matris normuna *sütun normu* denir.

Tanım 3.1.11. A , $m \times n$ tipinde bir matris olmak üzere,

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (3.2)$$

şeklinde tanımlanan matris normuna *satır normu* denir.

Tanım 3.1.12. A , $m \times n$ tipinde bir matris olmak üzere,

$$\|A\|_E = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

şeklinde tanımlanan matris normuna *Euclidean normu* denir.

Bazen *Euclidean norm* yerine *Frobenius normu* ($\|A\|_F$), *Schur normu* veya *Hilbert-Schmidt normu* ifadeleri kullanılır.

Tanım 3.1.13. A , $m \times n$ tipinde herhangi bir matris olsun. A matrisinin A^T transpozunu alalım. A^T matrisinin elemanlarının her biri yerine elemanın kompleks konjugesini koymakla elde edilen yeni $(\overline{A^T})$ matrisine A matrisinin *hermitian (eşlenik) transpozu* denir ve A^H ile gösterilir.

Tanım 3.1.14. $A = (a_{ij})_{m \times n}$ olmak üzere $A^H A$ matrisinin özdeğerlerinin kareköküne A matrisinin *singüler değerleri* denir ve A matrisinin singüler değerlerinin kümesi

$$\sigma(A) = \{ \sqrt{\lambda_i} \mid \lambda_i, A^H A \text{ nın özdeğerleri} \}$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.15. $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ve A^H matrisi A matrisinin eşlenik transpozu olmak üzere $A^H A$ matrisinin en büyük özdeğerinin kareköküne A matrisinin *spectral normu* denir ve

$$\|A\|_2 = \lambda \left(\lambda, A^H A \text{ nın en büyük özdeğerinin karekökü} \right)$$

veya

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i(A^H A)} \quad (3.3)$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.16. $A = (a_{ij})_{m \times n}$ olmak üzere

$$\|A\|_p = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^p \right)^{1/p}, \quad 1 < p < \infty$$

şeklinde tanımlanan norma A matrisinin l_p normu denir.

Örnek 3.1.6. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ matrisinin $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_E$ ve $\|\cdot\|_2$ normlarını bulalım.

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^m |a_{ij}| = \max \{ (|1| + |0| + |-2|), (|0| + |1| + |1|), (|-3| + |0| + |2|) \} = 5$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \max \{ (|1| + |0| + |-3|), (|0| + |1| + |0|), (|-2| + |1| + |2|) \} = 5$$

$$\|A\|_E = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} = \left(|1|^2 + |0|^2 + |-3|^2 + |0|^2 + |1|^2 + |0|^2 + |-2|^2 + |1|^2 + |2|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{20} \cong 4,472136$$

$$\|A\|_2 = \{ \lambda \mid \lambda, A^H A \text{ 'nin en büyük özdeğerinin karekökü} \} = \sqrt{9 + \sqrt{73}} \cong \sqrt{9 + 8,5440037} = 4,1885563$$

Tanım 3.1.17. A , $n \times n$ tipinde bir kare matris olmak üzere, A matrisinin mutlak değerce en büyük özdeğerine A 'nın *spektral yarıçapı* denir ve $\rho(A)$ ile gösterilir.

O halde $1 \leq i \leq n$ olmak üzere, A n -kare matrisinin herhangi bir λ_i özdeğeri için

$$|\lambda_i| \leq \rho(A)$$

ve en az bir i değeri için

$$|\lambda_i| = \rho(A)$$

diyebiliriz.

3.1.3. Matris Normları Arasındaki Bağlılıklar:

$A = (a_{ij})_{n \times m}$ matrisi için $\|\cdot\|_\Delta$ normunu $\|A\|_\Delta = \max |a_{ij}|$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_E, \|\cdot\|_2$ ve $\|\cdot\|_\Delta$ normları arasında;

$$1) \quad \|A\|_2 \leq \|A\|_E \leq \sqrt{m} \|A\|_2$$

$$2) \quad \|A\|_\Delta \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{mn} \|A\|_\Delta$$

$$3) \quad \|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1 \cdot \|A\|_\infty}$$

$$4) \quad \frac{1}{\sqrt{m}} \|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_\infty$$

$$5) \quad \frac{1}{\sqrt{m}} \leq \|A\|_\infty \leq \|A\|_E \leq \sqrt{n} \|A\|_\infty \quad (3.4)$$

$$6) \quad \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{m} \|A\|_1 \quad (3.5)$$

bağıntıları vardır.

Örnek 3.1.7. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$ matrisinin yukarıdaki bağıntıları sağladığını gösterelim.

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^m |a_{ij}| = \max \{(|1| + |4| + |-3|), (|0| + |1| + |-2|), (|2| + |0| + |-1|)\} = 8$$

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| = \max \{(|1| + |0| + |2|), (|4| + |1| + |0|), (|-3| + |-2| + |-1|)\} = 6$$

$$\|A\|_E = \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} = \left(|1|^2 + |0|^2 + |2|^2 + |4|^2 + |1|^2 + |0|^2 + |-3|^2 + |-2|^2 + |-1|^2 \right)^{1/2} = 6$$

$$\|A\|_2 = \frac{\sqrt{57}}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2} \cong 3,7749172 + 1,8027756 = 5,5776928$$

ve

$$\begin{aligned}\|A\|_{\Delta} &= \max |a_{ij}| \\ &= 4\end{aligned}$$

elde edilir ki, A matrisinin $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_{\infty}, \|\cdot\|_E, \|\cdot\|_2$ ve $\|\cdot\|_{\Delta}$ normları için (1), (2), (3), (4), (5) ve (6) bağıntılarını sağladığı görülür.

Tanım 3.1.18. $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$, $m \times n$ tipinde matrisler olsun. $A \circ B = [a_{ij}b_{ij}]_{m \times n}$ şeklinde tanımlanan $A \circ B$ matrisine, A ve B matrislerinin *Hadamard çarpımı* denir.

$\|\cdot\|$, herhangi bir genelleştirilmiş matris normu olmak üzere $m \times n$ tipindeki $A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$, matrisleri için

$$\|A \circ B\| \leq \|A\| \|B\|$$

eşitsizliği mevcuttur.

$$A = B \circ C, \quad r_1(B) = \max_i \sqrt{\sum_j |b_{ij}|^2} \quad \text{ve} \quad c_1(C) = \max_j \sqrt{\sum_i |c_{ij}|^2}$$

olsun. Bu durumda

$$\|A\|_2 \leq r_1(B) c_1(C) \quad (3.6)$$

eşitsizliği gerçekleşir.

3.1.4. Devirli Matrisler

Bu bölümde; devirli matrisin tanımı ve devirli matrislerin bazı özellikleri verilecektir.

Tanım 3.1.19. $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$C = (c_{ij})_{n \times n}, \quad c_{ij} = a_{j-i(\bmod n)}$$

şeklinde tanımlanan C matrisine *devirli matris* denir.

Bir devirli matrisin köşegeni üzerindeki elemanları ile köşegene paralel olan çizgiler üzerindeki elemanları aynıdır. 2×2 , 3×3 ve 4×4 mertebeli genel devirli matrisler aşağıdaki gibi gösterilirler:

$$C = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix}.$$

Genel anlamda $n \times n$ mertebeli bir devirli matris n elemanlı bir vektör ile temsil edilir ve bu vektör matrisin ilk satırını oluşturur. Böylece takip eden satırlar önceki satırın son elemanını başa alarak devam eder:

$$C = \text{circ}(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{bmatrix}.$$

Devirli matrislerin birçok özelliği vardır. $n \times n$ tipindeki devirli matrisler için şunlar söylenebilir:

- 1) A ve B aynı mertebeli devirli matrisler ve a ile b herhangi iki skaler olmak üzere $aA + bB$ matrisi bir devirli matristir.
- 2) Aynı mertebeli iki devirli matrisin çarpımı yine bir devirli matristir.
- 3) Aynı mertebeli iki devirli matrisin çarpımı değişme özelliğine sahiptir.
- 4) Eğer bir devirli matris tekil değilse, tersi de devirli matristir.
- 5) Devirli matrislerin transpozu da devirli matristir.

3.1.5. II-inci Mertebeden Yineleme İlişkili Lineer Diziler

Fibonacci sayı dizisinin ismini aldığı ünlü matematikçi Fibonacci, 1202 yılında "Abaküs Kitabı" veya "Hesaplama Kitabı" anlamına gelen "Liber Abaci" isimli eserinde toplamıştır. Yayınladığı bu eserle Hint-Arap sayı sistemini Avrupa'ya duyurmuştur. Fibonacci kitabında, *modus indium* (Hintlilerin yöntemi) adını verdiği ve günümüzde Hint-Arap sayıları diye bilinen modern ondalık sayı sistemini tanıtmıştır. Bu kitap, gündelik hayatta ticari defter tutma, ölçü birimlerini çevirme, faiz hesaplama, para bozma ve değiştirme gibi işlemlerde önemini göstermiştir. Kitap Avrupa'da tahsilli insanlar arasında hızlı bir şekilde yayılmış ve Avrupa'nın müspet bilimde ilerlemesine önemli etkileri olmuştur.

Kapalı bir ortamdaki tavşan ailesinin artış problemi, ünlü matematikçinin kitabında bahsettiği bir başka konudur. Birinci aydan başlamak üzere tavşan çifti sayısını hesapladığımızda aşağıdaki diziyi buluruz:

1 1 2 3 5 8 13 21 ...

Görüldüğü üzere, üçüncü terimden itibaren her sayı kendinden önceki iki sayının toplamına eşittir. F_n , n -inci aydaki çift sayısı ve F_{n+1} , $n+1$ -inci aydaki çift sayısı olmak üzere, $n+2$ -nci aydaki çift sayısını

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

şeklinde gösterebiliriz.

Daha önce 6. yüzyılda Hintli matematikçiler tarafından bulunmuş olan bu sayı dizisi Liber Abaci kitabında tavşanların üremesiyle ilgili problemin hesaplanması sonucu Fibonacci tarafından 1202 yılında ortaya konulmuştur. Bu dizinin ileri elemanlarında, bir sonraki elemanın bir öncekine oranı olan ve *altın oran* adı verilen, 1.618 değerine yakın bir sayıyı verir.

Tabiattaki canlılarda, insan vücudunda ve mimari yapılarda altın oranı görmek mümkündür. Örneğin ayçiçeğinin merkezinden dışarıya doğru sağdan sola ve soldan sağa

doğru taneler sayıldığında çıkan sayılar Fibonacci dizisinin ardışık terimleridir. Ayrıca antik ve bazı modern mimari eserler bu orana uygun tasarlanmışlardır. Örneğin Mimar Sinan'ın Selimiye ve Süleymaniye camilerinin minarelerinde Fibonacci dizisi mevcuttur. Altın orana uygun ölçülerdeki nesnelerin ve canlıların daha estetik ve güzel olduğu görüşü yaygındır.

Bugüne kadar değişik tipteki Fibonacci sayıları tanımlanmıştır. Bunlardan bir tanesi 2006 yılında Stakhov tarafından tanımlanan m -Fibonacci sayı dizisidir. 2007 yılında Falcon ve Plaza bu sayı dizisini k -Fibonacci olarak isimlendirmiş ve üzerinde birçok araştırma yapılmıştır.

Tanım 3.1.20. $a, b, s, t \in \mathbb{R}$ skalerleri için,

$$x_0 = a, x_1 = b \text{ ve } x_{n+2} = sx_{n+1} + tx_n, n \geq 0 \quad (3.7)$$

şeklinde tanımlanan $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ reel sayı dizisine, *ikinci mertebeden lineer başlangıç değerli yineleme ilişkili reel sayı dizisi* denir.

Tanım 3.1.21. (3.7)'de tanımlanan $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ reel sayı dizisinde, $a = 0, b = 1, s = 1$ ve $t = 1$ değerleri için elde edilen diziye, *klasik Fibonacci sayı dizisi* denir ve $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ ile gösterilir. $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin her bir elemanına *klasik Fibonacci sayısı* denir.

Tanım 3.1.22. (3.7)'de tanımlanan $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ reel sayı dizisinde, $a = 0, b = 1, s = k$ ($k \in \mathbb{Z}^+$) ve $t = 1$ değerleri için elde edilen diziye, *k-Fibonacci sayı dizisi* denir ve $\{F_{k,n}\}_{n=0}^{\infty}$ ile gösterilir. $\{F_{k,n}\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin her bir elemanına *k-Fibonacci sayısı* denir.

Tanım 3.1.23. (3.7)'de tanımlanan $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ reel sayı dizisinde, $a = 2, b = 1, s = 1$ ve $t = 1$ değerleri için elde edilen diziye, *klasik Lucas sayı dizisi* denir ve $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$ ile gösterilir. $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin her bir elemanına *klasik Lucas sayısı* denir.

Tanım 3.1.24. (3.7)'de tanımlanan $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ reel sayı dizisinde, $a = 0, b = 1, s = 2$ ve $t = 1$ değerleri için elde edilen diziye, *klasik Pell sayı dizisi* denir ve $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ ile gösterilir. $\{P_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin her bir elemanına *klasik Pell sayısı* denir.

Tanım 3.1.25. (3.7)'de tanımlanan $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ reel sayı dizisinde, $a = 2$, $b = 2$, $s = 2$ ve $t = 1$ değerleri için elde edilen diziye, *klasik Pell-Lucas sayı dizisi* denir ve $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ ile gösterilir. $\{Q_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin her bir elemanına *klasik Pell-Lucas sayısı* denir.

Tanım 3.1.26. (3.7)'de tanımlanan $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ reel sayı dizisinde, $a = 0$, $b = 1$, $s = 1$ ve $t = 2$ değerleri için elde edilen diziye, *klasik Jacobsthal sayı dizisi* denir ve $\{J_n\}_{n=0}^{\infty}$ ile gösterilir. $\{J_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin her bir elemanına *klasik Jacobsthal sayısı* denir.

Tanım 3.1.27. (3.7)'de tanımlanan $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ reel sayı dizisinde, $a = 2$, $b = 1$, $s = 1$ ve $t = 2$ değerleri için elde edilen diziye, *klasik Jacobsthal-Lucas sayı dizisi* denir ve $\{j_n\}_{n=0}^{\infty}$ ile gösterilir. $\{j_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin her bir elemanına *klasik Jacobsthal-Lucas sayısı* denir.

Tanım 3.1.28. (3.7)'de tanımlanan $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ reel sayı dizisinde, $a = 0$, $b = 1$, $s = 3$ ve $t = -2$ değerleri için elde edilen diziye, *klasik Mersenne sayı dizisi* denir ve $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ ile gösterilir. $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin her bir elemanına *klasik Mersenne sayısı* denir.

Tanım 3.1.29. (3.7)'de tanımlanan $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ reel sayı dizisinde, $a = 2$, $b = 3$, $s = 3$ ve $t = -2$ değerleri için elde edilen diziye, *klasik Fermat sayı dizisi* denir ve $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ ile gösterilir. $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin her bir elemanına *klasik Fermat sayısı* denir.

3.2. YÖNTEM

3.2.1. II-inci Mertebeden Doğrusal Yineleme İlişkili Reel Sayı Girdili Devirli Matrislerin Normları

Şimdi genelleştirilmiş k -Fibonacci sayılarından bahsedeceğiz ki bu sayıların yineleme formülleri dört parametrelidir.

Tanım 3.2.1. s ve t sıfırdan farklı, a ve b ise herhangi iki reel sayı olsun.

$F_{s,t,0} = a$, $F_{s,t,1} = b$ olmak üzere n -inci (s,t) -Fibonacci $\{F_{s,t,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi yinelemeli olarak

$$F_{s,t,n+1} = sF_{s,t,n} + tF_{s,t,n-1}, \quad n \geq 1 \quad (3.8)$$

şeklinde tanımlanır.

Aşağıdaki çizelge $F_{s,t,n}$ dizisinin bazı özel durumlarını özetlemektedir:

(a, b)	(s, t)	$F_{s,t,n}$
$(0, 1)$	$(s, 1)$	k - Fibonacci sayıları
$(0, 1)$	$(1, 1)$	klasik Fibonacci sayıları
$(0, 1)$	$(2, 1)$	klasik Pell sayıları
$(0, 1)$	$(1, 2)$	klasik Jacobsthal sayıları
$(0, 1)$	$(3, -2)$	klasik Mersenne sayıları
$(2, 1)$	$(1, 1)$	klasik Lucas sayıları
$(2, 2)$	$(2, 1)$	klasik Pell-Lucas sayıları
$(2, 1)$	$(1, 2)$	klasik Jacobsthal-Lucas sayıları
$(2, 3)$	$(3, -2)$	klasik Fermat sayıları

Çizelge 3.2.1. (a, b) ve (s, t) nin bazı değerleri için $F_{s,t,n}$ dizileri

n	0	1	2	3	4	5
<i>fibonacci</i>	0	1	1	2	3	5
$k - \text{fibonacci}$	0	1	k	$k^2 + 1$	$k(k^2 + 1) + k$	$k(k(k^2 + 1) + k) + k^2 + 1$
<i>Lucas</i>	2	1	3	4	7	11
<i>Pell</i>	0	1	2	5	12	29
<i>Pell – Lucas</i>	2	2	6	14	34	82
<i>Jacobsthal</i>	0	1	1	3	5	11
<i>Jacobsthal – Lucas</i>	2	1	5	7	17	31
<i>Mersenne</i>	0	1	3	7	15	31
<i>Fermat</i>	2	3	5	9	17	33

Çizelge 3.2.2. Çizelge 3.2.1’ de belirtilen sayı dizilerinin ilk 6 terimi

Yardımcı Önerme 3.2.1. $s + t - 1 \neq 0$ olmak üzere

$$\sum_{j=0}^n F_{s,t,j} = \frac{1}{s+t-1} (tF_{s,t,n} + F_{s,t,n+1} + sa - a - b) \quad (3.9)$$

olur.

İspat. $W = F_{s,t,0} + F_{s,t,1} + F_{s,t,2} + F_{s,t,3} + \dots + F_{s,t,n}$ olsun. O halde,

$$\begin{aligned} sW &= sF_{s,t,0} + sF_{s,t,1} + sF_{s,t,2} + sF_{s,t,3} + \dots + sF_{s,t,n-1} + sF_{s,t,n} \\ +tW &= +tF_{s,t,0} + tF_{s,t,1} + tF_{s,t,2} + \dots + tF_{s,t,n-1} + tF_{s,t,n} \end{aligned}$$

eşitliklerinden (genelleştirilmiş (s, t) -Fibonacci yinelemesinin üstteki ifadelerde kullanılmasıyla)

$$\begin{aligned} sW + tW &= sF_{s,t,0} + (F_{s,t,2} + F_{s,t,3} + \dots + F_{s,t,n}) + F_{s,t,n+1} + tF_{s,t,n} \\ &= sF_{s,t,0} + (W - F_{s,t,0} - F_{s,t,1}) + tF_{s,t,n} + F_{s,t,n+1} \\ &= W + tF_{s,t,n} + F_{s,t,n+1} + sa - a - b \text{ as } F_{s,t,0} = a \text{ and } F_{s,t,1} = b \end{aligned}$$

ve

$$W = \frac{1}{s+t-1} (tF_{s,t,n} + F_{s,t,n+1} + sa - a - b)$$

elde edilir ki istenilen gösterilmiş olur.

Binet formüllerini Fibonacci sayılar teorisinden iyi biliyoruz. Binet formülü, n -inci genelleştirilmiş (s, t) -Fibonacci sayısını (3.9) ile verilen yineleme bağıntısı ile ilgili $x^2 = sx + t$ karakteristik denkleminin kökleri olan α ve β nın fonksiyonu olarak göstermemizi sağlar.

Önerme 3.2.1. (Binet Formülü) Eğer α ve β farklı ise, n -inci genelleştirilmiş (s, t) -Fibonacci sayısı

$$F_{s,t,n} = \frac{b - \beta a}{\alpha - \beta} \alpha^n - \frac{b - \alpha a}{\alpha - \beta} \beta^n \quad (3.10)$$

şeklindedir.

İspat. $|\alpha| > |\beta|$ olduğunu varsayalım. O halde α^n ve β^n , (3.8) fark denkleminin bağımsız çözümleridir. Sıfır uzayının iki boyutlu olduğu düşünülürse $\{\alpha^n, \beta^n\}$ bir tabandır. Bu durumda $F_{s,t,n}$, bu iki geometrik dizinin doğrusal bileşiminin kümesi olarak karakterize edilmiş olur ki c_1 ve c_2 ,

$$\begin{aligned} a &= c_1 + c_2 \\ b &= c_1 \alpha + c_2 \beta \end{aligned}$$

başlangıç koşullarıyla belirlenen sabitler olmak üzere $F_{s,t,n}$,

$$F_{s,t,n} = c_1 \alpha^n + c_2 \beta^n,$$

şeklinde yazılabilir. α ve β farklı olduğundan bu sistemin çözümü

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{b - \beta a}{\alpha - \beta}, \\ c_2 &= -\frac{b - \alpha a}{\alpha - \beta}, \end{aligned}$$

şeklinde olacağından istenilen gösterilmiş olur.

Eğer $a = 0$, $b = 1$ ve $t = 1$ ise k -Fibonacci dizisi için

$$\alpha = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2} \quad \text{ve} \quad \beta = \frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}$$

olduğunu biliyoruz. O halde k -Fibonacci dizisinin genel terimi

$$F_{k,n} = \frac{\left(\frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2}\right)^n - \left(\frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}\right)^n}{\sqrt{k^2+4}}, \quad (3.11)$$

şeklindedir.

Genelleştirilmiş (s, t) -Fibonacci dizisi için (3.10) ile gösterdiğimiz Binet formülünün bir sonucu olarak, Catalan özdeşliğinin genelleştirmesi olan yeni özdeşlik aşağıda belirtilmiştir:

Yardımcı Önerme 3.2.2. $x = b - \beta a$ ve $y = b - \alpha a$ olmak üzere, eğer α ve β farklı ise n -inci genelleştirilmiş (s, t) -Fibonacci sayısı için

$$F_{s,t,n-r} F_{s,t,n+r} - F_{s,t,n}^2 = (-t)^{n+1-r} xy F_{k,r}^2 \quad (3.12)$$

olur.

İspat. $x = b - \beta a$ ve $y = b - \alpha a$ olsun. (3.10) ile verilen denklemi, (3.12) ile verilen denklemin sol tarafındaki $F_{s,t,n-r} F_{s,t,n+r} - F_{s,t,n}^2$ ifadesinde yerine yazarsak ve $\alpha\beta = -t$ eşitliğini hesaba katarsak

$$\begin{aligned} F_{s,t,n-r} F_{s,t,n+r} - F_{s,t,n}^2 &= \frac{x\alpha^{n-r} - y\beta^{n-r}}{\alpha - \beta} \frac{x\alpha^{n+r} - y\beta^{n+r}}{\alpha - \beta} - \left(\frac{x\alpha^n - y\beta^n}{\alpha - \beta} \right)^2 \\ &= \frac{x^2\alpha^{2n} - xy\alpha^{n-r}\beta^{n+r} - xy\alpha^{n+r}\beta^{n-r}}{(\alpha - \beta)^2} + \frac{y^2\beta^{2n} - x^2\alpha^{2n} + 2xy\alpha^n\beta^n - y^2\beta^{2n}}{(\alpha - \beta)^2} \\ &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} \left[-xy(\alpha\beta)^n \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^r - xy(\alpha\beta)^n \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^r + 2xy(\alpha\beta)^n \right] \\ &= \frac{xy(\alpha\beta)^{n+1}}{(\alpha - \beta)^2} \left[\frac{\alpha^{2r} + \beta^{2r}}{(\alpha\beta)^r} - 2 \right] = (-t)^{n+1-r} xy F_{k,r}^2 \quad (\text{denklem (3.3) ten}) \end{aligned}$$

olur ve ispat biter.

$r = 1$ için (3.12) ile verilen denklem, genelleştirilmiş

$$F_{s,t,n-1}F_{s,t,n+1} - F_{s,t,n}^2 = (-t)^n xy \quad (3.13)$$

(s, t) - Fibonacci dizisi için verilen Cassini özdeşliğinin genelleştirilmiş halidir.

Yardımcı Önerme 3.2.3. Her $n \geq 1$ için,

$$(-1)^n - 2 \sum_{i=1}^n (-1)^i = 1 \quad (3.14)$$

dir.

İspat. İspatı tümevarım metoduyla kolayca yapılabilir.

Yardımcı Önerme 3.2.4. $(s+t-1)(s-t+1) \neq 0$, $x = b - \beta a$ ve $y = b - \alpha a$ olsun. Eğer α ve β farklı ise

$$\sum_{j=0}^n F_{s,t,j}^2 = \frac{1}{(s+t-1)(s-t+1)} \left[F_{s,t,n}^2 - t^2 F_{s,t,n-1}^2 + t^2 (b-a)^2 - a^2 + t^{j+1} xy (1 + (-1)^{n+1}) \right] \quad (3.15)$$

olur.

İspat. $T = \sum_{j=0}^n F_{s,t,j}^2$ olsun. O halde,

$$\begin{aligned} T &= \sum_{j=0}^n F_{s,t,j}^2 = \sum_{j=0}^n \left(\frac{F_{s,t,j+1} - tF_{s,t,j-1}}{s} \right)^2 \quad (3.8'den) \\ &= \frac{1}{s^2} \left[\sum_{j=0}^n F_{s,t,j+1}^2 + t^2 \sum_{j=0}^n F_{s,t,j-1}^2 - 2t \sum_{j=0}^n F_{s,t,j+1} F_{s,t,j-1} \right] \\ &= \frac{1}{s^2} \left[T - F_{s,t,0}^2 + F_{s,t,n+1}^2 + t^2 F_{s,t,-1}^2 + t^2 T - t^2 F_{s,t,n}^2 - 2t \sum_{j=0}^n ((-t)^j xy + F_{s,t,j}^2) \right] \quad (3.13'ten) \\ &= \frac{1}{s^2} \left[T(t^2 - 2t + 1) - a^2 + F_{s,t,n+1}^2 + t^2 (b-a)^2 - t^2 F_{s,t,n}^2 - 2t^{j+1} xy \sum_{j=0}^n (-1)^j \right] \end{aligned}$$

ve (3.14) ile verilen denklemden

$$T = \frac{1}{s^2} \left[T(t^2 - 1)^2 - a^2 + F_{s,t,n+1}^2 + t^2(b-a)^2 - t^2 F_{s,t,n}^2 + t^{j+1}xy(1+(-1)^{n+1}) \right] \quad (3.16)$$

olur.

Denklem (3.16) den

$$T(s+t-1)(s-t+1) = F_{s,t,n+1}^2 - t^2 F_{s,t,n}^2 + t^2(b-a)^2 - a^2 + t^{j+1}xy(1+(-1)^{n+1})$$

yazarız ve ispat biter.

Teorem 3.2.1. $s+t-1 \neq 0$ ve $a_{ij} = F_{s,t,\text{mod}(j-i,n)}$ olmak üzere $A = [a_{ij}]$, $n \times n$ tipinde kare matris olsun. O halde

$$\|A\|_1 = \|A\|_\infty = \frac{n}{s+t-1} (tF_{s,t,n-1} + F_{s,t,n} + sa - a - b),$$

$$\frac{n^{1/2}}{s+t-1} (tF_{s,t,n-1} + F_{s,t,n} + sa - a - b) \leq \|A\|_2 \leq \frac{n^{3/2}}{s+t-1} (tF_{s,t,n-1} + F_{s,t,n} + sa - a - b),$$

$$\frac{n^{1/2}}{s+t-1} (tF_{s,t,n-1} + F_{s,t,n} + sa - a - b) \leq \|A\|_F \leq \frac{n^{3/2}}{s+t-1} (tF_{s,t,n-1} + F_{s,t,n} + sa - a - b)$$

olur.

İspat. A matrisi aşağıdaki formdadır:

$$A = \begin{bmatrix} F_{s,t,0} & F_{s,t,1} & \cdots & F_{s,t,n-1} \\ F_{s,t,n-1} & F_{s,t,0} & \cdots & F_{s,t,n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_{s,t,1} & F_{s,t,2} & \cdots & F_{s,t,0} \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

$s+t-1 \neq 0$ olduğundan, (3.1), (3.2) ve (3.9) denklemlerinden

$$\|A\|_1 = \|A\|_\infty = n \sum_{j=0}^{n-1} F_{s,t,j} = \frac{n}{s+t-1} (tF_{s,t,n-1} + F_{s,t,n} + sa - a - b), \quad (3.18)$$

(3.5) ve (3.18) denklemlerinden

$$\frac{n^{1/2}}{s+t-1} (tF_{s,t,n-1} + F_{s,t,n} + sa - a - b) \leq \|A\|_2 \leq \frac{n^{3/2}}{s+t-1} (tF_{s,t,n-1} + F_{s,t,n} + sa - a - b).$$

(3.4) ve (3.18) denklemlerinden

$$\frac{n^{1/2}}{s+t-1} \left(tF_{s,t,n-1} + F_{s,t,n} + sa - a - b \right) \leq \|A\|_F \leq \frac{n^{3/2}}{s+t-1} \left(tF_{s,t,n-1} + F_{s,t,n} + sa - a - b \right)$$

elde ederiz.

Sonuç 3.2.1. $s+t-1 \neq 0$ ve $a_{ij} = F_{s,t,\text{mod}(i+j,n)}$ olmak üzere $A = [a_{ij}]$, $n \times n$ tipinde kare matris olsun. O halde,

$$\|A\|_1 = \|A\|_\infty = \frac{n}{s+t-1} \left(tF_{s,t,n} + F_{s,t,n+1} + sa - a - b \right),$$

$$\frac{n^{1/2}}{s+t-1} \left(tF_{s,t,n} + F_{s,t,n+1} + sa - a - b \right) \leq \|A\|_2 \leq \frac{n^{3/2}}{s+t-1} \left(tF_{s,t,n} + F_{s,t,n+1} + sa - a - b \right),$$

$$\frac{n^{1/2}}{s+t-1} \left(tF_{s,t,n} + F_{s,t,n+1} + sa - a - b \right) \leq \|A\|_F \leq \frac{n^{3/2}}{s+t-1} \left(tF_{s,t,n} + F_{s,t,n+1} + sa - a - b \right)$$

dir.

Teorem 3.2.2. $(s+t-1)(s-t+1) \neq 0$ olsun. α ve β birbirinden farklı ve A (3.17)' de gösterilen matris olsun. O halde,

$$\|A\|_F = \sqrt{\frac{n}{(s+t-1)(s-t+1)} \left[F_{s,t,n}^2 - t^2 F_{s,t,n-1}^2 + t^2 (b-a)^2 - a^2 + t^{j+1} xy (1 + (-1)^{n+1}) \right]},$$

$$\sqrt{\frac{1}{(s+t-1)(s-t+1)} \left[F_{s,t,n}^2 - t^2 F_{s,t,n-1}^2 + t^2 (b-a)^2 - a^2 + t^{j+1} xy (1 + (-1)^{n+1}) \right]} \leq \|A\|_2,$$

$$\|A\|_2 \leq \frac{1}{(s+t-1)(s-t+1)} \left[F_{s,t,n}^2 - t^2 F_{s,t,n-1}^2 + t^2 (b-a)^2 - a^2 + t^{j+1} xy (1 + (-1)^{n+1}) \right],$$

$$\sqrt{\frac{1}{(s+t-1)(s-t+1)} \left[F_{s,t,n}^2 - t^2 F_{s,t,n-1}^2 + t^2 (b-a)^2 - a^2 + t^{j+1} xy (1 + (-1)^{n+1}) \right]} \leq \|A\|_{\infty} \leq n \sqrt{\frac{1}{(s+t-1)(s-t+1)} \left[F_{s,t,n}^2 - t^2 F_{s,t,n-1}^2 + t^2 (b-a)^2 - a^2 + t^{j+1} xy (1 + (-1)^{n+1}) \right]},$$

olur.

İspat. Frobenius normunun ve A matrisinin tanımından

$$\|A\|_F^2 = n \sum_{j=0}^{n-1} F_{s,t,j}^2$$

yazabiliriz. $x = b - \beta a$ ve $y = b - \alpha a$ olmak üzere denklem (3.15) den

$$\|A\|_F = \sqrt{\frac{n}{(s+t-1)(s-t+1)} \left[F_{s,t,n}^2 - t^2 F_{s,t,n-1}^2 + t^2 (b-a)^2 - a^2 + t^{j+1} xy (1 + (-1)^{n+1}) \right]}, \quad (3.19)$$

ifadesini elde ederiz. Denklem (3.19)' deki ifadeyi $\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_F \leq \|A\|_2$ eşitsizliğinde yerine yazarsak

$$\sqrt{\frac{1}{(s+t-1)(s-t+1)} \left[F_{s,t,n}^2 - t^2 F_{s,t,n-1}^2 + t^2 (b-a)^2 - a^2 + t^{j+1} xy (1 + (-1)^{n+1}) \right]} \leq \|A\|_2$$

olur. (3.4) ve (3.19) denklemlerinden sırasıyla

$$\|A\|_{\infty} \leq n \sqrt{\frac{1}{(s+t-1)(s-t+1)} \left[F_{s,t,n}^2 - t^2 F_{s,t,n-1}^2 + t^2 (b-a)^2 - a^2 + t^{j+1} xy (1 + (-1)^{n+1}) \right]},$$

ve

$$\sqrt{\frac{1}{(s+t-1)(s-t+1)} \left[F_{s,t,n}^2 - t^2 F_{s,t,n-1}^2 + t^2 (b-a)^2 - a^2 + t^{j+1} xy (1 + (-1)^{n+1}) \right]} \leq \|A\|_{\infty},$$

elde ederiz. Diğer taraftan B ve C matrisleri aşağıdaki gibi olsun:

$$B = (B_{ij}) = \begin{cases} F_{s,t,\text{mod}(j-i,n)}, & i \geq j \\ 1, & i < j \end{cases},$$

$$C = (C_{ij}) = \begin{cases} F_{s,t,\text{mod}(j-i,n)}, & i < j \\ 1, & i \geq j \end{cases}.$$

$A = B \circ C$ olduğu açıkça görülür. O halde,

$$r_1(B) = \max_i \sqrt{\sum_j |b_{ij}|^2} = \sum_{j=0}^{n-1} F_{s,t,j}^2 = \sqrt{\frac{1}{(s+t-1)(s-t+1)} \left[F_{s,t,n}^2 - t^2 F_{s,t,n-1}^2 + t^2 (b-a)^2 - a^2 + t^{j+1} xy (1 + (-1)^{n+1}) \right]} \quad (3.20)$$

ve

$$c_1(C) = \max_j \sqrt{\sum_i |c_{ij}|^2} = \sum_{j=0}^{n-1} F_{s,t,j}^2 = \sqrt{\frac{1}{(s+t-1)(s-t+1)} \left[F_{s,t,n}^2 - t^2 F_{s,t,n-1}^2 + t^2 (b-a)^2 - a^2 + t^{j+1} xy (1 + (-1)^{n+1}) \right]} \quad (3.21)$$

olur. Böylece (3.6), (3.20) ve (3.21) denklemlerinden

$$\|A\|_2 \leq \frac{1}{(s+t-1)(s-t+1)} \left[F_{s,t,n}^2 - t^2 F_{s,t,n-1}^2 + t^2 (b-a)^2 - a^2 + t^{j+1} xy (1 + (-1)^{n+1}) \right]$$

elde edilir ve ispat biter.

Sonuç 3.2.2. $(s+t-1)(s-t+1) \neq 0$ olsun. α ve β birbirinden farklı ve $a_{ij} = F_{s,t,\text{mod}(i+j,n)}$

olmak üzere $A = [a_{ij}]$ matrisi $n \times n$ tipinde kare matris olsun. O halde,

$$\|A\|_F = \sqrt{\frac{n}{(s+t-1)(s-t+1)} \left[F_{s,t,n}^2 - t^2 F_{s,t,n-1}^2 + t^2 (b-a)^2 - a^2 + t^{j+1} xy (1 + (-1)^{n+1}) \right]},$$

$$\sqrt{\frac{1}{(s+t-1)(s-t+1)} \left[F_{s,t,n}^2 - t^2 F_{s,t,n-1}^2 + t^2 (b-a)^2 - a^2 + t^{j+1} xy (1 + (-1)^{n+1}) \right]} \leq \|A\|_2 \leq \frac{1}{(s+t-1)(s-t+1)} \left[F_{s,t,n}^2 - t^2 F_{s,t,n-1}^2 + t^2 (b-a)^2 - a^2 + t^{j+1} xy (1 + (-1)^{n+1}) \right],$$

$$\|A\|_\infty \leq n \sqrt{\frac{1}{(s+t-1)(s-t+1)} \left[F_{s,t,n}^2 - t^2 F_{s,t,n-1}^2 + t^2 (b-a)^2 - a^2 + t^{j+1} xy (1 + (-1)^{n+1}) \right]}$$

ve

$$\sqrt{\frac{1}{(s+t-1)(s-t+1)} \left[F_{s,t,n}^2 - t^2 F_{s,t,n-1}^2 + t^2 (b-a)^2 - a^2 + t^{j+1} xy (1 + (-1)^{n+1}) \right]} \leq \|A\|_\infty$$

olur.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

Çalışmada,

$$F_{s,t,0} = a, F_{s,t,1} = b \text{ ve } F_{s,t,n+1} = sF_{s,t,n} + tF_{s,t,n-1}, \quad n \geq 1,$$

şeklinde tanımlanan ikinci mertebeden doğrusal yineleme ilişkili $\{F_{s,t,n}\}_{n=0}^{\infty}$ sayı dizisinin bazı özellikleri elde edildi.

Daha sonra elemanları, bu formdaki sayı dizilerinin terimleri olan,

$$A = \begin{bmatrix} F_{s,t,0} & F_{s,t,1} & \cdots & F_{s,t,n-1} \\ F_{s,t,n-1} & F_{s,t,0} & \cdots & F_{s,t,n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_{s,t,1} & F_{s,t,2} & \cdots & F_{s,t,0} \end{bmatrix}$$

ve

$$B = \begin{bmatrix} F_{s,t,2} & F_{s,t,3} & \cdots & F_{s,t,1} \\ F_{s,t,3} & F_{s,t,4} & \cdots & F_{s,t,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_{s,t,1} & F_{s,t,2} & \cdots & F_{s,t,0} \end{bmatrix}$$

matrisleri tanımlandı.

$(s+t-1) \neq 0$ olmak üzere, A ve B matrisinin satır ve sütun normları için,

$$\|A\|_1 = \|A\|_{\infty} = \|B\|_1 = \|B\|_{\infty} = \frac{n}{s+t-1} (tF_{s,t,n-1} + F_{s,t,n} + sa - a - b),$$

şeklinde eşitlikler, spectral ve Euclidean normları için sırasıyla

$$\frac{n^{1/2}}{s+t-1} (tF_{s,t,n-1} + F_{s,t,n} + sa - a - b) \leq \|A\|_2 = \|B\|_2,$$

$$\|A\|_2 = \|B\|_2 \leq \frac{n^{3/2}}{s+t-1} (tF_{s,t,n-1} + F_{s,t,n} + sa - a - b),$$

$$\frac{n^{1/2}}{s+t-1} \left(tF_{s,t,n-1} + F_{s,t,n} + sa - a - b \right) \leq \|A\|_F = \|B\|_F,$$

$$\|A\|_F = \|B\|_F \leq \frac{n^{3/2}}{s+t-1} \left(tF_{s,t,n-1} + F_{s,t,n} + sa - a - b \right)$$

şeklinde alt ve üst sınırlar elde edildi.

$(s+t-1)(s-t+1) \neq 0$ ve α, β birbirinden farklı olmak üzere A ve B matrislerinin normları için

$$\|A\|_F = \|B\|_F = \sqrt{\frac{n}{(s+t-1)(s-t+1)} \left[F_{s,t,n}^2 - t^2 F_{s,t,n-1}^2 + t^2 (b-a)^2 - a^2 + t^{j+1} xy (1 + (-1)^{n+1}) \right]},$$

$$\sqrt{\frac{1}{(s+t-1)(s-t+1)} \left[F_{s,t,n}^2 - t^2 F_{s,t,n-1}^2 + t^2 (b-a)^2 - a^2 + t^{j+1} xy (1 + (-1)^{n+1}) \right]} \leq \|A\|_2 = \|B\|_2,$$

$$\|A\|_2 = \|B\|_2 \leq \frac{1}{(s+t-1)(s-t+1)} \left[F_{s,t,n}^2 - t^2 F_{s,t,n-1}^2 + t^2 (b-a)^2 - a^2 + t^{j+1} xy (1 + (-1)^{n+1}) \right],$$

$$\|A\|_\infty = \|B\|_\infty \leq n \sqrt{\frac{1}{(s+t-1)(s-t+1)} \left[F_{s,t,n}^2 - t^2 F_{s,t,n-1}^2 + t^2 (b-a)^2 - a^2 + t^{j+1} xy (1 + (-1)^{n+1}) \right]},$$

$$\sqrt{\frac{1}{(s+t-1)(s-t+1)} \left[F_{s,t,n}^2 - t^2 F_{s,t,n-1}^2 + t^2 (b-a)^2 - a^2 + t^{j+1} xy (1 + (-1)^{n+1}) \right]} \leq \|A\|_\infty = \|B\|_\infty,$$

şeklinde bulgulara ulaşıldı.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tez; elemanları II. mertebeden doğrusal yineleme ilişkili sayı dizilerinin terimleri olan devirli matrislerin tanımlandığı, tanımlanan bu matrislerin bazı normlarının tam olarak hesaplandığı ve bazı normları için de alt ve üst sınırların elde edildiği özgün bir çalışma olmuştur.

Devirli matrisler; özel tanımlı matrisler ailesinde yer alıp uygulamalı matematikte önemli bir yeri olan Toeplitz ve Hankel matrislerinin özel durumları ile elde edilebilen matrislerdir. Elemanları II. mertebeden doğrusal yineleme ilişkili sayı dizilerinin terimleri olan Toeplitz ve Hankel matrisleri tanımlanabilir ve tanımlanan bu matrislerin normları hesaplanabilir.

KAYNAKLAR

- Alptekin, E.G., 2005. Pell Sayıları ile Tanımlı Circulant ve Semicirculant Matrisler. **S.Ü. Eğitim Fakültesi Dergisi**, 20: 39-49.
- Becker, P. G., 1994. K-Regular Power Series and Mahler-Type Functional Equations. **J. Number Theory**, 49 (3): 269-286.
- Box, G. E. ve Jenkins, G. M., 1970. **Times Series Analysis, Forecasting and Control**. Holden-Day, San Francisco.
- Borevich, A. I. ve Shafarevich, I. R., 1966. **Number Theory**, Academic Press, New York.
- Bowen, R. ve Landford, O. E., 1970. Zeta Functions of Restrictions of The Shift Transformation. Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, Berkeley, Calif., 1968), **Amer. Math. Soc**, Providence, R.I., 43-49.
- Cerlienco, L., Mignotte, M., ve Piras, F., 1987. Suites Recurrentes Lineaires: Proprietes Algebriques et Arithmetiques. **Enseign Math**, 33(2): 67-108.
- Davis, P. J., 1979. **Circulant Matrices**. John Wiley and Sons, New York.
- Denef, J., 1984. The Rationality of The Poincare Series Associated to The p-adic Points on a Variety. **Invent. Math**, 77 (1): 1-23.
- Du Sautoy, N. P. F., 1993. Finitely Generated Groups, p-adic Analytic Groups and Poincare Series. **Ann. of Math**, 137(2): 639-670.
- Du Sautoy, N. P. F., 1994. Counting Congruence Subgroups in Arithmetic Subgroups, **Bull. London Math. Soc**, 26(3): 255-262.
- Er, M. C., 1984. Sums of Fibonacci Numbers by Matrix Method. **Fibonacci Quarterly**, 22 (3): 204-207.
- Falcon, S. ve Plaza, A., 2007. On the Fibonacci k-Numbers. **Chaos, Solitons and Fractals**, 32: 1615-1624.
- Geller, D., Kra, I., Popescu, S. ve Simonca, S., On Circulant Matrices, <http://www.math.sunysb.edu/~sorin/eprints/circulant-screen.pdf>, **lecture notes**.
- Hinkkanen, A., 1994. Zeta Functions of Rational Functions are Rational. **Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math**, 19(1): 3-10.

- İpek, A., 2010. On The Spectral Norms of Circulant Matrices with Classical Fibonacci and Lucas Numbers Entries. **Applied Mathematics and Computation**, doi: 10.1016/j.amc.2010.12.094.
- Karaduman, E., 2004. An Application Of Fibonacci Numbers in Matrices. **Applied Mathematics and Computation**, 147: 903-908.
- Kalman, D., 1982. Generalized Fibonacci Numbers by Matrix Method. **Fibonacci Quarterly**, 20 (1): 73-76.
- Karner, H., Schneid, J. ve Ueberhuber, C. W., 2003. Spectral Decomposition of Real Circulant Matrices. **Linear Algebra and Its Applications**, 367: 301-311.
- Kılıç, E. ve Taşçı, D., 2006. The Generalized Binet Formula, Representation and Sum of The Generalized Order-k Pell Numbers. **Taiwanese J. Math**, 10 (6): 1661-1670.
- King, C. H., 1960. **Some Further Properties of the Fibonacci Numbers**. San Jose. CA: San Jose State.
- Kocer, E.G., 2007. Circulant, Negacyclic and Semicirculant Matrices With The Modified Pell, Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas Numbers. **Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics**, 36(2): 133-142.
- Köken, F. ve Bozkurt, D., 2008. On The Jacobsthal Numbers by Matrix Methods. **Int. J. Contemp. Math. Sciences**, 3(13): 605-614.
- Küçüközbek, S., 2007. **Circulant Matrisler ve Polinomların Çözümleri**. Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Lidl, R. ve Niederreiter, H., 1983. **Finite Fields**. Addison-Wesley Publishing Company Advanced Book Program, Reading, MA.
- Lind, D.A., 1970. A Fibonacci Circulant. **The Fibonacci Quarterly December**, 449-455.
- Lipshitz, L. ve Poorten, A. J., 1990. **Rational Functions, Diagonals, Automata and Arithmetic, Number Theory (Banff, AB, 1988)**. de Gruyter, pp: 339-358, Berlin.
- Mclroy, M. D., 1992. Number Theory in Computer Graphics, the Unreasonable Effectiveness of Number Theory (Orono, ME, 1991), **Amer. Math. Soc. Providence, RI**: 105-121.
- Matsumura, H., 1989. **Commutative Ring Theory, second ed.** Cambridge University Press, Cambridge.

- Manning, A., 1971. Axiom A Diffeomorphisms Have Rational Zeta Functions. **Bull. London Math. Soc.**, 3: 215-220.
- Mignotte, M., 1989. **Proprietes Arithmetiques des Suites Recurrentes Lineaires, Theorie des Nombres, Annee 1988/89, Fasc. 1, Univ. Franche-Comte.** pp: 30, Besancon.
- Mikhalev, A. V. ve Nechaev, A. A., 1996. Linear Recurring Sequences Over Modules. **Acta Appl. Math.**, 42(2): 161-202.
- Myerson, G. ve Poorten, A. J., 1995. Some Problems Concerning Recurrence Sequences. **Amer. Math. Monthly**, 102(8): 698-705.
- Nallı, A., 2007. On The Hadamard Product of Golden Matrices. **Int. J. Contemp. Math. Sci.**, 2 (11): 537-544.
- Niederreiter, H., 1991. Recent Trends in Random Number and Random Vector Generation, **Ann. Oper. Res.**, 31(1-4): 323-345.
- Niederreiter, H., 1992. **Random Number Generation and quasi-Monte Carlo Methods.** Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA.
- Niederreiter, H., 1995. **New Developments in Uniform Pseudorandom Number and Vector Generation, Monte Carlo and quasi-Monte Carlo Methods in Scientific Computing (Las Vegas, NV, 1994).** Springer, pp: 87-120, New York.
- Poorten, A. J., 1989. **Some Facts that Should be Better Known, Especially about Rational Functions, Number Theory and Applications (Banff, AB, 1988).** Kluwer Acad. Publ., pp: 497-528, Dordrecht.
- Rudin, W., 1991. **Functional Analysis, 2nd ed.** McGraw-Hill, New York.
- Silvester, J. R., 1979. Fibonacci Properties by Matrix Method. **Mathematical Gazette**, 63: 188-191.
- Solak, S., 2005. On the Norms of Circulant Matrices With Fibonacci and Lucas Numbers. **Applied Mathematics and Computation**, Vol 160, pp: 125-132.
- Shorey, T. N. ve Tijdeman, R., 1986. **Exponential Diophantine Equations.** Cambridge University Press, Cambridge.

- Shorey, T. N., 2000. **Exponential Diophantine Equations Involving Products of Consecutive Integers and Related Equations, Number theory.** Birkhauser, pp: 463-495, Basel.
- Stakhov, A. ve Rozin, B., 2004. On a New Class of Hyperbolic Function. **Chaos, Solitons and Fractals**, 23: 379-389.
- Stakhov, A.P., 2006. **Gazale Formulas, A New Class of The Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions, and The Improved Method of The “Golden” Cryptography,** Academy of Trinitarism , Moscow.
- Taşçı, D. ve Kılıç, E., 2004. On the k-Generalized Lucas Numbers. **Applied Mathematics and Computation**, 155: 637-641.
- Tezuka, S., 1996. **Uniform Random Numbers.** Kluwer, Dordrecht.
- Tijdeman, R., 1998. **Exponential Diophantine Equations 1986-1996.** Number theory (Eger, 1996), de Gruyter, pp: 523-539, Berlin.
- Tijdeman, R., 2002. **Some Applications of Diophantine Approximation, Number Theory for The Millennium, Vol.III, A. K. Peters.** pp: 261-284, Natick. MA.
- Yalçiner, A., 2006. **Hankel ve Circulant Matrislerin Terslerinin Normları Üzerine.** Doktora Tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana veren ve kıymetli önerileri ile beni yönlendiren, danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Oğuz KILIÇOĞLU' na; çalışmalarım esnasında bana vakit ayıran, özenle çalışmalarımı takip eden ve her konuda yardımlarını esirgemeyen sayın bölüm başkanım Prof. Dr. Bünyamin YILDIZ' a; ayrıca çalışmalarımın her safhasında değerli görüş, katkı ve bilgilerini esirgemeyerek büyük fedakârlıklar gösteren hocalarım Sayın Yrd. Doç. Dr. Ahmet İPEK ve Yrd. Doç. Dr. Hakan YETİŞKİN' e teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmalarım sırasında yanımda bulunan bütün arkadaşlarıma ve manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan çok değerli aileme teşekkürü bir borç bilirim.

Musa SÖZER

Ocak 2011

ÖZGEÇMİŞ

1985 yılında Muğla’ da doğdum. İlk ve orta öğrenimimi Denizli’ de tamamladım. 2003-2007 yılları arasında Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde lisansımı tamamladım. 2008 yılından bu yana Mustafa Kemal Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde Araştırma Görevlisi olarak görev yapmaktayım.