



T.C.
HATAY MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**YEREL SOLİD TOPOLOJİK LATİS SIRALI GRUP ÜZERİNDE
SINIRSIZ SIRA YAKINSAMA**

Durmuş YİĞİTBAŞ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**HATAY
OCAK - 2024**



T.C.
HATAY MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YEREL SOLİD TOPOLOJİK LATİS SIRALI GRUP ÜZERİNDE
SINIRSIZ SIRA YAKINSAMA

Durmuş YİĞİTBAŞ
ORCID:0000-0000-0000-0000

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Mehmet VURAL
ORCID: 0000- 0002-0977-7479

HATAY
OCAK - 2024

T.C.
HATAY MUSTAFA KEMAL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YEREL SOLİD TOPOLOJİK LATİS SIRALI GRUP ÜZERİNDE SINIRSIZ
SIRA YAKINSAMA

DURMUŞ YİĞİTBAŞ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ

Dr. Öğr. Üyesi Mehmet VURAL danışmanlığında hazırlanan bu tez 25/01/2024 tarihinde aşağıdaki jüri üyeleri tarafından OYBİRLİĞİ ile kabul edilmiştir.

Dr. Öğr. Üyesi Mehmet VURAL
Başkan

Prof. Dr. Bünyamin YILDIZ
Üye

Doç. Dr. Ali KURT
Üye

Kod No

Doç. Dr. Cengiz KARACA
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir

25/01/2024

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını ve tez üzerinde Yükseköğretim Kurulu tarafından hiçbir değişiklik yapılamayacağı için tezin bilgisayar ekranında görüntülendiğinde asıl nüsha ile aynı olması sorumluluğunun tarafıma ait olduğunu beyan ederim.

İmzası

DURMUŞ YİĞİTBAŞ

ÖZET

YEREL SOLİD TOPOLOJİK LATİS SIRALI GRUP ÜZERİNDE SINIRSIZ SIRA YAKINSAMA

Kısmi sıralı cebirsel sistemler sınıfının önemli bir alt sınıfı latis sıralı gruplardır. Grup ve latis işlemlerini sürekli kılan bir topoloji ile donatılmış latis sıralı gruplar yerel solid topolojik Riesz uzayların bir genellemesidir ve yerel solid topolojik latis sıralı grup olarak adlandırılır. Grup topoloji ile donatılmış latis sıralı grup yerel solid topolojidir ancak ve ancak bu topoloji değişmez-ötelemeli latis pseudometrikler ailesi tarafından üretilmiştir. Yerel solid topolojik latis sıralı grup üzerinde bahsi geçen pseudometrikleri kullanarak uzayın üzerinde yeni bir yakınsama tanımlanabilir. Bu yakınsamanın motivasyonu ise sınırsız sıra yakınsamalarıdır. Yerel solid topolojik Riesz uzaylarda tanımlanan bu yakınsama tipi yerel solid topolojik latis sıralı gruplar üzerinden incelenmiştir.

2024, 20 Sayfa

Anahtar Kelimeler: yerel solid topolojik latis sıralı grup, sınırsız sıra yakınsama, değişmez-ötelemeli latis pseudometrik

ABSTRACT

UNBOUNDED RANK APPROXIMATION OVER a LOCAL SOLIDE TOPOLOGICAL LATIX ORDERED GROUP

An important subclass of the class of partially ordered algebraic systems are lattice ordered groups. Lattice ordered groups equipped with a topology that makes group and lattice operations continuous are a generalization of locally solid topological Riesz spaces and are called locally solid topological lattice ordered groups. A lattice-ordered group equipped with a group topology is a local solid topology if and only if this topology is generated by a family of translation-invariant lattice pseudometrics. Using the aforementioned pseudometrics on the local solid topological lattice ordered group, a new convergence on the space can be defined. The motivation for this convergence is unbounded order convergence. This type of convergence defined on locally solid topological Riesz spaces is analyzed over locally solid topological lattice ordered groups.

2024, 20 Pages

Key Words: local solid topological lattice ordered group, unbounded order convergence, invariant-progressive lattice pseudometric

TEŞEKKÜR

Mesleki ve akademik hayatımda önemli kararlar almam gerektiğinde sürekli yanımda olan ve varlığı ile benim için önemli bir rol model oluşturan gerek doktora tez konumunun belirlenmesinde gerek araştırılması ve yazımı sırasında sahip olduğu bilgi birikimi ve tecrübesi ile çalışmalarına ışık tutan ve yardımını esirgemeyen danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Mehmet VURAL 'a sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Eğitim hayatım boyunca beni maddi ve manevi olarak destekleyen, güvenen ve daima yanımda olan canım aileme sonsuz minnet ve şükranlarımı sunarım.



İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	I
ABSTRACT.....	II
TEŞEKKÜR.....	III
İÇİNDEKİLER	IV
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	V
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....	9
2.1. Teorem (Hong, L,2014).....	9
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	13
3.1. Materyal.....	13
3.2. Yöntem	13
3.3. Ötelemeyle Değişmeyen Psödometrik Gözlemi.....	13
3.4. Psödometrikle Üretilen Topoloji Teoremi.....	14
3.5. Yerel Solid Olma Gözlemi	14
3.6. Yerel Solid Topoloji Teoremi	15
4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA	16
5. SONUÇ ve ÖNERİLER.....	18
KAYNAKLAR	19
ÖZGEÇMİŞ	20

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

$\mathcal{R}$	: Bağıntı
$\wedge$	: infimum
$\vee$	: supremum
$(x_\alpha)_{\alpha \in A}$	: Ağ (net)
$\mathcal{P}(X)$	: X ' in kuvvet kümesi
$\mathcal{D}(\mathcal{R})$	: Tanım kümesi
$(X, *_1, *_2, \dots, *_n)$	: Matematiksel sistem
$(X, +)$	: Yarıgrup
$B_d(x, r)$	: x merkezli r yarıçaplı d -metrik

1. GİRİŞ

X boştan farklı bir küme olsun. $X \times X$ kümesinden X kümesine tanımlı herhangi bir fonksiyona X üzerinde bir cebirsel işlem denir ve genellikle " $*$ " ile temsil edilir.

$0 < n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $*_1, *_2, \dots, *_n$, X kümesi üzerinde birer işlem olsun. Bu durumda

$$(X, *_1, *_2, \dots, *_n)$$

n 'lisine cebirsel yapı denir.

X boştan farklı bir küme ve $*, X$ üzerinde belirli bir işlem olsun. $(X, *)$ ikilisine grupoid denir ve en temel cebirsel yapıdır.

$(X, *)$ bir grupoid olmak üzere her $x, y, z \in X$ için $x * (y * z) = (x * y) * z$ eşitliği sağlanıyorsa $(X, *)$ grupoidi yarıgrup adını alır.

$(X, *)$ bir yarıgrup olmak üzere $Y \subset X$ olsun. Eğer

$$x * y = y * x = y \quad \forall x \in X \quad \forall y \in Y$$

önermesinin sağlandığı $Y \neq \emptyset$ var ise $(X, *)$ ikilisine monoid denir. $Y \subset X$ kümesinin varlığı kendiliğinden Y kümesini tek elemanlı kılacağından Y kümesi " e " ile gösterilir ve X monoidinin birimi adını alır.

$(X, *)$ bir monoid ve $x \in X$ keyfi bir eleman olmak üzere $x * y = y * x = e$ eşitliğini doğru kılan bir $y \in X$ var ise $(X, *)$ monoidine grup adı verilir. Böyle bir $y \in Y$ elemanının varlığı tekliğini gerektireceğinden y elemanına x elemanının ters elemanı denir ve x^{-1} ile temsil edilir.

$(X, *)$ bir grup olmak üzere " $x * y = y * x \quad \forall x, y \in X$ " önermesinin sağlanması durumunda $(X, *)$ ikilisine Abelyan yahut değişmeli grup denir.

$(X,*)$ bir grup ve $Y \subset X$ olmak üzere

- i. $Y * Y \subset Y$
- ii. $Y \cap (Y^{-1}) = e$
- iii. $x * Y * x^{-1} = Y \quad \forall x \in X$

koşulları sağlanıyorsa Y kümesine X grubunun konisi denir.

X boştan farklı bir küme ve $\mathcal{R} \subseteq X \times X$ olmak üzere $\mathcal{R}$ altkümesine bir ikili ilişki veya bağıntı denir. $\mathcal{R}$ bağıntısının herhangi bir elemanı (x, y) , $x\mathcal{R}y$ şeklinde de gösterilir ve x elemanı y elemanı ile $\mathcal{R}$ -bağıntılıdır denir.

X kümesi üzerindeki bir $\mathcal{R}$ bağıntısı $\forall x \in X$ için;

$$(x, x) \in \mathcal{R}$$

önermesi sağlanıyorsa $\mathcal{R}$ bağıntısına yansımalıdır denir.

X Kümesi üzerindeki bir $\mathcal{R}$ bağıntısı $\forall x, y \in X$ için;

$$(x, y) \in \mathcal{R} \text{ ve } (y, x) \in \mathcal{R} \Rightarrow x = y$$

gerektirmesi gerçekleşiyorsa $\mathcal{R}$ bağıntısına ters-simetriktir denir.

X Kümesi üzerindeki bir $\mathcal{R}$ bağıntısı $\forall x, y \text{ ve } z \in X$ için;

$$(x, y) \in \mathcal{R} \text{ ve } (y, z) \in \mathcal{R} \Rightarrow (x, z) \in \mathcal{R}$$

gerektirmesi gerçekleşiyorsa $\mathcal{R}$ bağıntısına geçişmelidir denir.

X üzerindeki bir $\mathcal{R}$ bağıntısı yansımalı, ters-simetrik ve geçişmeli ise $\mathcal{R}$ bağıntısı kısmi sıralama bağıntısı adını alır, $\mathcal{R}$ kısmi sıralama bağıntısı genellikle de " $\leq$ " temsil edilir. $(X, \leq)$ ikilisine de kısmi sıralı küme veya poset denir.

$Y \subset X$ boştan farklı bir altküme ve $x \in X$ keyfi bir eleman olsun. Eğer $\forall y \in Y$ için $y \leq x$ sağlanıyorsa Y kümesine üstten sınırlı ve x elemanına da Y için bir üstsınır denir.

Benzer şekilde $Y \subset X$ boştan farklı bir altküme ve $x \in X$ keyfi bir eleman olsun. Eğer $\forall y \in Y$ için $x \leq y$ sağlanıyorsa Y kümesine alttan sınırlı ve x elemanına da Y için bir altsınır denir.

$Y \subset X$ boştan farklı bir altküme ve $x \in X$ keyfi bir eleman olsun. Eğer;

$$\text{i. } x \leq y \quad \forall y \in Y$$

$$\text{ii. } y \leq x \quad \forall y \in Y$$

koşulları sağlanıyorsa x elemanına Y kümesinin en küçük üst sınırı yahut supremumu denir ve $x: \sup Y$ olarak gösterilir.

$Y \subset X$ boştan farklı bir altküme ve $x \in X$ keyfi bir eleman olsun. Eğer;

$$\text{i. } x \leq y \quad \forall y \in Y$$

$$\text{ii. } z \leq y \quad \forall y \in Y \Rightarrow z \leq x$$

koşulları sağlanıyorsa x elemanına Y kümesinin en büyük alt sınırı yahut infimumu denir ve $x := \inf Y$ olarak gösterilir.

$Y \subseteq X$ altkümesi aynı anda hem alttan hem de üstten sınırlı bir küme ise Y altkümesi sınırlı küme olarak adlandırılır.

Herhangi iki $x, y \in X$ için $\{z: x \leq z \leq y\}$ kümesi aralık olarak adlandırılır ve genellikle $[x, y]$ şeklinde gösterilir.

X kısmi sıralı küme olmak üzere herhangi iki $x, y \in X$ için $\{x, y\}$ kümesinin supremum ve infimumu varsa X kümesine latis denilir.

$x, y \in X$ elemanlarının supremum ve infimumu sırasıyla $x \vee y$ ve $x \wedge y$ şeklinde gösterilirler ayrıca $Y \subset X$ için $\sup Y = \bigvee Y$ ve $\inf Y = \bigwedge Y$ biçiminde gösterilir.

X boştan farklı bir küme, $*, X$ üzerinde bir ikili işlem ve $\leq, X$ üzerinde bir bağıntı olmak üzere

$$\text{i. } (X, *) \text{ değişmeli bir grup,}$$

$$\text{ii. } (X, \leq) \text{ kısmi sıralı bir küme,}$$

$$\text{iii. } x \leq y \Rightarrow x * z \leq y * z \quad \forall x, y, z \in X$$

koşulları sağlanıyorsa $(x, *, \leq)$ üçlüsüne kısmi sıralı grup denir.

$(X, *, \leq)$ kısmi sıralı grup ve $x \in X$ keyfi bir eleman olsun. $e \leq x$ olması durumunda x 'e pozitif eleman denir. X kısmi sıralı grubundaki bütün pozitif elemanların kümesine X' in pozitif konisi denir ve X_+ ile gösterilir. Kısmi sıralı bir kümenin pozitif konisi grubun konisidir, bunun yanısıra bir grubun her konisi $Y, x \leq y \Leftrightarrow y - x \in Y$ bağıntısı ile grubu kısmi sıralı grup yapar.

Kısmi sıralı bir X grubunda " $nx \leq y, \forall x, y \in X \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x = e$ " önermesi geçerli ise X kısmi sıralı grubuna Arşimedyan kısmi sıralı grup denir.

$(X, *, \leq)$ kısmi sıralı grubunda $(X, \leq)$ bir latis ise $(X, *, \leq)$ üçlüsüne latis sıralı grup denir. $x \in X$ olmak üzere $x_+ = x \vee e, x_- = x^{-1} \wedge e$ ve $|x| = x \vee x^{-1}$ $(X, *, \leq)$ latis sıralı grup ve $Y \subset X$ olsun. $|x| \leq |y|, y \in Y \Rightarrow x \in Y$ gerektirmesi doğru ise Y altkümeye solid küme denir. Ayrıca bir Y kümesi solid olmasa bile bu kümeyi solid olan $\{x \in X: |x| \leq y, y \in Y\}$ kümesine kapsatabiliriz ve Y kümesini kapsayan bu solid kümeye Y 'nin solid tamlanış1 denir ve $\text{Sol}(Y)$ olarak temsil edilir.

X latis sıralı grup ve Y, X' in latis sıralı altgrubu olsun. Keyfi bir $e < x \in X$ için $e < y \leq x$ olacak biçimde bir $y \in Y$ elemanı var ise Y' 'nin X' te sıra-yoğun olduğu söylenir.

X latis sıralı grup ve $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ X -değerli bir net olsun. $\alpha, \beta \in A$ keyfi indisler olmak üzere $\beta \leq \alpha$ iken $x_\alpha \leq x_\beta$ oluyorsa $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ netine azalan net denir. $x_\alpha \downarrow x$ sembolü ise x_α netinin azaldığını ve

$$x = \{x_\alpha: \alpha \in A\}$$

olduğunu belirtir.

$(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ X -değerli bir net ve $x \in X$ olsun.

- i. $y_\alpha \downarrow 0$
- ii. $|x_\alpha - x| \leq y_\alpha$

şartlarını sağlayan bir $(y_\alpha)_{\alpha \in A}$ neti var ise (x_α) neti x elemanına sıra yakınsıyor denir.

Bu yakınsama $x_\alpha \xrightarrow{0} x$ olarak sembolize edilir.

X boştan farklı bir küme ve τ, X' 'in kuvvet kümesi $\mathcal{P}(X)$ 'in bir kolleksiyonu olmak üzere

i. $\emptyset, X \in \tau$,

ii. $U, V \in \tau \Rightarrow U \cup V \in \tau$,

iii. I herhangi bir indeks küme olmak üzere $(U_i)_{i \in I} \in \tau$ ise $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$

koşulları sağlanıyorsa τ kolleksiyonuna topoloji, (X, τ) ikilisine de topolojik uzay denir.

Bir (X, τ) topolojik uzayında τ koleksiyonunun her bir elemanına açık küme ve tümleyeni açık olan kümelere ise kapalı küme denir. (X, τ) topolojik uzay, $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ X -değerli bir net ve $x \in X$ olsun. x 'i barındıran her U açık kümesi için $\{x_\alpha\}_{\alpha \geq \alpha_U} \subseteq U$ olacak biçimde bir α_U var ise x_α neti x 'e yakınsıyor denir ve $x_\alpha \xrightarrow{\tau} x$ ile sembolize edilir.

(X, τ_X) ve (Y, τ_Y) iki topolojik uzay ve f, X' ten Y' ye tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer τ_Y 'nin keyfî bir elemanı U için $f^{-1}(U) \in \tau_X$ ise f fonksiyonuna süreklidir denir, denk olarak ise $x \in X$ 'e yakınsayan X -değerli her netin görüntüsü olan net $f(x)$ elemanına yakınsıyor ise f fonksiyonu süreklidir denir. (X, τ) bir topolojik uzay ve $(X, *, \leq)$ latis sıralı grup olsun. Eğer

- i. $X \times X'$ ten X' 'e tanımlı $(x, y) \mapsto x * y$ fonksiyonu süreklidir,
- ii. X' ten X' 'e tanımlı $(x, y) \mapsto x^{-1}$ fonksiyonu süreklidir,
- iii. $X \times X$ 'ten X 'e tanımlı $(x, y) \mapsto x \vee y$ fonksiyonu süreklidir,
- iv. $X \times X'$ ten X' 'e tanımlı $(x, y) \mapsto x \wedge y$ fonksiyonu süreklidir.

koşulları sağlanıyorsa $(X, *, \leq, \tau)$ dörtlüsüne topolojik latis stralı grup denir. Yukarıdaki şartlardan (i) ve (ii)'yi kombine edersek topolojik latis sıralı grubun aşağıdaki denk tanımını elde ederiz, şöyle ki;

- i. $X \times X'$ ten X' 'e tanımlı $(x, y) \mapsto x * y^{-1}$ fonksiyonu süreklidir,
- ii. $X \times X'$ ten X' 'e tanımlı $(x, y) \mapsto x \vee y$ fonksiyonu süreklidir,
- iii. $X \times X'$ ten X' 'e tanımlı $(x, y) \mapsto x \wedge y$ fonksiyonu süreklidir.

$(X, *, \leq, \tau)$ topolojik latis sıralı grup olmak üzere e 'nin komşuluk tabanı solid kümelerden oluşuyorsa $(X, *, \leq, \tau)$ topolojik latis stralı grup yerel solid topolojik latis sıralı grup adını alır.

Negatif olmayan bütün reel sayıları $\mathbb{R}_+$ ile gösterelim. X herhangi bir küme olmak üzere $X \times X$ ten $\mathbb{R}_+$ 'ya tanımlı bir d fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için

- i. $d(x, y) = d(y, x)$,
- ii. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$.

şartlarını sağlıyorsa d fonksiyonu X üzerinde sözde-metrik denir. X bir küme ve d, X üzerinde bir sözde-metrik olsun. Her $x, y, z \in X$ için

$$d(x, y) = d(x + z, y + z)$$

eşitliği sağlanıyorsa d 'ye değişmez-ötelemeli sözde-metrik denir. X bir latis sıralı grup ve dX üzerinde sözde metrik olsun. Her $x, y \in X$ için " $x \leq y \Rightarrow d(0, x) \leq d(0, y)$ " gerektirmesi doğru ise d 'ye latis sözde metrik denir.

G bir topolojik latis sıralı grup olmak üzere . Aşağıdakiler sağlanır;

- i. G regülerdir.
- ii. G homojendir, yani G içinde verilen herhangi iki $x, y \in G$ noktası için $f(x) = y$ olacak şekilde G üzerinde f homeomorfizmi vardır.
- iii. Eğer H, G' nin bir alt grubu ise, o zaman $\bar{H}$ da G' nin bir alt grubudur.
- iv. Eğer H, G 'nin bir alt grubu ise ve H açık ise, o zaman H kapalıdır.
- v. Eğer H, G' nin bir alt grubu ise, o zaman H ancak ve ancak H 'nin izole bir noktası varsa ayrıktır.
- vi. Eğer H, G' 'nin bir alt grubu ise ve H açık ise, o zaman H 'nin içi boş değildir.

Kanıt

Sadece (i) ve (iii)'ün ispata ihtiyacı vardır; geri kalan ifadeler bir topolojik grup için geçerlidir, dolayısıyla bir topolojik latis sıralı-grup için geçerlidir.

i: G topolojik bir latis sıralı-gruptur; dolayısıyla $x \mapsto x$ ve $x \mapsto -x$ dönüşümleri süreklidir.

$G \times G$ çarpım topolojisini taşıyacağından, $x \mapsto (x, -x)$ süreklidir. $(x, y) \mapsto x \vee y$ 'nin sürekliliği göz önüne alındığında; $x \mapsto |x| = x \vee (-x)$ bileşimi de süreklidir.

iii: , $x \mapsto x^+, x \mapsto x^-$ ve $x \mapsto |x|$ dönüşümlerinin sürekliliğinden çıkar.

Genel olarak, $|x| + \mathcal{B}_0 = \{|x| + B \mid B \in \mathcal{B}_0\}$, $\mathcal{N}_x$ için bir komşuluk tabanı değildir, çünkü $x \mapsto |x|$ dönüşümünün bir tersi olmayabilir. Aşağıdaki örneği ele alalım.

$G, \mathbb{R}$ üzerinde bilinen topoloji ve olağan sıralama ile donatılmış bir toplamsal grup olsun. O zaman G açıkça topolojik latis sıralı bir gruptur. $x = -1$ olsun. O zaman $|x| + \mathcal{B}_0$ 1'deki komşuluk tabanıdır ve -1 'deki komşuluk tabanı olmadığı açıktır.

(G, τ) topolojik latis sıralı bir grup ve $\mathcal{N}_0$ onun sıfırdaki τ komşuluk sistemi olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

- i. G bir T_0 -uzayıdır.
- ii. G bir Hausdorff uzayıdır.
- iii. $\bigcap_{U \in \mathcal{N}_0} U = \{0\}$.
- iv. $G \setminus \{0\}$ içindeki tüm x ler için, $x \notin U$ içinde olmayacak şekilde sıfırın bir U komşuluğu vardır.
- v. $G \setminus \{0\}$ içindeki tüm x ler için, $x^+ \notin U$ içinde olacak şekilde sıfırın bir U komşuluğu vardır.
- vi. $G \setminus \{0\}$ içindeki tüm x ler için, sıfırın U komşuluğu vardır, öyle ki $x^- \notin U$ şeklindedir.
- vii. $G \setminus \{0\}$ içindeki tüm x ler için, $|x| \notin U$ olan sıfırın bir U komşuluğu vardır.

G bir topolojik latis sıralı grup ve $\mathcal{B}_0$ ile 0 'ın komşuluk tabanı verilsin .

Aşağıdakiler sağlanır;

- i. G' 'den G' ye $x \mapsto |x|$ işlemi süreklidir.
- ii. $x + \mathcal{B}_0 = \{x + B \mid B \in \mathcal{B}_0\}, \mathcal{N}_x$ için bir komşuluk tabanıdır.
- iii. Sıfırın herhangi bir U komşuluğu için, sıfırın başka bir V komşuluğu vardır, öyle ki $V^+ = \{x^+ \mid x \in V\} \subset U, V^- = \{x^- \mid x \in V\} \subset U$, ve $|V| = \{|x| \mid x \in V\} \subset U$
- iv. Eğer K bir O açık kümesi içinde yer alan kompakt bir küme ise, o zaman $K + U \subset O$ olacak şekilde sıfırın bir U komşuluğu vardır.
- v. İki açık kümenin toplamı açıktır.
- vi. Kompakt bir küme ile kapalı bir kümenin toplamı kapalıdır.
- vii. Eğer E_1 ve E_2, G' 'nin iki altkümesi ise, o zaman $\overline{E_1} + \overline{E_2} \subset \overline{E_1 + E_2}$.

Kanıt

(i)-(iv) denkliği bir topolojik grup için geçerlidir, dolayısıyla bir topolojik latîs sıralı grup için de geçerlidir.

Herhangi bir eleman alıp $x \in G$. G bir latîs olduğundan, x^+, x^- ve $|x|, G'$ nin elemanlarıdır. Dolayısıyla, (v), (vi) ve (vii)'nin denkliği (i) ve (iv)' ün denkliğinden doğmaktadır.

İki normlu uzay arasındaki doğrusal bir operatörün bir noktada sürekli olması durumunda sürekli olduğu iyi bilinmektedir; benzer şekilde, iki topolojik grup arasındaki bir homomorfizma bir noktada sürekli olması durumunda sürekli dir. İki topolojik latîs sıralı grup arasındaki bir grup homomorfizması için aşığıdaki sonuç açıktır.

T iki topolojik latîs sıralı grup G_1 ve G_2 arasında bir homomorfizma olsun. Eğer T, x_0^+ noktasında sürekli ise $x_0 \in G_1$ olmak üzere o zaman T düzgün sürekli dir. Benzer şekilde x_0^+ noktasında sürekli ise $x_0 \in G_1$ de yine düzgün sürekli dir.

Bu bölümü bir topolojik kafes sıralı grubun sıfırdaki komşuluk tabanı açısından karakterizasyon teoremini hatırlatarak sonlandırıyoruz, bu sonuca gelecekteki teoremlerde ihtiyaç duyulacaktır.

(G, τ) bir topolojik kafes sıralı grup ve $\mathcal{B}_0$ sıfırda bir komşuluk tabanı olsun. O zaman $\mathcal{B}$ aşığıdaki koşulları sağlar.

- i. Eğer $U \in \mathcal{B}_0$ ise, o zaman $V \in \mathcal{B}_0$ vardır, öyle ki $V + V \subset U$.
- ii. Eğer $U \in \mathcal{B}_0$ ise, o zaman $-U \in \mathcal{B}_0$ olur.
- iii. Eğer $U \in \mathcal{B}_0$ ve $x \in U$ ise, o zaman $V \in \mathcal{B}_0$ vardır, öyle ki $x + V \in U$ olur.
- iv. Eğer $U \in \mathcal{B}_0$ ve $x \in G$ ise, o zaman $V \in \mathcal{B}_0$ vardır, öyle ki $(V - x^+) \vee (V + x^-) \subset U$ olur.

Tersine, bir latîs sıralı G alt kümelerinin $\mathcal{F}$ filtresi (i)-(iv) özelliklerini karşılıyorsa, o zaman $\mathcal{F}, G$ üzerinde bir latîs grup topolojisini benzersiz bir şekilde belirlemektedir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

2.1. Teorem (Hong, L,2014)

Bir latıs sıralı grup G üzerindeki bir τ grup topoloji yerel solid topolojidir ancak ve ancak değişmez ötelemeli latıs psödometrikler ailesi tarafından üretiliyordur.

Kanıt

Varsayalım ki $\{d_\alpha\}_{\alpha \in A}$ değişmez ötelemeli latıs pseudometriklerinin bir ailesi olsun. d bu aileden seçilmiş keyfi bir psödometrik olsun. Her $r > 0$ için

$$B_d(0, r) = \{x \in G \mid d(0, x) < r\}.$$

açık yuvarını düşünelim. O zaman d 'nin değişmez ötelemeli özelliğinden $B_d(0, r)$ 'nin simetrik olduğunu, yani $B_d(0, r) = -B_d(0, r)$ eşitliği sağlanır; d 'nin alt-toplanabilirliğinden $B_d\left(0, \frac{r}{2}\right) + B_d\left(0, \frac{r}{2}\right) \subset B_d(0, r)$ kapsaması sağlanır. Sonra, $y \in B_d(0, r)$ ve $|x| \leq |y|$ eşitsizliğini varsayalım. d latıs pseudometrik olduğundan $d(0, x) \leq d(0, y) < r$ sağlanır, bu eşitsizlikte $B_d(0, x)$ 'in G 'nin solid alt kümesi olduğunu gösterir. Böylece, $\{d_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ailesinden herhangi sonlu sayıda $d_1, \dots, d_n$ pseudmetrikler için

$$B_{d_1}(0, r) \cap \dots \cap B_{d_n}(0, r), \quad r > 0,$$

formundaki tüm kümelerin koleksiyonu G üzerindeki bir yerel solid grup topoloji için sıfır'ın bir komşuluk tabanını oluşturur. Buradan $\{d_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ailesinin G üzerinde bir yerel solid topoloji oluşturduğu sonucu çıkar.

Gerektirmenin diğer yönünü ispatlayalım. τ , latıs sıralı grup G üzerinde yerel solid grup topolojisi olsun, τ 'nun değişmez ötelemeli latıs psödometrikler ailesi tarafından üretildiğini göstermemiz gerekir. Bu amaçla, V sıfırın bir komşuluğu olsun. Sıfırın yerel solid, simetrik τ -komşuluklarından $\{U_n\}$ dizisi seçelim, öyle ki

$$\begin{aligned} U_1 &= V \\ U_{n+1} + U_{n+1} + U_{n+1} &\subset U_n, \quad \forall n \geq 1. \end{aligned}$$

şartları sağlansın.

$\{U_n\}$ dizisini kullanarak Bir ρ fonksiyonu tanımlayalım

$\rho : G \times G \rightarrow R_+$ aşağıdaki gibi tanımlansın,

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } x - y \notin U_1 \\ 2^{-n}, & \text{eğer } x - y \in U_{n+1} \setminus U_n \\ 0, & \text{eğer } x - y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \end{cases}$$

O halde ρ aşağıdaki üç özelliğe sahiptir.

i. ρ bir pseudometrik olmamasına rağmen değişmez ötelemelidir,

ii. Her $x, y \in G$ için $x - y \in U_n \Leftrightarrow \rho(x, y) \leq 2^{-n}$,

iii. $|x| \leq |y|$ şartını sağlayan her $x, y \in G$ için $\rho(0, x) \leq \rho(0, y)$.

Şimdide her $x, y \in G$ için $d(x, y)$ 'nin

$$\inf \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \rho(x_i, x_{i+1}) \mid x_1 = x, x_n = y, x_i \in G \text{ her } i = 2, \dots, n-1 \right\}$$

ile tanımlanması ile $d: G \times G \rightarrow R_+$ fonksiyonu oluşturalım. d 'nin G üzerinde değişmez ötelemeli bir pseudometrik olduğunu göstereceğiz. Gerçekten de $d(x, y) \geq 0$ ve $d(x, y) = d(y, x)$ olduğu açıktır. Ayrıca G içindeki tüm x, y, z için $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ olduğunu görmek kolaydır.

ρ değişmez ötelemeli olduğundan, d 'nin de değişmez ötelemeli olduğu aşıkardır. Son olarak $x, y \in G$ ve $y_1, \dots, y_n \in G$ olmak üzere $y = \sum_{i=1}^n y_i$ olduğunu varsayalım. O zaman latis sıralı gruplarının baskın-ayırıştırma özelliği G içinde $x = \sum_{i=1}^n x_i$ ve $i = 1, \dots, n$ için $|x_i| \leq |y_i|$ olacak biçimde $x_1, \dots, x_n \in G$ elemanlarının varlığını gerektirir, ρ 'nun (iii) özelliğinden de şu sonucu elde ederiz;

$$d(0, x) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \rho(0, x_0) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \rho(0, x_i)$$

Bu da $d(0, x) \leq d(0, y)$ anlamına gelir. Dolayısıyla d, G üzerinde değişmez ötelemeli bir latis pseudometriktir.

Yukarıdaki tanımlamalar sıfırın her V komşuluğu için G üzerinde değişmez ötelemeli bir d_V pseudometriğin var olduğunu gösterir, öyle ki

$$x \in V \Leftrightarrow d_V(0, x) \leq 1$$

gerçeklenir. $\tau', \{d_V\}_{V \in \mathcal{N}_0}$ tarafından üretilen grup topolojisi olsun. O zaman $\tau \subset \tau'$ anlamına gelir.

Kanıtı bitirmek için, $\tau' \subset \tau$ kapsamasını göstermemiz gerekir. Bu amaçla, herhangi bir pozitif n tamsayısı için aşağıdakilere sahip olduğumuzu göstermek yeterlidir

$$B(0, 2^{-n}) = \{x \in G \mid d(0, x) < 2^{-n}\} \subset U_n.$$

$\rho \leq 2d$ eşitsizliğinin bu yukarıdaki kapsamayı gerektirdiğini görmek kolaydır. Bundan dolayı $x_1 = x, x_n = y$ ve $x_2, \dots, x_{n-1} \in G$ için

$$\frac{1}{2}\rho(x, y) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \rho(x_i, x_{i+1})$$

eşitsizliğini göstermemiz gerekecektir. Eğer $\sum_{i=1}^{n-1} \rho(x_i, x_{i+1}) = 0$ ise $\rho(x, y) = 0$ olur, dolayısıyla geçerlidir. Kanıtın geri kalanında, $\sum_{i=1}^{n-1} \rho(x_i, x_{i+1}) \neq 0$ olduğunu varsayıyoruz. Bunu n üzerinde tümevarım yoluyla göstereceğiz. $n = 1$ durumu aşıkardır. Tümevarım adımı için eşitsizliğin n 'den küçük tüm pozitif tamsayılar için geçerli olduğunu varsayıyoruz. İki durumu göz önünde bulunduralım.

Durum 1: $\sum_{i=1}^{n-1} \rho(x_i, x_{i+1}) < \frac{1}{2}$.

Eğer $\sum_{i=1}^{n-1} \rho(x_i, x_{i+1}) = 0$ ise, o zaman her $n \in N$ için $x_i - x_{i+1} \in U_n$ olur, dolayısıyla $x - y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$, $\rho(x, y) = 0$ anlamına gelir. O halde, $\sum_{i=1}^{n-1} \rho(x_i, x_{i+1}) > 0$ olduğunu varsayıyoruz.

$$m = \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ j \mid \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \rho(x_i, x_{i+1}) \geq \sum_{i=1}^j \rho(x_i, x_{i+1}) \right\}$$

olmak üzere $\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \rho(x_i, x_{i+1}) < \sum_{i=1}^{m+1} \rho(x_i, x_{i+1})$ sonucunu verir, bu da

$$\sum_{i=m+1}^{n-1} \rho(x_i, x_{i+1}) < \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \rho(x_i, x_{i+1}) \text{ eşitsizliğini gerektirir.}$$

Tümevarım hipotezine göre, $\frac{1}{2}\rho(x, x_m) \leq \sum_{i=1}^{m-1} \rho(x_i, x_{i+1})$ olur, dolayısıyla

$\rho(x, x_m) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \rho(x_i, x_{i+1})$ gerçekleşir. Aynı şekilde,

$$\rho(x_{m+1}, y) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \rho(x_i, x_{i+1}).$$

$$j = \min_{k \geq 1} \left\{ k \mid 2^{k-1} \leq \sum_{i=1}^{n-1} \rho(x_i, x_{i+1}) \right\}.$$

olmak üzere $\rho(x, x_m) < 2^{j-1}$, yani $x - x_m \in U_{j-1}$ ve benzer şekilde, $x_m - x_{m+1} \in U_{j-1}$ ve $x_{m+1} - y \in U_{j-1}$ gerçekleşir. Burada $\{U_n\}$ seçimi ile $x - y \in U_j$ olur. Bu nedenle, ρ 'nun (ii) özelliği, $\frac{1}{2}\rho(x, y) \leq 2^{-j} \leq \sum_{i=1}^{n-1} \rho(x_i, x_{i+1})$ eşitsizliğini gerektirir.

Durum 2: O zaman $\rho(x, x_m) \geq \frac{1}{2}, \rho$ fonksiyonunun tanımından istenilen eşitsilik elde edilir.



3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Materyal

Bu kısımda latis sıralı gruplar üzerindeki yerel solid topolojik uzayın bir değişmez ötelemeli latis psuedometrikler ailesi tarafından üretilmesi gerçeğini kullanacağız. Öncelikle Ercan.Z, 2017 ve Taylor. M.A. 1975 makalelerinin baz aldığı yakınsa tiplerinin dayanağı olan iki gözlemi sunup sonrasında yerel solid topolojik latis sıralı gruplar için tanımlayacağımız yeni yakınsama tiplerini sunacağız.

3.2. Yöntem

3.3. Ötelemeyele Değişmeyen Psödometrik Gözlemi

d ötelemeyele değişmeyen bir latis psödometrik olsun ve sabit bir $u \in G_+$ için dönüşümünü göz önünde bulunduralım:

$$d_u: G \times G \longrightarrow R$$
$$(x, y) \mapsto d_u(x, y) = d(|x - y| \wedge u, 0)$$

Öncelikle G üzerinde psödometrik olup olmadığını kontrol etmeliyiz.

Her $x \in G$, $d_u(x, x) = d(|x - x| \wedge u, 0) = d(0, 0) = 0$. Her $x, y \in G$ için $d_u(x, y) = d(|x - y| \wedge u, 0) = d(|y - x| \wedge u, 0) = d_u(y, x)$, ve her $x, y, z \in G$

$$\begin{aligned} d_u(x, y) &= d(|x - y| \wedge u, 0) = d(|x - z + z - y| \wedge u, 0) \\ &\leq d((|x - z| + |z - y|) \wedge u, 0) \leq d(|x - z| \wedge u + |z - y| \wedge u, 0) \\ &\leq d(|x - z| \wedge u, 0) + d(|z - y| \wedge u, 0) = d_u(x, z) + d_u(y, z) \end{aligned}$$

\

Dolayısıyla d_u dönüşümü bir psödometrik tir ve eşitlikten

$$\begin{aligned} d_u(x, y) &= d(|x - y| \wedge u, 0) = d(|x + z - (y + z)| \wedge u, 0) \\ &= d_u(x + z, y + z) \quad (\forall x, y, z \in G) \end{aligned}$$

d_u dönüşümü ötelemeyle değişmeme özelliğine sahiptir ve d_u monotondur çünkü $|x| \leq |y|, d(|x| \wedge u, 0) \leq d(|y| \wedge u, 0)$ olmasıdır.

(G, τ) yerel olarak solid bir latis sıralı topolojik grup olmak üzere yukarıdaki gözleme göre, ötelemeyle değişmeyen latis psödometrik $(d_i)_{i \in I}$ ailesi vardır, $\tau = \langle (d_i)_{i \in I} \rangle$ alalım. Her $i \in I$ ve $u \in G_+$ için, $d_{i,u}: G \times G \rightarrow \mathbb{R}$ olarak tanımlanan dönüşüm $d_{i,u}(x, y) = d_i(|x - y| \wedge u, 0)$ aynı zamanda ötelemeyle değişmeyen bir latis psödometrik. Böylece $(d_{i,u})_{i \in I, u \in G_+}$ G üzerinde yerel olarak solid bir topoloji oluşturur ve τ' ile belirtilecektir.

3.4. Psödometrikle Üretilen Topoloji Teoremi

(G, τ) yerel olarak solid bir topolojik latis sıralı grup ve $(d_i)_{i \in I}$ ötelemeyle değişmeyen latis psödometrik ailesi olsun, öyle ki $\tau = \langle (d_i)_{i \in I} \rangle$ olsun, o zaman $\tau' \subseteq \tau$ olacaktır.

Kanıt

$(x_\alpha), G$ üzerinde bir ağ ve $x \in G$ için $x_\alpha \xrightarrow{\tau} x$ olsun. Her $i \in I$ için $d_i(x_\alpha, x), \mathbb{R}$ üzerinde sıfıra yakınsar. Sabit bir $i \in I$ ve $u \in G_+$ için;

$$d_{i,u}(x_\alpha, x) = d_i(|x_\alpha - x| \wedge u, 0) \leq d_i(|x_\alpha - x|, 0) \Rightarrow 0 \in \mathbb{R}$$

Bu, kanıtı tamamlar.

3.5. Yerel Solid Olma Gözlemi

d ötelemeyle değişmeyen bir latis psödometrik olsun ve sabit bir $A \subseteq G_+$ için aşağıdaki dönüşümü göz önünde bulunduralım

$$d_A: G \times G \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto d_A(x, y) = \sup_{a \in A} d(|x - y| \wedge a, 0)$$

Benzer şekilde, ötelemeyle değişmeyen bir latis psödometrisi olduğu da gösterilebilir.

Bir analogi olarak; (G, τ) yerel solid bir topolojik latis sıralı grup olsun. Yukarıdaki teoreme göre $\tau = \langle (d_i)_{i \in I} \rangle$ olacak şekilde ötelemeyle değişmeyen latis psödometrik $\langle (d_i)_{i \in I} \rangle$ ailesi vardır. $(d_{i,A})_{i \in I, A \in \mathcal{P}(G_+)}$ ailesi G üzerinde yerel olarak solid bir topoloji oluşturur, τ^* ile gösterilecektir, ayrıca orijinal topolojiden daha zayıftır.

3.6. Yerel Solid Topoloji Teoremi

(G, τ) yerel olarak solid topolojik latis sıralı olsun ve $(d_i)_{i \in I}$ ötelemeyle değişmeyen latis psödometrik ailesi olsun, öyle ki $\tau = \langle (d_i)_{i \in I} \rangle$ olsun, o zaman $\tau^* \subseteq \tau$ olacaktır.

Kanıt

$(x_\alpha), G$ üzerinde bir ağ ve $x \in G$ için $x_\alpha \xrightarrow{\tau} x$ olsun. Her $i \in I$ için $d_i(x_\alpha, x), \mathbb{R}$ üzerinde sıfıra yakınsar. Sabit bir $i \in I$ ve $A \in \mathcal{P}(G_+)$ için

$$\begin{aligned} d_{i,A}(x_\alpha, x) &= \sup_{a \in A} d_i(|x_\alpha - x| \wedge a, 0) \\ &\leq \sup_{a \in A} d_i(|x_\alpha - x|, 0) \\ &= d_i(|x_\alpha - x|, 0) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Buradan ispat tamamlanır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

- i. Herhangi bir $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E_+)$ için, $u < \tau, \mathcal{A} > \subset \tau$ sağlanır.
- ii. Eğer $\mathcal{A} = \{\{E_+\}$ ise, o zaman $u < \tau, \{\{E_+\}\} \geq \tau$
- iii. Eğer $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ ise $u < \tau, \mathcal{A} > \subset u < \tau, \mathcal{B} >$ her zaman $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{P}(E_+)$ sağlanır
- iv. Her $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E_+)$ için $u < \tau, \bigcup \mathcal{A} > \subset u < \tau, \mathcal{A} >$ geçerlidir.
- v. Her $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E_+)$ için $u < \tau, \bigcup \mathcal{A} \geq u < \tau, I(\bigcup \mathcal{A}) >$ geçerlidir; burada $I(\bigcup \mathcal{A})$, $\bigcup \mathcal{A}$ tarafından üretilen idealdir.
- vi. Her $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E_+)$ için $u < \tau, \bigcup \mathcal{A} \geq u < \tau, \overline{\bigcup \mathcal{A}} >$ geçerlidir.
- vii. Eğer $0 \leq a \leq b$ ise, o zaman $u < \tau, \{a\} > u < \tau, \{b\} >$ olur.

Kanıtlar:

- i. $x_\alpha \xrightarrow{\tau} x \Leftrightarrow p_i(x_\alpha - x) \rightarrow 0 \Leftrightarrow p_i(|x_\alpha - x|) \rightarrow 0$, ve her $a \in E_+$ için $p_i(|x_\alpha - x| \wedge a) \leq p_i(|x_\alpha - x|)$ olduğunu biliyoruz dolayısıyla $\sup_{a \in A} p_i(|x_\alpha - x| \wedge a) \leq p_i(|x_\alpha - x|)$ her $A \in \mathcal{A}$. Buradan $x_\alpha \xrightarrow{u < \tau, \mathcal{A}} x$.
- ii. $\sup_{a \in E_+} p_i(|x| \wedge a) = p_i(|x|) = p_i(x)$ olduğu açıktır.
- iii. $x_\alpha \xrightarrow{< \tau, \mathcal{B} >} x \Leftrightarrow \sup_{b \in \mathcal{B}} p_i(|x_\alpha - x| \wedge a) B \in \mathcal{B}$

$$\Rightarrow \sup_{a \in A} p_i(|x_\alpha - x| \wedge a) \text{ her } A \in \mathcal{A} \subset \mathcal{B}$$

Dolayısıyla $x_\alpha \xrightarrow{< \tau, \mathcal{B} >} x$

- iv. $x_\alpha \xrightarrow{< \tau, \mathcal{A} >} x$ olsun ve sabit bir $i \in I$ için $A \in \mathcal{A}, p_{i,A}(x_\alpha - x) \rightarrow 0 \Leftrightarrow$

$\sup_{a \in A} p_i(|x_\alpha - x| \wedge a) \rightarrow 0$, olur buradan açıkça

$$p_i(|x_\alpha - x| \wedge a) \leq \sup_{a \in A} p_i(|x_\alpha - x| \wedge a) \text{ her } a \in A \text{ için.}$$

Dolayısıyla, $p_{i,\{a\}}(x_\alpha - x) = p_{i,\{a\}}(|x_\alpha - x|) = \sup_{a \in \{a\}} p_i(|x_\alpha - x| \wedge a) = p_i(|x_\alpha - x| \wedge a) \rightarrow 0$.

- v. $\bigcup \mathcal{A} \subset I(\bigcup \mathcal{A})$ olduğundan (iii) den $u < \tau, \bigcup \mathcal{A} > \subset u < \tau, I(\bigcup \mathcal{A}) >$ olur.

$x_\alpha \xrightarrow{u < \tau, d >} x$ olsun ve $b \in I(\bigcup \mathcal{A})$ verilsin, $a_1, \dots, a_n \in \bigcup \mathcal{A}$ ve $k \geq 0$ vardır öyle ki $0 \leq b \leq k(a_1 + \dots + a_n)$. O zaman

$$\begin{aligned}
|x_\alpha - x| \wedge b &\leq |x_\alpha - x| \wedge k(a_1 + \dots + a_n) \leq \sum_{i=1}^n |x_\alpha - x| \wedge ka_i, \\
&= k \sum_{i=1}^n \frac{1}{k} |x_\alpha - x| \wedge a_i \\
&\leq km \sum_{i=1}^n |x_\alpha - x| \wedge a_i
\end{aligned}$$

Burada $m, \frac{1}{k}$ dan büyük en küçük tam sayı p_i 'nin monotonluğundan

$$p_i(|x_\alpha - x| \wedge b) \leq p_i\left(km \sum_{i=1}^n |x_\alpha - x| \wedge a_i\right) \rightarrow 0.$$

Buradan $p_i(|x_\alpha - x| \wedge b) = \sup_{b \in \{b\}} p_i(|x_\alpha - x| \wedge b)$ olur ki ispat tamamlanır.

- vi. Kabul edelim ki $x_\alpha \xrightarrow{<\tau, \mathcal{A}>} x$ olsun ve $b \in \overline{U\mathcal{A}}$ verilsin. $(b_\beta) \in U\mathcal{A}$ ağını $b_\beta \xrightarrow{u<\tau, \mathcal{A}>} b$ şeklinde alalım. $i \in I$ sabit olsun ve $\varepsilon \geq 0$ keyfi verilsin. β_0 öyle seçilir ki $p_i(b_{\beta_0} - b) < \frac{\varepsilon}{2}$ sağlanır. O halde

$$\begin{aligned}
|x_\alpha - x| \wedge b &= |x_\alpha - x| \wedge (b - b_{\beta_0} + b_{\beta_0}) \\
&\leq |x_\alpha - x| \wedge (|b - b_{\beta_0}| + |b_{\beta_0}|) \\
&\leq |x_\alpha - x| \wedge |b - b_{\beta_0}| + |x_\alpha - x| \wedge |b_{\beta_0}|
\end{aligned}$$

p_i eşitliğe uygulanarak α_0 varlığı gösterilebilir $p_{i,\{b\}}(x_\alpha - x) < \varepsilon$ olur buradan istenilen elde edilir.

- vii. $\sup_{a \in \{a\}} p_i(|x_\alpha - x| \wedge a) = p_i(|x_\alpha - x| \wedge a)$ olduğu aşikardır
- $$\begin{aligned}
&\leq p_i(|x_\alpha - x| \wedge b) \\
&= \sup_{b \in \{b\}} p_i(|x_\alpha - x| \wedge b).
\end{aligned}$$

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Her $\mathcal{P}(E_+)$ $\mathcal{A}$ altkümesi için $u < \tau, \cup \mathcal{A} >$ için $u < \tau, \mathcal{A}'$ 'in altkümesidir.

$x_\alpha \xrightarrow{<\tau, \mathcal{A}>} x$ olsun ve sabit bir $i \in I$ için $A \in \mathcal{A}$ alalım

$p_{i,A}(x_\alpha - x) \rightarrow 0 \leftrightarrow \sup_{a \in A} p_i(|x_{ax} - x| \wedge a) \rightarrow 0$ sağlanır buradan

her $a \in A$ için $p_i(|x_a - x| \wedge a) \leq \sup_{a \in A} p_i(|x_a - x| \wedge a)$ sağlanır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} p_{i,a}(x_{\alpha\alpha} - x) &= p_{i,a}(|x_{\alpha\alpha} - x|) = \sup_{a \in a} p_i(|x_{\alpha\alpha} - x| \wedge a) \\ &= p_i(|x_{\alpha\alpha} - x| \wedge a) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Bu da $u < \tau, \cup \mathcal{A} > \subset u < \tau, \mathcal{A} >$ olmasıdır.

Bu durumda ikinci tip yakınsamanın birinci tipi, hangi şartlarda gerektirdiğini belirtir ve ikinci tip yakınsama ile çalışmak anlamıdır.

KAYNAKLAR

- Dabboorasad, Y. A., Emelyanov, E. Y., & Marabeh, M. A. A., 2017. **Order convergence in infinite-dimensional vector lattices is not topological.** *arXiv preprint arXiv:1705.09883*.
- Dabboorasad, Y. A., Emelyanov, E. Y., & Marabeh, M. A., 2011. **$u\tau$ $u\tau$ -convergence in locally solid vector lattices.** *Positivity*, 22, 1065-1080.
- Deng, L., O'Brein, M., Troitsky, V.G., 2015. **Unbounded norm convergence in Banach lattices,** *Archivum Mathematicum* (BRNO), 51, 107-128.
- Ercan, Z., & Vural, M., 2017. **Towards a theory of unbounded locally solid Riesz spaces.** *arXiv preprint arXiv:1708.05288*.
- Fremlin, D.H., 1974. **Topological Riesz spaces and Measure theory**, Cambridge Univ. Press, London and New York,
- Gao, N., Troitsky, V. G., & Xanthos, F., 2017. **Uo-convergence and its applications to Cesàro means in Banach lattices.** *Israel Journal of Mathematics*, 220, 649-689.
- Gao, N., Xanthos, F., 2014. **Unbounded order convergence and application to martingales without probability,** *J. Math. Anal. Appl.*, 415 931-947.
- Gao, N., 2014. **Unbounded order convergence in Dual spaces,** *J. Math. Anal. Appl.*, 419, 347-354.
- Hong, L., 2014. **Locally solid topological lattice-ordered groups.** *arXiv preprint arXiv:1404.6155*
- Hong, L., 2015. **Locally Solid Topological Lattice Ordered Groups,** *Archivum Mathematicum* (BRNO), 51 107-128..
- Kandic, M., Marabeh, M., Troitsky, V.G., 2017. **Unbounded Norm Topology in Banach Lattices,** *J. Math. Anal. Appl.* 451, no.1, 259-279).
- Nakano, H., 1948. **Ergodic theorem in semiordered linear spaces,** *Ann. of. Math.*(2), 49 ,538-556.
- Taylor, M.A., 1975. **Unbounded topologies and uo-convergence in locally solid vector lattice, to appear.** *arXiv:1706.01575 [math.FA]*.
- Troitsky, V.G., 2004. **Measures of non-compactness of operators on Banach lattices,** *Positivity*, 8(2), 165-178
- Wickstead, A.W., 1977. **Weak and unbounded order convergence in Banach lattices,** *J. Austral. Math. Soc. ser. A* 24(3) 312-319.
- Zabeti, O., 2018. **Unbounded absolute weak convergence in Banach lattices.** *Positivity*, 22, 501-505.

ÖZGEÇMİŞ

Yazar, İlkokul, Ortaokul ve Lise öğrenimini Hatay ilinde tamamladı. Mustafa Kemal Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden 2016 yılında mezun oldu. Mustafa Kemal Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalından 2024 yılında Yüksek Lisans derecesiyle mezun oldu.

